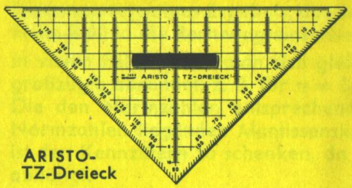
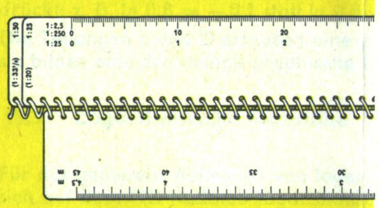
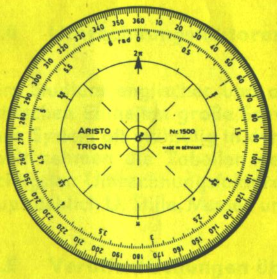


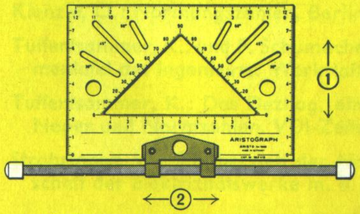
ARISTO-TZ-Dreieck



ARISTO-Spiralmaßstab



ARISTO-TRIGON



ARISTOGRAPH

ZEICHENGERÄTE

ARISTO-TZ-DREIECK

Ein Dreieck für technisches Zeichnen, das Symmetrie-Maßstab, Parallel-Lineal und Winkelmesser mit 360° oder 400g-Teilung in einem Gerät vereinigt.

ARISTO-SPIRALMASSTAB

Dieser Maßstab besteht aus drei 30 cm langen, mit einer Kunststoffspirale zusammengehaltenen Lamellen aus weißem ARISTOPAL. Durch mehrfache Bezifferung der 6 Teilungen enthält dieser Maßstab 15 Reduktionen.

ARISTO-TRIGON

Ein Vollkreis-Winkelmesser mit 360°-Teilung und Radiant-Teilungen. Zum Abtragen und Messen in beiden Winkelmaßen sowie zur Umrechnung von einem Winkelmaß ins andere.

ARISTOGRAPH

Ein Zeichengerät aus transparentem ARISTOPAL für schnelles und sauberes Skizzieren, mit einer Winkelteilung von 180° und mm-Teilungen an den Kanten. Das Zeichenrechteck, 85 x 130 mm, wird auf einer 200 mm langen, rollenden Führungswalze wie ein Parallel-Lineal bewegt (1) und gleichzeitig auf der Walze parallel verschoben (2).

ARISTO-PRODUKTIONSPROGRAMM

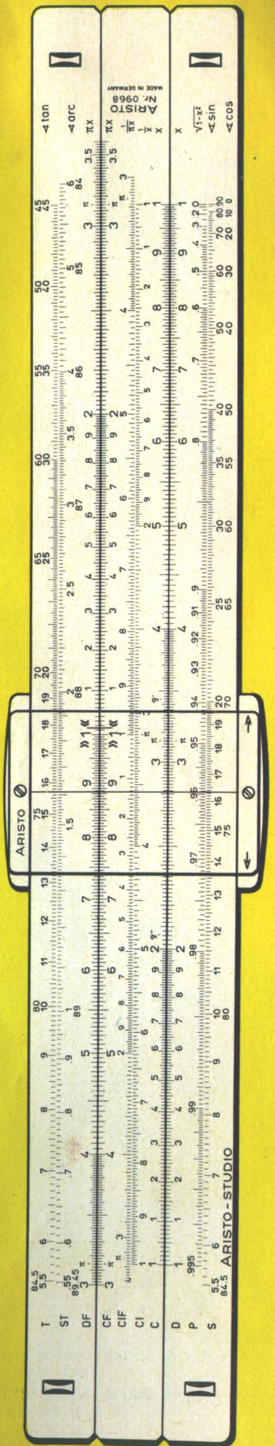
Rechenstäbe · Rechenscheiben
Maßstäbe · Zeichengeräte
Planimeter · Integratoren
Kartiergeräte
Klein-Vermessungsinstrumente für Schule und Baustelle
Koordinatographen für Industrie und Vermessungswesen

ARISTO-WERKE · DENNERT & PAPE KG
2 HAMBURG 50

ANLEITUNG ZUM RECHENSTAB

STUDIO

868 · 0968 · 01068



Normzahlen-Maßstab 1364

INHALT

Printed in Germany by Borek KG. · 2736

Die Handhabung des Rechenstabes:

Zum Rechnen wird der Rechenstab am besten in die Hand genommen und so zum Licht gedreht, daß der Läuferstrich keine Schatten werfen kann. Das Einstellen der Zunge erfolgt am genauesten durch Druck und Gegendruck. Mit der einen Hand wird das herausragende Zungenende mit Daumen und Zeigefinger dicht hinter dem Rechenstabkörper umfaßt, so daß durch Bewegen der Finger bei gleichzeitigem Abstützen gegen den Stabkörper Zug und Druckbewegungen möglich sind. Mit der anderen Hand wird die obere Leiste des Rechenstabkörpers so angefaßt, daß die Daumenspitze einen Gegendruck auf das Zungenende ausüben kann.

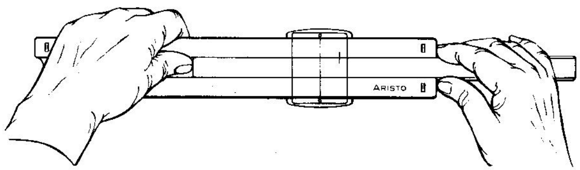


Abb. 1

Das Einstellen des Läufers kann mit einer Hand vorgenommen werden, erfolgt aber genauer und schneller mit Daumen und Zeigefinger beider Hände. Damit der Läufer nicht verkantet und der Läuferstrich immer senkrecht zu den Teilungen geführt wird, soll die Führungskante des Läufers, die der Läuferfeder gegenüber liegt, leicht gegen die Stabkante gedrückt werden.

Die Behandlung des ARISTO-Rechenstabes

Der Rechenstab ist ein wertvolles Rechenhilfsmittel und braucht eine pflegliche Behandlung. Die Skalen und der Läufer sind vor Verschmutzung und Kratzern zu schützen, damit die Ablesegenauigkeit nicht beeinträchtigt wird.
Es empfiehlt sich, den Rechenstab von Zeit zu Zeit mit dem Spezialreinigungsmittel DEPAROL zu reinigen und trocken nachzupolieren. Keinesfalls dürfen irgendwelche Chemikalien verwendet werden, da diese die Teilung zerstören können.
Der Rechenstab ist vor Plastik-Radierern und ihren Abriebprodukten zu schützen, da diese die Oberfläche des ARISTOPAL beschädigen können. Ferner ist eine Lagerung an heißen Plätzen, z. B. auf Heizkörpern oder in praller Sonne, zu vermeiden, da bei höheren Hitzegraden als etwa 60° C Verformungen auftreten. Für derart beschädigte Rechenstäbe wird kein Ersatz geleistet.

Die Rechenstabständer Nr. 770

Die dem ARISTO-Studio beigegebenen Rechenstabständer Nr. 770 werden seitlich auf den Rechenstab aufgesteckt und geben beiden Seiten eine erhöhte und schräge, d. h. ablesegünstige Stellung auf dem Schreibtisch. Dadurch sind die Skalen, wenn der Rechenstab z. B. bei Tabellenrechnungen auf dem Tisch liegt, gut überschaubar. Die erhöhte Lage des Rechenstabes erlaubt insbesondere eine freie Beweglichkeit für Lupenläufer.

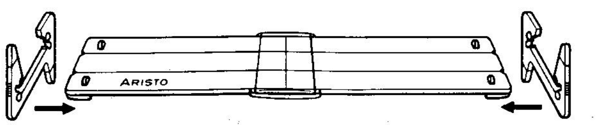


Abb. 2

Beim seitlichen Aufstecken der Rechenstabständer wird die Winkelseite des ARISTO-Studio nach oben gedreht. Die Ständer werden dann so auf die Stege des Rechenstabes geschoben, daß die Riefelung dem Benutzer sichtbar ist und die Nocken am Ständer in die Nut des Verbindungssteges einrasten können.

Diagrammdarstellung der Beispiele

Im folgenden soll eine abgekürzte Darstellungsweise der Beispiele angewendet werden, die den Lösungsweg und die Reihenfolge der Einstellungen besser angibt als die übliche Abbildung des Rechenstabes. Die Skalen werden durch parallele Linien angedeutet, an deren Ende die Benennung steht. Folgende Symbole ermöglichen das Lesen der Diagramme:

Anfangseinstellung

Jede weitere Einstellung

Endergebnis

Einstellung oder Ablesung
eines Zwischenergebnisses

Wenden des Rechenstabes

Pfeile geben die Reihenfolge
und Bewegungsrichtung an

Ein senkrechter Strich stellt den Läufer dar

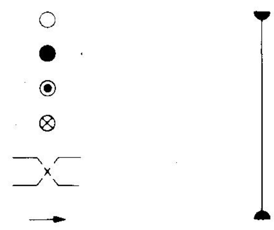


Abb. 3

DER RECHENSTAB ARISTO-STUDIO

Der ARISTO-Studio ist ein universaler Exponential-Rechenstab für Wissenschaftler, Ingenieure und Studenten.

1. Die Skalenanordnung

Winkelseite:

T	Tangensskala von 5,5° bis 45°, rücklaufend von 45° bis 84,5° rot beziffert, gilt auch für Kotangens	∢ tan	auf der oberen Körperleiste
ST	Skala für Sinus und Tangens der Winkel von 0,55° bis 6°, für Kofunktionen von 84° bis 89,45° rücklaufend rot beziffert	∢ arc	
DF	Um π versetzte Grundskala	πx	
CF	Um π versetzte Grundskala	πx	auf der Zunge
CIF	Kehrwertskala zu CF	$1/\pi x$	
CI	Kehrwertskala zu C	$1/x$	
C	Grundskala	x	
D	Grundskala	x	auf der unteren Körperleiste
P	Pythagoreische Skala	$\sqrt{1-x^2}$	
S	Sinusskala von 5,5° bis 90° rücklaufend von 0° bis 84,5° als Kosinusskala rot beziffert	∢ sin ∢ cos	

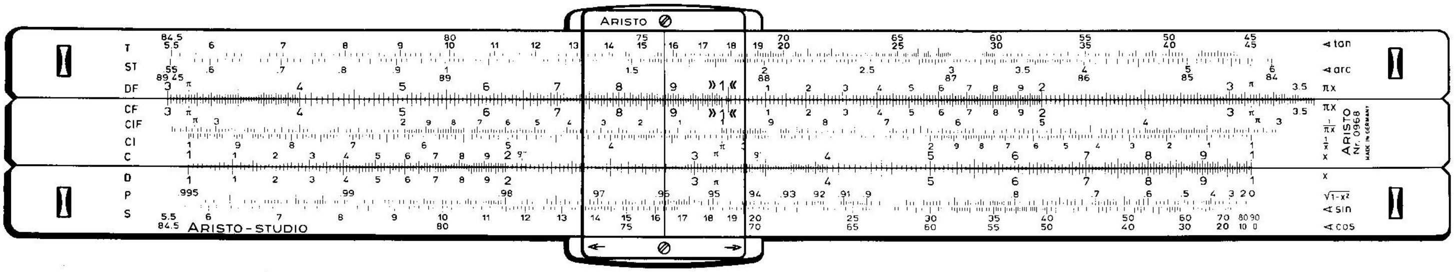


Abb. 4 Winkelseite

Exponentialseite:

LL01	Exponentialskala,	Bereich: 0,99—0,9	$e^{-0,01x}$	auf der oberen Körperleiste
LL02		Bereich: 0,91—0,35	$e^{-0,1x}$	
LL03		Bereich: 0,4 —10^{-5}	e^{-x}	
A	Quadratskala		x^2	
B	Quadratskala		x^2	auf der Zunge
L	Mantissenskala		$\lg x$	
K	Kubikskala		x^3	
C	Grundskala		x	
D	Grundskala		x	auf der unteren Körperleiste
LL3	Exponentialskala:	Bereich: 2,5 —10^5	e^x	
LL2		Bereich: 1,1 —3,0	$e^{0,1x}$	
LL1		Bereich: 1,01—1,11	$e^{0,01x}$	

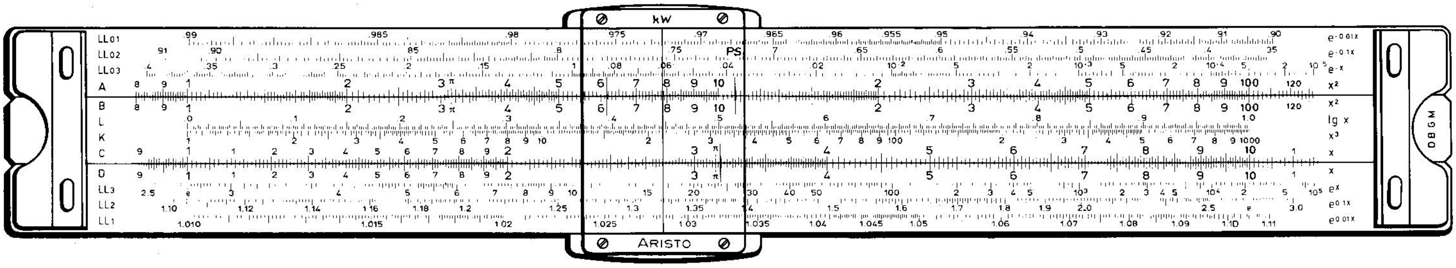


Abb. 5 Exponentialseite

2. Das Lesen der Skalen

Für den Gebrauch des Rechenstabes ist es wesentlich, die Skalen schnell und sicher abzulesen. Die Abbildungen 6 bis 9 zeigen Ablesebeispiele auf den am meisten benutzten Grundskalen C und D. Die Hauptintervalle sind durch lange Teilstriche mit den Ziffern 1 bis 10 gekennzeichnet (Abb. 6). Die 10 ist auf der Winkelseite wieder als 1 bezeichnet, da dieser Teilstrich als Beginn einer neuen Skala angesehen werden kann, die mit der vorausgehenden identisch ist.

Abb. 6 Die Hauptintervalle

Im Bereich der Ziffern 1 bis 2 ähnelt die Skala dem Teilungsbild eines Millimeter-Maßstabes, der Unterschied besteht nur darin, daß die Teilungsintervalle nach rechts hin immer kleiner werden.

Abb. 7 Ablesen im Bereich von 1 bis 2

Die Ziffer 2 eines Millimeter-Maßstabes kann 2 cm, 20 mm, 0,2 dm, 0,02 m usw. gelesen werden; d. h. abgesehen von der Dimension tritt die 2 in Verbindung mit verschiedenen Zehnerpotenzen auf. Ähnlich sagt auch die Ziffer der Rechenstabskala nichts über die Kommastellung aus. Deshalb ist es ratsam, nur Ziffernfolgen ohne Komma abzulesen und die Ziffern einzeln zu sprechen, z. B. Eins-Drei-Vier, nicht aber einhundertvierunddreißig. Dann werden keine Ziffern vertauscht oder ausgelassen. Verschiebt man zur Übung den Läuferstrich langsam vom Wert 1 nach rechts und liest an jedem einzelnen Teilstrich ab: 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113 usw.

Der Läuferstrich ist im Vergleich zur Breite des Intervalls so dünn, daß die Mitte zwischen zwei Teilstrichen sicher eingestellt werden kann. Das Auge unterscheidet aber auch kleine Bruchteile eines Intervalls, so daß man bei einiger Übung den zehnten Teil des Intervalls schätzen kann und damit die vierte Stelle erhält.

Zur Übung wird der Läuferstrich langsam weiter nach rechts verschoben, zwischen den Teilstrichen 1310 und 1320 wird beispielsweise geschätzt: 1311, 1312, 1313, 1314, 1315 usw.

Zwischen einem bezifferten Teilstrich und dem ihm folgenden sind die Nullen zu beachten, besonders am Beginn der Skala, z. B. 1000, 1001, 1002, 1003 usw. (vgl. 1007 in Abb. 7).

Abb. 8 Ablesen im Bereich von 2 bis 4

Da die Teilungsintervalle links von der Ziffer 2 bereits sehr eng werden, ist in dem daran anschließenden Bereich zwischen den Ziffern 2 und 4 nur noch jeder zweite Teilstrich eingraviert; daraus ergibt sich ein neues Teilungsbild, bei dem von Strich zu Strich die geraden Werte abgezählt werden: 200, 202, 204, 206, 208, 210, 212, 214 usw. Die Mitten der Intervalle geben die ungeraden Werte an: 201, 203, 205, 207, 209, 211, 213 usw. Abb. 8 zeigt einige Ablesebeispiele.

Abb. 9 Ablesen im Bereich von 4 bis 10

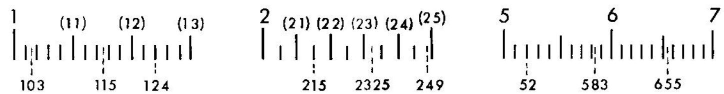
Im Bereich von 4 bis 10 springen die Markierungen um 5 Einheiten, so daß die Ablesungen an den aufeinanderfolgenden Teilstrichen 400, 405, 410, 415, 420, 425, 430 usw. lauten.

Die Zwischenwerte müssen geschätzt werden, in der Mitte zwischen 400 und 405 liegt der Wert 4025, etwas links davon 402, etwas rechts 403. Entsprechend gibt die Mitte des nächsten Intervalls den Wert 4075 an. Abb. 9 zeigt eine Reihe von Einstellungen.

3. Das Lesen der Skalen beim Taschenrechenstab

(nur für 868)

Wegen der kürzeren Basislänge sind die Skalen beim Taschenrechenstab anders unterteilt als beim 25 cm langen Rechenstab. Die drei verschiedenen Grundintervalle treten hier in anderer Reihenfolge auf.



Bereich von 1 bis 2 — Bereich von 2 bis 5 — Bereich von 5 bis 10

Abb. 10

Im Bereich von 1 bis 2 sind nur die Werte 1, 1,5 und 2 beziffert. Die zweite Stelle wird an den langen Teilstrichen abgezählt, wie die eingeklammerten Zahlen zeigen, z. B. (12). Die dazwischenliegenden kurzen Teilstriche führen jeweils um zwei Einheiten der dritten Stelle weiter, z. B. 124. Diese dritte Stelle ist immer eine gerade Zahl 0, 2, 4, 6 oder 8, die ungeraden Werte liegen in der Mitte der Intervalle, z. B. 103.

Im Bereich der bezifferten Teilstriche von 2 bis 5 wird die zweite Stelle wieder an den langen Teilstrichen abgezählt, z. B. (23). Die kurzen Teilstriche geben jeweils die 5 der dritten Stelle an, z. B. 215. Alle anderen Werte der dritten Stelle werden geschätzt.

Im Bereich von 5 bis 10 ist wieder nur die erste Stelle beziffert. Die zweite Stelle wird wie bei einem Millimetermaßstab an den kurzen Teilstrichen abgezählt, z. B. 52. Die dritte Stelle wird zwischen den kurzen Teilstrichen geschätzt, z. B. 583.

4. Die Überschlagsrechnung

Im Kapitel 2 wird betont, daß auf dem Rechenstab ausschließlich Ziffernfolgen eingestellt und abgelesen werden. Erst mit einer groben Überschlagsrechnung wird die richtige Kommastellung im Rechenergebnis festgelegt und damit gleichzeitig eine Kontrolle für die erste Ziffer der Stabrechnung durchgeführt.

Regeln für Überschlagsrechnungen:

Zahlenwerte stark abrunden!

z. B. $3{,}43 \approx 3$ $\quad 9{,}51 \approx 10$ $\quad 7{,}61 \approx 8$

Bei Multiplikationen den einen Faktor aufrunden, den anderen abrunden!

z. B. $8{,}92 \cdot 127 \approx 10 \cdot 120 = 1200$

$2{,}19 \cdot 9830 \approx 2 \cdot 10000 \approx 20000$

Divisionen durch Kürzen vereinfachen!

Zähler und Nenner werden in der gleichen Richtung abgerundet.

z. B. $\frac{725}{539} = \frac{7{,}25}{5{,}39} \approx \frac{7}{5} \approx 1{,}4$

$\frac{640 \cdot 15{,}3}{51 \cdot 0{,}8} \approx \frac{60 \cdot 20}{5 \cdot 1} \approx 240$

Das Abspalten von Zehnerpotenzen erleichtert das Rechnen mit sehr großen oder sehr kleinen Zahlenwerten.

z. B. $73215 \approx 7 \cdot 10^4$ $\quad 0{,}0078 \approx 8 \cdot 10^{-3}$

$89 \approx 9 \cdot 10^1$ $\quad 0{,}706 \approx 7 \cdot 10^{-1}$

Beim Multiplizieren bzw. Dividieren mit sehr großen und sehr kleinen Zahlenwerten gewährleistet das Abspalten von Zehnerpotenzen eine bessere Übersichtlichkeit!

z. B. $0{,}07325 \cdot 0{,}000513 \approx 8 \cdot 10^{-2} \cdot 5 \quad 10^{-4} \approx 40 \cdot 10^{-6} \approx 4 \cdot 10^{-5}$

$\frac{2950}{0{,}00598} \approx \frac{3 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^{-3}} \approx 0{,}5 \cdot 10^6$

5. Das Rechenprinzip

Gerechnet wird derart, daß Strecken mechanisch addiert oder subtrahiert werden. Auf einfachste Weise kann die Rechenmethode an Hand zweier gegeneinander verschiebbarer Millimeter-Maßstäbe erklärt werden.

Abb. 11 zeigt das Beispiel $2 + 3 = 5$. Wenn der Anfang des oberen Maßstabes über den Wert 2 des unteren Maßstabes gelegt wird, kann zu dieser eingestellten Strecke 2 mit Hilfe der oberen Skala beispielsweise die Strecke 3 addiert werden. Unter der 3 des oberen Maßstabes steht das Ergebnis 5 in dem unteren Maßstab. In der Abb. 11 könnte ebenfalls abgelesen werden $2 + 1 = 3$ oder $20 + 15 = 35$, wenn die Millimeter abgezählt werden.

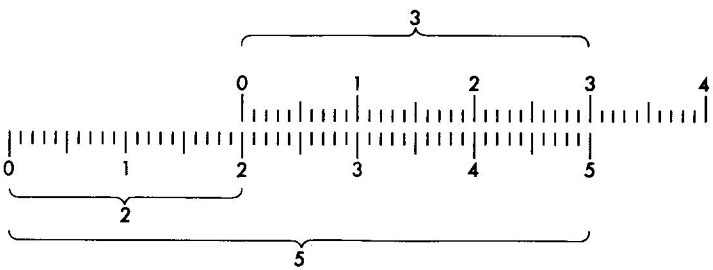


Abb. 11 Graphische Addition mit Skalen

Auch die Subtraktion $5 - 3 = 2$ läßt sich aus der Abb. 11 ablesen, der Vorgang wird dann nur umgekehrt. Von der Strecke 5 der unteren Skala wird die Strecke 3 der oberen Skala abgezogen, dazu werden die Werte 5 und 3 übereinandergestellt und unter dem Anfang der oberen Skala steht das Ergebnis 2 in der unteren Skala.

Beim Rechenstab befinden sich die Teilungen auf einem festen Körper und auf einer darin verschiebbaren Zunge. Die Eigenart des Rechenstabes besteht darin, daß logarithmisch geteilte Skalen aufgetragen sind. Die graphische Addition zweier Strecken ergibt damit eine Multiplikation, und die Subtraktion wird zur Division.

6. Multiplikation

(Zwei Strecken werden addiert)

Der Zungenanfang 1 der Skala C wird über den Wert 18 von D gestellt. Durch Verschieben des Läufers zum Wert 13 der Skala C wird die Strecke 13 zur Strecke 18 addiert, und das Ergebnis 234 kann unter dem Läuferstrich auf Skala D abgelesen werden. Aus einer groben Überschlagsrechnung etwa ($20 \cdot 10 = 200$) ergibt sich die Kommastellung.

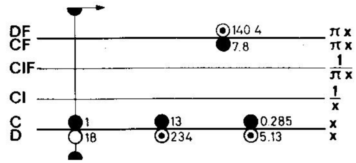


Abb. 12 $18 \cdot 13 = 234$
$18 \cdot 0{,}285 = 5{,}13$
$18 \cdot 7{,}8 = 140{,}4$

Zum Ablesen der Aufgabe $18 \cdot 7{,}8$ wird die Zunge durchgeschoben, d. h. das Skalenende der Skala C über 18 in D gestellt. Beim ARISTO-Studio läßt sich diese zusätzliche Zungeneinstellung aber vermeiden, wenn man mit dem oberen Skalenpaar CF/DF weiterrechnet.

Die Skalen CF und DF ermöglichen diese vereinfachte Rechnung, weil sie eine Wiederholung der Grundskalen C und D mit dem Unterschied sind, daß ihr Skalenanfang 1 ungefähr in der Mitte des Rechenstabes liegt. Wenn sich z. B. im unteren Skalenpaar die Werte 1 auf Skala C und 18 auf Skala D gegenüberstehen, so ist beim oberen Skalenpaar die gleiche Einstellung ablesbar, nämlich 1 auf Skala CF unter 18 auf Skala DF und folglich kann in beiden Skalenpaaren mit dem Faktor 18 multipliziert werden. Die Aufgabe $18 \cdot 7{,}8$ wird mit den Skalen CF/DF gerechnet, indem der Läuferstrich auf 7,8 in Skala CF gebracht und in Skala DF 140,4 abgelesen wird.

7. Division

(Subtraktion zweier Strecken, Umkehrung der Multiplikation)

Der Läuferstrich wird über den Wert 2620 in D gestellt und die Zahl 17,7 der Skala C unter den Läuferstrich geschoben, so daß beide Werte einander gegenüber stehen. Das Ergebnis 148 wird unter dem Zungenanfang der Skala C abgelesen, bei anderen Beispielen gegebenenfalls unter dem Zungenende.

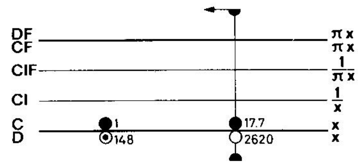


Abb. 13 $2620 : 17{,}7 = 148$
Überschlag $3000 : 20 = 150$

Über der 1 in CF kann das Ergebnis auf der Skala DF natürlich ebenfalls abgelesen werden, weil auch in den Skalen CF/DF die Aufgabe 2620 : 17,7 eingestellt ist.

Dieselbe Zungeneinstellung gilt aber auch für die Multiplikation $148 \cdot 17{,}7 = 2620$. Der Unterschied zwischen der Multiplikation und Division besteht nur in der Reihenfolge der Einstellungen. Bei der Division wird das Ergebnis jeweils unter dem im Körper befindlichen Skalenanfang oder -ende abgelesen, ein Durchschieben gibt es nicht. Dieser Vorteil wird in den folgenden Kapiteln wiederholt ausgenutzt werden.

8. Die versetzten Skalen CF und DF

Die Skalen CF und DF sind eine Wiederholung der Grundskalen C und D, gegen diese aber so versetzt, daß $\pi = 3{,}142$ in CF bzw. DF genau über dem Skalenanfang oder -ende der Grundskalen C bzw. D steht. Ihr Wert 1 liegt etwa in der

Rechenstabmitte, so daß mit den versetzten Skalen eine Überteilung der Grundskalen von einer halben Stablänge erzielt wird. Beide Skalenpaare C/D und CF/DF bilden somit eine Arbeitsgemeinschaft, aus der erhebliche Rechenvorteile beim Multiplizieren, Tabellenrechnen und bei Proportionsrechnungen resultieren.

Der Index 1 der Skala CF zeigt stets auf den gleichen Wert von DF wie die 1 oder 10 der Skala C auf D. Die bisher ausgeführten Multiplikationen können auch mit dem oberen Skalenpaar CF/DF begonnen werden, und zwar mit dem Vorteil, daß immer die richtige Anfangseinstellung gewählt wird. Die Entscheidung, ob mit dem linken oder rechten Skalenende angefangen werden muß, ist dann unnötig. Wird eine Division mit den oberen Skalen eingestellt, so stehen Zähler und Nenner auf dem Rechenstab wie in der Bruchschreibweise übereinander.

Kann das Ergebnis einer Aufgabe in dem einen Skalenpaar nicht mehr abgelesen werden, so ist die Ablesung stets im anderen möglich, ein Durchschieben der Zunge gibt es nicht. Die gelben Farbzeilen auf der Zunge sollen daran erinnern, daß die Faktoren auf den beweglichen Zungenskalen C und CF eingestellt werden und das Ergebnis auf D unter C oder auf DF über CF abgelesen wird.

8.1 Tabellenrechnung ohne „Durchschieben" der Zunge

$$y = 29\,x$$

x	1,7	3,45	5,0	10
y	49,3	100	145	290

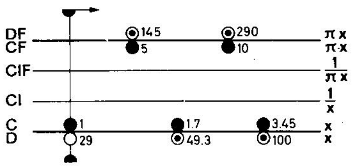


Abb. 14

Für x = 5 kann ohne Durchschieben der Zunge auf dem oberen Skalenpaar CF und DF abgelesen werden.

$$y = \frac{28{,}2}{x} = 28{,}2 \cdot \frac{1}{x}$$

x	7,43	2,92	1,567
y	3,795	9,66	18,0

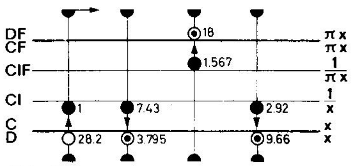


Abb. 15

$$y = \frac{x}{18{,}2} = \frac{1}{18{,}2} \cdot x$$

x	3,17	112,1
y	0,1742	6,16

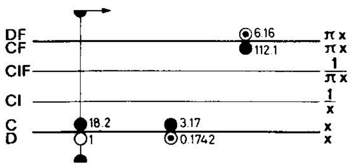


Abb. 16

8.2 Direkte Ablesung von Multiplikationen und Divisionen mit der Zahl π

Da die Skalen CF und DF um den Wert π versetzt sind, ergibt sich der weitere Vorteil, daß beim Übergang von D nach DF bzw. C nach CF eine Multiplikation und in der umgekehrten Richtung eine Division mit π ausgeführt wird. Wenn z. B. der Durchmesser d auf Skala D mit dem Läuferstrich eingestellt wird, kann darüber auf der Skala DF der Kreisumfang $U = \pi\,d$ abgelesen werden. Ähnlich berechnet man die Kreisfrequenz $\omega = 2\,\pi\,f$, wenn 2 f in D eingestellt wird.

Bei allen Aufgaben, die den Faktor π enthalten, wird dieser bei der letzten Ablesung durch einen Übergang zu den versetzten Skalen berücksichtigt. Eine Zusammenstellung aller Rechnungen mit dem Faktor π, die mit einer Läufereinstellung möglich sind, zeigt die Abb. 17.

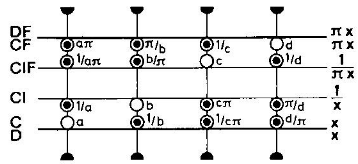


Abb. 17 Rechnen mit π

9. Vereinigte Multiplikation und Division

Bei Rechnungen mit Ausdrücken der Form $\frac{a \cdot b}{c}$ gilt der Grundsatz:

Zuerst dividieren, dann multiplizieren. Nach der Division 345 : 132 in Abb. 18 braucht das Zwischenergebnis 2,61 nicht abgelesen zu werden; denn der Rechenstab ist bereits für die anschließende Multiplikation eingestellt. Der Läufer wird zum Wert 22 der Skala C verschoben, darunter steht dann das Ergebnis 57,5 in Skala D.

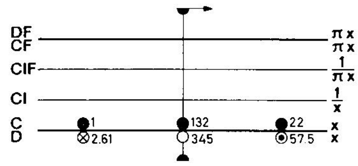


Abb. 18

Überschlag

$$\frac{345}{132} \cdot 22 = 57{,}5 \qquad \frac{300}{100} \cdot 20 = 60$$

Wird dieses Beispiel durch einen im Nenner stehenden Faktor 19,5 erweitert,

$$\frac{345 \cdot 22}{132 \cdot 19{,}5} = 2{,}95$$

kann anschließend an die Lösung in Abb. 18 dividiert werden, indem der Wert 19,5 der Skala C unter den Läuferstrich gebracht wird, so daß 57,5 durch 19,5 geteilt wird. Stehen bei derartigen Aufgaben weitere Faktoren im Zähler und im Nenner, wird einfach abwechselnd dividiert und multipliziert. Die rhythmische Abwechslung von Zungen und Läufereinstellungen sorgt für einen gleichbleibenden Fluß der Rechnung mit einem Minimum an Einstellungen.

Es kann bei derartigen Aufgaben vorkommen, daß die Zunge nach der Division zu weit aus dem Rechenstab herausragt und die Zunge vor der Multiplikation durchgeschoben werden muß. Durch die richtige Wahl der Divisionseinstellung mit C/D oder CF/DF läßt sich dieser Sonderfall oft vermeiden.

10. Die Kehrwertskalen CI und CIF

Die Skala CI ist genauso unterteilt wie die Grundskalen C und D, sie verläuft in der umgekehrten Richtung von rechts nach links und ist zur Vermeidung von Ablesefehlern rot beziffert.

Wird der Läufer auf irgendeinen Wert x in Skala C gestellt, kann sein Kehrwert 1/x in CI abgelesen werden, wie die Skalenbezeichnung am rechten Rand angibt. Über 5 in C steht 1/5 = 0,2 in CI. Wichtiger ist aber, daß die Kehrwertbildung auch für die umgekehrte Richtung gilt, nämlich beim Übergang von CI nach C; z. B. steht unter 4 in CI der Wert 1/4 = 0,25 in C.

Ein nur gelegentliches Ablesen von Kehrwerten würde das Vorhandensein der Skala CI nicht rechtfertigen. Ihr Hauptwert liegt darin, daß sie viel unnötige Einstellarbeit bei zusammengesetzten Aufgaben erspart.

$\frac{4}{5}$ kann als $4 \cdot \frac{1}{5}$ geschrieben werden und $4 \cdot 5$ ist das Gleiche wie $\frac{4}{1/5}$.

Diese Schreibweise ist zwar ungewohnt, hat aber für das Stabrechnen den Vorteil, daß eine Division in eine Multiplikation und umgekehrt eine Multiplikation in eine Division umgewandelt wird. Ein „Spiel“ mit einfachen Zahlen wird uns den Wert dieser Umformung am besten zeigen:

1. Bringen wir den Läufer über 6 in D und schieben 2 in C unter den Läuferstrich, dann haben wir die übliche Division $6:2=3$ (Abb. 19). Lassen wir aber den Läufer stehen und bringen durch Verschieben der Zunge die 2 der Skala CI darunter, so erhalten wir die Multiplikation $6 \cdot 2$, wobei wir das Ergebnis 12 wie bei einer Division unter der Zungeneins ablesen (Abb. 20). In Wirklichkeit haben wir $6:0{,}5$ ausgerechnet, weil mit der 2 in CI gleichzeitig der Kehrwert 0,5 in C unter den Läuferstrich gebracht wurde.

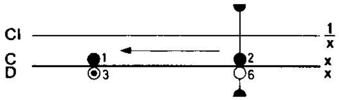


Abb. 19

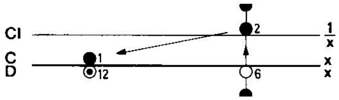


Abb. 20

2. Lassen wir jetzt die Eins der Skala C über 12 in D stehen und bringen den Läufer auf 4 in C, dann erhalten wir die übliche Multiplikation $12 \cdot 4 = 48$ (Abb. 21). Verschieben wir aber den Läufer nach 4 in CI, so lesen wir das Ergebnis der Division $12:4=3$ in D ab (Abb. 22). Mit anderen Worten: Da unter 4 in CI der Kehrwert $1/4 = 0{,}25$ in C steht, ist in Wirklichkeit $12 \cdot 0{,}25 = 3$ gerechnet worden.

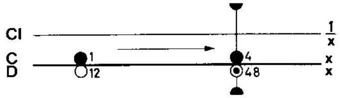


Abb. 21

Es gibt für die Multiplikation und Division also je zwei Einstellmöglichkeiten, von denen sich der geübte Rechner jeweils die bessere aussucht, um bei zusammengesetzten Aufgaben eine abwechselnde Division und Multiplikation zu erhalten.

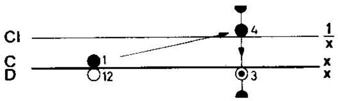


Abb. 22

Die bisher zwischen den Skalen C und CI geschilderten Beziehungen gelten in gleicher Weise auch für die Skalen CF und CIF. Um das einzusehen, ist es nützlich dasselbe „Zahlenspiel“ mit der Skalengruppe CF/DF/CIF zu wiederholen. Wer die vorhergehenden Kapitel aufmerksam studiert hat, wird jetzt erkennen, daß die Skala CIF die folgerichtige Ergänzung des Skalensystems ist. Und wer die Vorteile der versetzten Skalen richtig ausnutzt, braucht die Skala CIF genau so oft wie die Skala CI.

Ausdrücke der Form $a \cdot b \cdot c$ oder $\frac{a}{b \cdot c \cdot d}$ usw. werden durch abwechselnde Multiplikation und Division wie die Aufgaben der vereinigten Multiplikation und Division (Kap. 9) gelöst. Während der Rechnung kann von der Skalengruppe C, D und CI zur Skalengruppe CF, DF und CIF übergegangen werden, um bei der Multiplikation das Durchschieben der Zunge zu vermeiden.

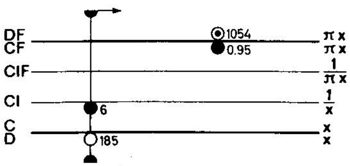


Abb. 23

$185 \cdot 6 \cdot 0{,}95 = 1054$

Überschlag $200 \cdot 6 \cdot 1 = 1200$

Im Beispiel der Abb. 23 werden 185 auf Skala D und 6 auf Skala CI wie bei einer Division gegenübergestellt und die Multiplikation mit 0,95 auf der oberen Skala CF vorgenommen. Das Ergebnis 1054 erscheint darüber in der Skala DF.

11. Proportionen

Proportionen der Form $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \ldots$ sind mit dem Rechenstab besonders einfach und übersichtlich zu rechnen, weil mit der Einstellung eines Verhältnisses alle weiteren Relationen durch Verschieben des Läufers abgelesen werden. Die Trennungslinie zwischen der Körper- und Zungenskala bildet dabei gleichsam den Bruchstrich. Daher sollte diese Rechnungsart allgemein bevorzugt werden.

Beispiel: 9,5 kg einer Ware kosten DM 6,30, wieviel kosten 8,4 kg?
Die Lösung mit dem Dreisatz lautet:

$$\frac{6{,}30}{9{,}50} \cdot 8{,}4 = 5{,}57$$

Übersichtlicher wird der Rechengang, wenn das Verhältnis der Gewichte und Preise als Proportion aufgestellt wird. Mit der Gegenüberstellung des gegebenen Gewichtes 9,5 in Skala DF und des Preises 6,30 in Skala CF stehen sich in den Skalen CF/DF und C/D alle Gewichte und Preise gegenüber, deren Verhältnis (Quotient) gleich dem eingestellten ist. In DF und D stehen laut der ersten Einstellung alle Gewichte, in Skala CF und C die dazugehörigen Preise. Gegenüber dem Gewicht 8,4 wird demzufolge der Preis 5,57 abgelesen. Weitere Gewicht-Preis-Relationen sind in der Abbildung eingezeichnet.

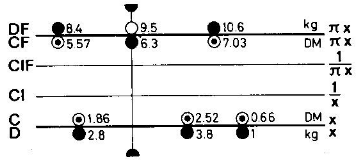


Abb. 24 Proportionen

10,6 kg kosten DM 7,03 (in Skala CF/DF)
3,8 kg kosten DM 2,52 (in Skala C/D)
2,8 kg kosten DM 1,86 (in Skala C/D)
1 kg kostet DM 0,66 (in Skala C/D)

Die Proportion kann also beliebig fortgesetzt werden:

$$\frac{\text{kg}}{\text{DM}} = \frac{9{,}5}{6{,}3} = \frac{8{,}4}{5{,}57} = \frac{10{,}6}{7{,}03} = \frac{3{,}8}{2{,}52} = \frac{2{,}8}{1{,}86} = \frac{1}{0{,}66} = \ldots$$

Die Rechnung mit Proportionen erfolgt weitgehend unabhängig von den bisherigen Regeln. Es ist gleichgültig, wo und wie sich die kg-Werte gegenüberstehen, entscheidend ist, daß die Gewichte dort aufgesucht werden, wo das erste Gewicht eingestellt wurde und daß die Preise entsprechend auf der gegenüberliegenden Skala abgelesen werden. Im obigen Beispiel könnten 6,3 in Skala DF und 9,5 in Skala CF eingestellt werden, dann müßte auch gegenüber 8,4 in CF das Ergebnis 5,57 in DF abgelesen werden.

12. Die Skalen A, B und K

Wird der Läuferstrich auf einen beliebigen Wert x der Skala C gestellt, so kann auf der Skala B das Quadrat x^2 und auf K der Kubikwert x^3 abgelesen werden. Im umgekehrten Rechengang erhält man die zweiten bzw. dritten Wurzeln.

a) $2^2 = 4$ $\qquad 2^3 = 8$

b) $32{,}7^2 = 3{,}27^2 \cdot 10^2 = 1070$

$32{,}7^3 = 3{,}27^3 \cdot 10^3 = 35\,000$

c) $\sqrt[2]{9} = 3$ $\qquad \sqrt[3]{27} = 3$

d) $\sqrt[2]{51} = 7{,}14$ $\qquad \sqrt[3]{364} = 7{,}14$

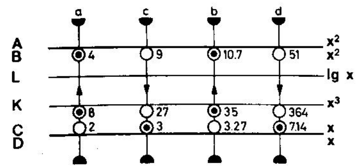


Abb. 25 Potenzen und Wurzeln

Die Stellung des Kommas erhält man am besten durch eine Überschlagsrechnung. Beim Potenzieren und Wurzelziehen ist es vorteilhaft, Zehnerpotenzen abzuspalten, um Zahlenwerte zu erhalten, deren Lösung leicht zu übersehen ist. Die Quadratskalen sind zu diesem Zweck von 1 bis 100, die Kubikskala von 1 bis 1000 beziffert. In welchem Bereich der Läufer eingestellt werden muß, ergibt sich aus dieser Bezifferung der Skalen.

Beispiele:

$\sqrt{3200} = \sqrt{32 \cdot 100} = 10 \cdot \sqrt{32} = 10 \cdot 5{,}66 = 56{,}6$ (Abspalten von 10^{2n})

$\sqrt[3]{0{,}1813} = \sqrt[3]{\frac{181{,}3}{1000}} = \frac{1}{10} \cdot \sqrt[3]{181{,}3} = \frac{1}{10} \cdot 5{,}66 = 0{,}566$ (Abspalten von 10^{3n})

12.1 Das Rechnen mit den Skalen A und B

Die Skalen A und B sind wie die Grundskalen C und D zwei identische Skalen mit dem Unterschied, daß zwei auf die Hälfte verkleinerte Grundskalen in ihnen aneinandergereiht sind. Ihr linker Bereich ist von 1 bis 10 und der rechte von 10 bis 100 beziffert. Mit diesen Skalen können demzufolge alle bisher besprochenen Aufgaben in gleicher Weise gelöst werden, allerdings mit etwas geringerer Genauigkeit, da für ihre Unterteilung nur die halbe Rechenstablänge zur Verfügung steht.

Bei vielen Aufgaben ist es bequem, auf der Quadratskala weiterrechnen zu können, wenn mit einer Quadrierung begonnen wurde.

13. Die pythagoreische Skala P

In einem rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenuse 1 gilt nach dem Satz des Pythagoras die Beziehung

$$y = \sqrt{1 - x^2}.$$

Zu jeder Einstellung x auf der Grundskala D wird auf der Skala P der Wert $y = \sqrt{1 - x^2}$ abgelesen. Umgekehrt gilt auch $x = \sqrt{1 - y^2}$. Im Beispiel der Abb. 27 ist ersichtlich, daß 0,6 sowohl in Skala D als auch in Skala P eingestellt werden kann, das Ergebnis 0,8 steht immer in der entsprechenden Nachbarskala.

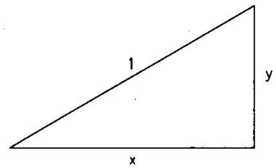


Abb. 26

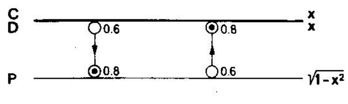


Abb. 27 $\sqrt{1 - 0{,}6^2} = 0{,}8$

Man wählt jeweils die für die Genauigkeit günstigste Ableseart. Im Beispiel $\sqrt{1 - 0{,}15^2} = 0{,}9887$ wird 0,15 auf Skala D eingestellt.

Beispiel aus der Elektrotechnik:

Scheinlast $\triangleq$ 1,0
Wirklast $\triangleq$ 0,85
Blindlast $\triangleq \sqrt{1 - 0{,}85^2} = 0{,}527$

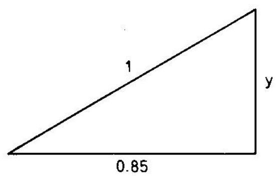


Abb. 28

Diese Art der Lösung ist jedoch nur dann einfach, wenn die Hypotenuse 1, 10 oder 100 usw. ist, insbesondere bei der Umrechnung sin ⟷ cos. Bei beliebigen rechtwinkligen Dreiecken ist die trigonometrische Lösung eleganter (siehe Kapitel 15).

Zur genaueren Ausrechnung von Quadratwurzeln bildet man z. B.

$$\sqrt{0{,}91} = \sqrt{1 - 0{,}09} = 0{,}9540$$

0,09 wird im linken Teil der Skala A eingestellt, dann steht $\sqrt{0{,}09} = 0{,}3$ in D und der Wert $\sqrt{1 - 0{,}3^2} = 0{,}9540$ in P. Eine Genauigkeitssteigerung ist bis herab zu ca. $\sqrt{0{,}65}$ gewährleistet. Diese Rechnung ist immer dann zweckmäßig, wenn der Radikand nur wenig kleiner als 0,01; 1; 100 usw. ist.

14. Die trigonometrischen Funktionen

Alle Winkelfunktionen sind auf die Grundskala D bezogen, und die Winkel sind in 360°-Teilung mit dezimaler Unterteilung angegeben.

Zu jeder Einstellung eines Winkels in der Skala S, T oder ST wird die zugehörige Winkelfunktion in D abgelesen. In der umgekehrten Richtung wird zu jedem in Skala D eingestellten Funktionswert der Winkel in den entsprechenden Winkelskalen gefunden.

Der Rechenstab gibt nur die Funktionswerte für Winkel im ersten Quadranten. Zur Reduktion beliebiger Winkel auf den ersten Quadranten sind die Beziehungen der Winkelfunktionen in einer Tabelle zusammengestellt.

	$\pm\alpha$	$90° \pm \alpha$	$180° \pm \alpha$	$270° \pm \alpha$
sin	$\pm \sin\alpha$	$+ \cos\alpha$	$\mp \sin\alpha$	$- \cos\alpha$
cos	$+ \cos\alpha$	$\mp \sin\alpha$	$- \cos\alpha$	$\pm \sin\alpha$
tan	$\pm \tan\alpha$	$\mp \cot\alpha$	$\pm \tan\alpha$	$\mp \cot\alpha$
cot	$\pm \cot\alpha$	$\mp \tan\alpha$	$\pm \cot\alpha$	$\mp \tan\alpha$

14.1 Die Sinusskala S

Die Skala S ist für Sinuswerte von 5,5° bis 90° und rücklaufend für Kosinuswerte von 0° bis 84,5° rot beziffert. Alle auf der Skala D abgelesenen Sinus- oder Kosinuswerte beginnen mit 0, . . .

Die Sinuswerte der Winkel $\alpha > 45°$ sind nach der Beziehung $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$ in der rot bezifferten Skala P genauer abzulesen; zum Einstellen des Winkels werden die roten Ziffern der Skala S benutzt. Farbregel für Sinusfunktionen: Stets gleichfarbig bezifferte Skalen einstellen und ablesen.

Wegen $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$ gelten für die Kosinuswerte der Winkel $\alpha < 45°$ analoge Verhältnisse mit der Farbregel: Zu jeder Einstellung in Skala S gehört die andersfarbig bezifferte Ablesung in Skala D oder P.

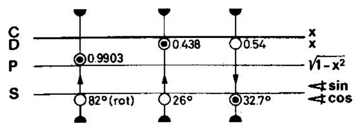


Abb. 29 Sinus

$\sin 26° = 0{,}438$

$\sin 82° = \sqrt{1 - \cos^2 82°} = 0{,}9903$

$\text{arc} \sin 0{,}54 = 32{,}7°$

$\cos 75° = 0{,}2588$

$\cos 7° = \sqrt{1 - \sin^2 7°} = 0{,}99255$

$\text{arc} \cos 0{,}9852 = 9{,}87°$

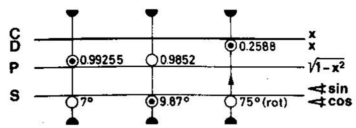


Abb. 30 Kosinus

14.6 Tabelle zum Einstellen und Ablesen der Winkelfunktionen in Skala S und T

Funktion	Winkelbereich	Einstellen des Winkels	Funktionswerte	
			Ablesen in Skala	Bereich
sin	5,7° – 90°	α	C	0,1 bis 1,0
cos	0° – 84,3°	90° – α	C	1,0 bis 0,1
tan	5,7° – 45°	α	C	0,1 bis 1,0
	45° – 84,3°	α (rote Ziff.). bzw. (90° – α) (schw. Ziffern)	CI	1 bis 10
cot	5,7° – 45°	α	CI	1 bis 10
	45° – 84,3°	α (rote Ziff.). bzw. (90° – α) (schw. Ziffern)	C	0,1 bis 1

14.7 ARISTO-Studio 400^g

Die trigonometrischen Skalen S, T und ST sind beim ARISTO-Studio 0968/400^g in Neugrad angegeben. Das Rechnen mit den Winkelskalen erfolgt in derselben Weise wie in den Kapiteln 14 bis 14.6 beschrieben. Die aufgeführten Beispiele und die angegebenen Beziehungen ändern sich, da der rechte Winkel 100^g beträgt. Zur Berechnung der Kofunktionen ist zu beachten:

$$\cos\alpha = \sin(100^g - \alpha)$$

$$\cot\alpha = \tan(100^g - \alpha) = \frac{1}{\tan\alpha}$$

Für die 400^g-Teilung werden anschließend die Beispiele der Kapitel 14.1 bis 14.5 berechnet.

14.7.1

$\sin 26^g = 0{,}397$

$\sin 82^g = \sqrt{1-\cos^2 82^g} = 0{,}9063$

$\operatorname{arc}\sin 0{,}54 = 36{,}3^g$

$\cos 75^g = 0{,}383$

$\cos 7^g = \sqrt{1-\sin^2 7^g} = 0{,}99396$

$\operatorname{arc}\cos 0{,}9852 = 10{,}97^g$

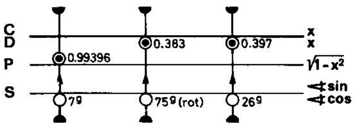


Abb. 34 Sinus und Kosinus

14.7.2

$\tan 14^g = 0{,}2235$

$\tan 80^g = 3{,}078$

$\tan 80^g = \cot 20^g = 3{,}078$

$\operatorname{arc}\tan 1{,}75 = 66{,}95^g$

$\cot 77^g = 0{,}378$

$\operatorname{arc}\cot 2{,}0 = 87{,}44^g$

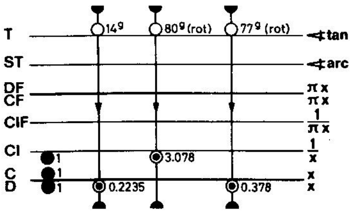


Abb. 35 Tangens und Kotangens

14.7.3 $\sin\alpha \approx \tan\alpha \approx \cos(100^g - \alpha) \approx \cot(100^g-\alpha) \approx \frac{\pi}{200^g}\alpha^g = 0{,}01571\,\alpha$

Für große Winkel von sin und kleine Winkel von cos wird die Näherung mit dem Anfang einer Reihenentwicklung gefunden.

$$\text{z. B. } \cos 2^g = 1 - \frac{0{,}03142^2}{2} = 1 - 0{,}000494 = 0{,}999506$$

14.7.4 Die Skala ST ist beim ARISTO-Studio 400^g eine um $\frac{\pi}{200}$ versetzte Grundskala. Die Eins dieser Skala ist die Einstellmarke für $\pi/200$.

a) $0{,}1^g = 0{,}001571$ rad b) $10^g = 0{,}1571$ rad

c) $0{,}5^g = 0{,}007854$ rad d) $5^g = 0{,}07854$ rad

14.7.5 Die Ziffernfolge der ϱ-Marke ist wegen der dezimalen Neugradunterteilung für Neugrad, Neuminuten und Neusekunden gleich:

$$\varrho^g = 63{,}66 = \frac{200}{\pi}$$

$$\varrho^c = 6366$$

$$\varrho^{cc} = 636600$$

15. Die trigonometrische Berechnung ebener Dreiecke

Der Sinussatz ist ein Musterbeispiel für die Anwendung der Proportionsrechnung auf dem Rechenstab.

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

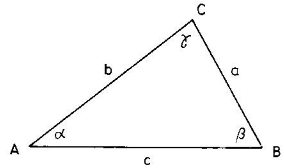


Abb. 36

Mit der Einstellung eines dieser Verhältnisse durch Gegenüberstellung der Strecke auf Skala C und des gegenüberliegenden Winkels auf Skala S bzw. ST sind auch die übrigen Verhältnisse eingestellt, so daß zu jeder Seite der zugehörige Winkel und umgekehrt zu jedem Winkel die gegenüberliegende Seite abgelesen werden kann.

Am häufigsten kommt in der Praxis die Berechnung rechtwinkliger Dreiecke vor. In diesem Sonderfall ist $\gamma = 90°$ und damit $\sin\gamma = 1$, sowie $\alpha = 90° - \beta$ und $\beta = 90° - \alpha$. Der Sinussatz erhält dann die Form:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{1} = \frac{a}{\cos\beta} = \frac{b}{\cos\alpha}$$

Ferner ist: $\tan\alpha = \frac{a}{b}$

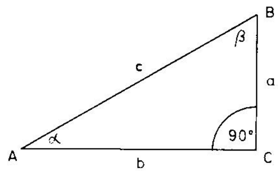


Abb. 37

Je nach den gegebenen Stücken kommen zwei grundsätzliche Rechenoperationen vor:

1. Gegeben sind zwei beliebige Stücke (außer Fall 2).
2. Gegeben sind die Katheten a und b.

Beispiel zu 1:

Gegeben: $c = 5$, $a = 3$

Gesucht: α, β, b

Man beachte: $\beta = 90° - \alpha$

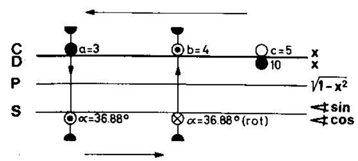


Abb. 38 Die Hypothenuse ist gegeben

Beispiele:		Ablesung auf Skala
$3{,}2^{2,5}$	$= 18{,}3$	LL3
$3{,}2^{0,25}$	$= 1{,}338$	LL2
$3{,}2^{0,025}$	$= 1{,}0295$	LL1
$3{,}2^{-2,5}$	$= 0{,}0546$	LL03
$3{,}2^{-0,25}$	$= 0{,}7476$	LL02
$3{,}2^{-0,025}$	$= 0{,}97134$	LL01
$3{,}2^{3,1}$	$= 36{,}8$	LL3
$3{,}2^{0,36}$	$= 1{,}52$	LL2

Ableseregeln für $y = a^x$

a) Bei positiven Exponenten x liegen Einstellung und Ergebnis in der gleichen Skalengruppe LL1—LL3 oder LL01—LL03, man bleibt also bei der gleichen Farbe der Bezifferung.

Bei negativen Exponenten x muß man von einer Skalengruppe zur anderen wechseln (Farbenwechsel).

b) Analog zur Beschriftung der Skalen am rechten Rechenstabende erfolgt die Ablesung auf der niedriger bezifferten Nachbarskala LL, wenn bei der Variation der Exponenten das Komma um eine Stelle nach links rückt (vergleiche Beispiele in Abb. 43).

c) Wird die Basis mit dem rechten Zungenende eingestellt, werden alle Ablesungen auf der höher bezifferten Nachbarskala vorgenommen (Abb. 46).

Für $0 < a < 1$ findet man die Potenzen mit positiven Exponenten in der Skalengruppe LL01—LL03 und mit negativen Exponenten in der Skalengruppe LL1—LL3.

Beispiele:

$0{,}85^{3,25} = 0{,}5896$
$0{,}85^{-3,25} = 1{,}696$ } siehe Abb. 44

$1{,}46^{2,7} = 2{,}78$
$1{,}46^{-2,7} = 0{,}36$
$0{,}685^{2,7} = 0{,}36$
$0{,}685^{-2,7} = 2{,}78$ } siehe Abb. 45 oder Abb. 46

Für diese Beispiele sind zwei Lösungen möglich, entweder wird der Zungenanfang oder das Zungenende über die Basis gestellt.

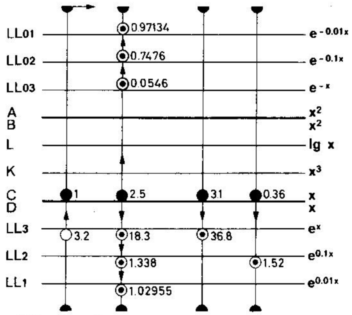


Abb. 43 Potenzen

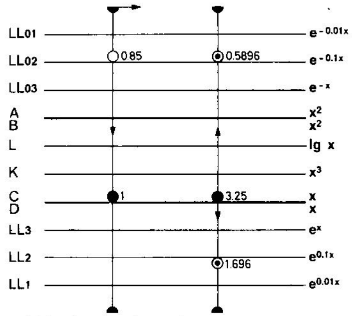


Abb. 44 Basis < 1

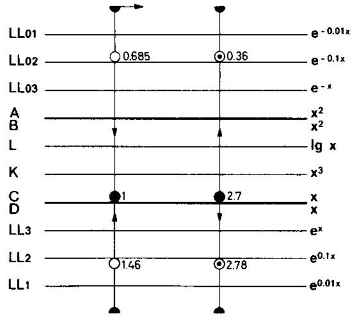


Abb. 45 Anfang von C über der Basis

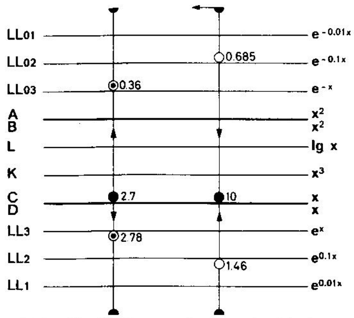


Abb. 46 Ende von C über der Basis

16.3 Sonderfälle von $y = a^x$

Die Möglichkeiten, den Exponenten und die Basis zu variieren, sind durch den Bereich der Exponentialskalen begrenzt.

16.3.1 $y < 100000$ und $y < 0{,}00001$

Reicht das Ergebnis einer Potenz über den Bereich der Exponentialskalen hinaus, muß der Exponent in Summanden und somit die Potenz in Faktoren zerlegt werden.

Beispiel:

$$3{,}14^{19} = 3{,}14^{6+6+7} = (3{,}14^6)^2 \cdot 3{,}14^7 = 0{,}96^2 \cdot 10^6 \cdot 3 \cdot 10^3 = 2{,}76 \cdot 10^9$$

Für negative Exponenten gilt selbstverständlich derselbe Lösungsweg.

16.3.2 $0{,}99 < y < 1{,}01$

Ist infolge eines kleinen Exponenten der Wert einer Potenz kleiner als 1,01, aber größer als 0,99, so kann das Ergebnis nicht der LL-Skala entnommen werden.

Die Reihenentwicklung

$$a^{\pm x} = 1 \pm \frac{x}{1!} \ln a + \frac{x^2}{2!} \ln^2 a \pm \frac{x^3}{3!} \ln^3 a + \cdots$$

gibt für diese Fälle eine Näherungslösung:

$$a^{\pm x} \approx 1 \pm x \cdot \ln a \qquad \text{für } |x \cdot \ln a| \ll 1$$

Wenn die 1 der Skala C mit Hilfe des Läufers über die Basis a in Skala LL gestellt wird, steht sie auch über dem Wert ln a in Skala D (vgl. Ziff. 16.4 und 16.6), und eine Multiplikation mit x durch Verschieben des Läufers über Skala C ergibt in Skala D die Ablesung $x \cdot \ln a$. Wird dieser Zwischenwert zu 1 addiert oder von 1 subtrahiert, erhält man den gesuchten Potenzwert $a^{\pm x}$. Je kleiner der Exponent, desto genauer wird das Ergebnis dieser Rechenmethode.

Beispiel:

$3{,}2^{0,0025} \approx 1 + 0{,}0025 \cdot \ln 3{,}2$ (Als Fortsetzung des Beispiels $3{,}2^x$)
$\approx 1 + 0{,}002908 = 1{,}002908$
$3{,}2^{-0,0025} \approx 1 - 0{,}002908 = 0{,}997092$

Wird der Exponent im gleichen Sinne durch Verschieben des Kommas weiter verkleinert, so ändert sich im Ergebnis nur noch die Anzahl der Nullen oder Neunen hinter dem Komma.

$$3{,}2^{0,00025} = 1{,}0002908$$

16.3.3 $0{,}99 < a < 1{,}01$

Wenn in der Potenz $y = a^x$ die Basis größer als 0,99, aber kleiner als 1,01 ist, hilft eine ähnliche Näherungslösung.

Nach der vorherigen Reihenentwicklung gilt $a^{\pm x} \approx 1 \pm x \cdot \ln a$. Da a nahezu 1 ist, kann man schreiben: $a = 1 \pm n$. Damit gilt:

$$a^x = (1 \pm n)^x \approx 1 + x \cdot \ln (1 \pm n)$$

$$\ln (1 \pm n) = \pm n - \frac{n^2}{2} \pm \frac{n^3}{3} - \cdots$$

$$\ln (1 \pm n) \approx \pm n \qquad (\text{für } |n| \ll 1)$$
$$(1 \pm n)^x \approx 1 \pm n x \; (\text{für } |nx| \ll 1)$$
$$(1 \pm n)^{-x} \approx 1 \mp n x \; (\text{für } |nx| \ll 1)$$

Rechengang:

a) Einstellung des Läufers auf den Basiswert a in Skala LL.

b) Zungenanfang oder -ende unter den Läuferstrich stellen.

c) Einstellung des Numerus y auf der LL-Skala mit dem Läuferstrich.

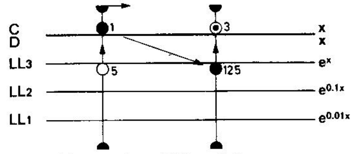


Abb. 48 $\log_5 125 = 3{,}0$

d) Ablesung des Logarithmus unter dem Läuferstrich in Skala C.

Die Stellung des Kommas erhält man aus der Beziehung: $\log_a a = 1$

Stellt man den Zungenanfang über die Basis a, dann sind die Logarithmen rechts vom Wert a größer als 1 und links davon kleiner als 1.

Ableseregel:

a) Jeder Übergang zur benachbarten LL-Skala — in der Reihenfolge LL3, LL2, LL1 oder LL03, LL02, LL01 — bewirkt für den Logarithmus eine Verschiebung des Kommas um eine Stelle nach links, in der umgekehrten Reihenfolge nach rechts.

b) Die Logarithmen werden positiv (negativ), wenn der Numerus und die Basis auf gleichfarbigen (ungleichfarbigen) LL-Skalen eingestellt werden.

Übungsbeispiele:

$$\log_2 16 = 4{,}0$$
$$\log_2 1{,}02 = 0{,}02857$$
$$\log_2 0{,}25 = -2$$

16.6.2 Die dekadischen Logarithmen

Wird die 1 der Skala C über die Basis 10 in Skala LL3 gestellt, kann zu jedem in der LL-Skala eingestellten Numerus der dekadische Logarithmus in Skala C abgelesen werden (Abb. 49 und 50).

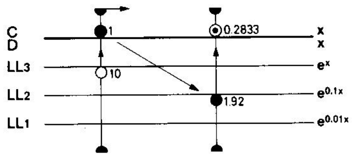


Abb. 49 $\lg 1{,}92 = 0{,}2833$

Für die oft benötigten dekadischen Logarithmen befindet sich zusätzlich auf der Zunge die übliche Skala L, die nur die Mantissen angibt, wenn der Numerus in Skala C eingestellt wird. Wie bei der Benutzung einer Logarithmentafel wird die Kennziffer des Logarithmus nach der Regel „Stellenzahl minus 1" gebildet und zur Mantisse addiert. Über jedem Wert der Skala C steht somit sein Logarithmus, und umgekehrt kann zu jedem Logarithmus der Numerus direkt abgelesen werden.

Zur Benutzung der Skala L wird nur der Läufer verschoben, damit werden die dekadischen Logarithmen mit dieser Skala einfacher als mit den LL-Skalen gefunden. Dagegen werden die Ergebnisse für den Bereich der Skala LL1 genauer abgelesen.

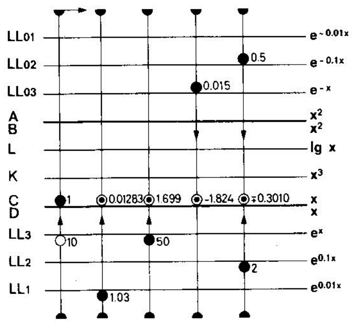


Abb. 50 Dekadische Logarithmen

Beispiel: $\lg 1{,}03 = 0.01283$ mit der Skala LL1
$\lg 1{,}03 = 0.013$ mit der Skala L

Übungsbeispiele:

$$\log_{10} 50 = 1{,}699$$
$$\log_{10} 2 = 0{,}301$$
$$\log_{10} 1{,}03 = 0{,}01283$$
$$\log_{10} 0{,}015 = -1{,}824$$
$$\log_{10} 0{,}5 = -0{,}3010$$
$$\log_{10} 0{,}1 = -1$$
$$\log_{10} 6 = 0{,}778$$
$$\log_{10} 1{,}14 = 0{,}0569$$
$$\log_{10} 1{,}015 = 0{,}00647$$

Beim Einstellen mit dem Endstrich der Skala C liegen die Ablesungen alle links vom Basiswert, sie sind also < 1, z. B. $\log_{10} 9 = 0{,}954$. Logarithmen von Zahlen < 1 sind negativ.

16.6.3 Die natürlichen Logarithmen

Die natürlichen Logarithmen der Basis »e« werden einfach durch den Übergang von den Exponentialskalen zur Grundskala D gefunden (Abb. 51)

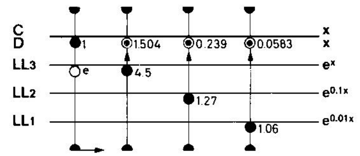


Abb. 51 $\ln 4{,}5 = 1{,}504$
$\ln 1{,}27 = 0{,}239$
$\ln 1{,}06 = 0{,}0583$

Übungsbeispiele:

$$\ln 4{,}375 = 1{,}475$$
$$\ln 0{,}622 = -0{,}475$$
$$\ln 0{,}05 = -2{,}994$$

17. Weitere Anwendungen der Exponentialskalen

Die Zunge der Exponentialseite enthält außer der Grundteilung C und der Quadratskala B die Mantissenskala L und die Kubikteilung K, so daß außer den üblichen Berechnungen von x^2, x^3, $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$ und lg x auch Potenzen der Formen $a^{\sqrt{x}}$, $a^{\sqrt[3]{x}}$, a^{10x} sowie umgekehrt Logarithmen der Formen $\log_a{}^2 x$, $\log_a{}^3 x$, $\lg \log_a x$ berechnet werden können.

Die Skala CF kann auch in Verbindung mit den Exponentialskalen benutzt werden, um das Durchschieben der Zunge bei Tabellenbildungen einzusparen.

17.1 Proportionsrechnung mit den Exponentialskalen

Wenn ein Basiswert a mit dem Anfang der Skala C auf einer LL-Skala eingestellt ist, können die Potenzwerte für beliebige Exponenten oder die Logarithmen beliebiger Zahlen für diese Basis abgelesen werden. Die auf einer LL-Skala eingestellte Basis a ist somit ein Proportionalitätsfaktor.

17.1.1 $y_1 = a^n \qquad y_2 = a^m$

$$\log y_1 = n \cdot \log a \qquad \log y_2 = m \cdot \log a$$

$$\frac{\log a}{1} = \frac{\log y_1}{n} = \frac{\log y_2}{m}$$

bzw. $$\frac{\ln a}{1} = \frac{\ln y_1}{n} = \frac{\ln y_2}{m}$$

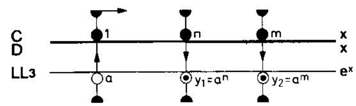


Abb. 52

Wenn drei Werte der Proportion bekannt sind, kann der vierte Wert berechnet werden, und mit der ersten Einstellung überblickt man eine Vielzahl von Proportionen. Wir haben hiermit wieder ein für das Rechnen mit dem Rechenstab günstiges Proportionsprinzip, und es kommt nur darauf an, geeignete Aufgaben in diese Proportionsform zu bringen.

17.1.2

$$y = a^{\frac{m}{n}} \rightarrow \log y = \frac{m}{n} \log a$$

$$\frac{\log y}{m} = \frac{\log a}{n}$$

$$y = 4{,}3^{\frac{6{,}8}{2{,}7}} \rightarrow \frac{\log y}{6{,}8} = \frac{\log 4{,}3}{2{,}7}$$

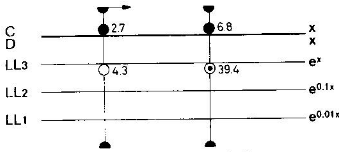


Abb. 53 $\frac{\log 4{,}3}{2{,}7} = \frac{\log 39{,}4}{6{,}8}$

Werden 4,3 auf Skala LL3 und 2,7 auf Skala C übereinandergestellt, dann kann unter 6,8 auf C das Ergebnis 39,4 auf Skala LL3 abgelesen werden.

Ebenso werden natürlich die Abwandlungen dieser Aufgabe gelöst.

$$y = \sqrt[2{,}7]{4{,}3^{6{,}8}} \quad \text{oder} \quad y^{2{,}7} = 4{,}3^{6{,}8}$$

17.1.3

Viele Naturgesetze lassen sich auf die angegebene Proportionsform bringen, wenn die Änderung (Differenz) der einen Variablen proportional der Differenz der Logarithmen der anderen Veränderlichen ist*:

$$\log y_2 - \log y_1 = \text{const}\,(x_2 - x_1)$$

Da außerdem gilt $\quad \log a - \log b = \log \frac{a}{b}$,

läßt sich diese Gleichung umschreiben:

$$\log \frac{y_2}{y_1} = \text{const}\,(x_2 - x_1)$$

Eine Änderung von x_1 auf x_2 um das Intervall i hat eine Änderung von y_1 auf y_2 zur Folge.

Bezeichnet man das Verhältnis $\frac{y_2}{y_1}$ mit r, das ist die Restzahl, die den Rest vom ursprünglichen Ganzen angibt, dann lautet die obige Gleichung:

$$\frac{\log r}{i} = \text{const} = \frac{\log r_1}{i_1} = \frac{\log r_2}{i_2} = \cdots$$

Beispiel: Radioaktiver Zerfall.
Ein Stoff zerfalle in 30 Tagen zu 40%, es verbleiben 60% als Rest.
Wann sind noch 20% vorhanden?

*) Vergleiche:

Ruppert, W: Über die Druckabhängigkeit der Viskosität von Schmierölen — Zeitschrift Brennstoffchemie Nr. 15/16 Bd. 33 (1952) S. 273-278

Ruppert, W: Eine neue allgemeine Fassung einiger Naturgesetze und ihre Anwendung mit modernen Rechenstäben — Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht, Bd. 6 Heft 7 (Febr. 1954), S. 316

$i_1 = 30$
$r_1 = 0{,}6$
$r_2 = 0{,}2$

$$\frac{\log 0{,}6}{30} = \frac{\log 0{,}2}{x} \qquad x = 94{,}5 \text{ Tage}$$

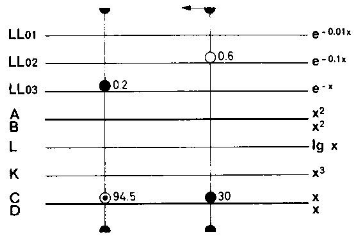


Abb. 54

17.1.4

Will man einen Logarithmus mit einer konstanten Zahl multiplizieren, so werden die Konstante auf Skala C und die Basis des Logarithmus auf Skala LL untereinandergestellt, um wieder eine Tabellenstellung für die Multiplikation der Konstanten mit Logarithmen der eingestellten Basis zu erhalten.
Für $x = c \cdot \log_a y$ wird die Proportionsform geschrieben:

$$\frac{x}{\log_a y} = \frac{c}{1} = \frac{c}{\log_a a}$$

$$2 \cdot \log_{10} 100 = 4$$

$$2 \cdot \log_{10} 1{,}8 = 0{,}511$$

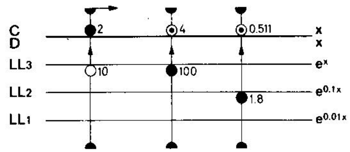


Abb. 55 $x = 2 \cdot \lg y$

Alle Logarithmen der Basis 10 können nach Abb. 55 mit dem Faktor 2 multipliziert werden, mit den LL0-Skalen auch die Logarithmen von Werten < 1.

In der Elektrotechnik ist es häufig erforderlich, die Dezibel zu einem gegebenen Spannungsverhältnis zu berechnen: $dB = 20 \cdot \lg \frac{U_1}{U_2}$.

17.2 Hyperbolische Funktionen

Die sinnvolle Anordnung der Exponentialskalen ermöglicht die verhältnismäßig einfache Bildung hyperbolischer Funktionen. Da sich die Potenzwerte mit negativen und positiven Exponenten gegenüberstehen, genügt eine Läuferstellung zur Ablesung von e^{+x} und e^{-x}, woraus sich die hyperbolischen Funktionen leicht errechnen lassen.

$$\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$$

$$\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$$

$$\tanh x = \frac{(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})}$$

18. Der Läufer und seine Marken

18.1 Die Marke 36 (nur bei Nr. 868 und 0968)

Der Läufer hat auf der Vorderseite (Abb. 56) rechts oben einen kurzen Strich, der auf den Skalen CF/DF den Wert 36 angibt, wenn der Mittelstrich über dem Anfang der Skalen C/D steht. Auf diese Weise multipliziert man mit 36, wenn man bei beliebiger Läuferstellung von C/D nach CF/DF überwechselt, dadurch bietet der Läufer bequeme Umrechnungen für:

1 Stunde $= 3600$ Sekunden

1 m/s $= 3{,}6$ km/h

$1^\circ = 3600''$

1 Jahr $= 360$ Tage

1 kWh $= 3{,}6 \cdot 10^6$ J

$\varkappa_{Al} = 36 \frac{\text{m}}{\Omega\ \text{mm}^2}$ (Leitwert)

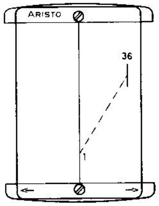


Abb. 56

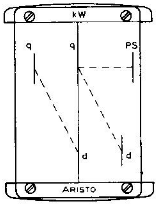


Abb. 57

18.2 Kreisflächen, Gewicht von Flußstahlstangen

Auf der Rückseite des Läufers (Abb. 57) gibt der Abstand vom Mittelstrich zum linken oberen und zum rechten unteren kurzen Strich den Faktor $\pi/4 = 0{,}785$ (bezogen auf die Quadratskalen) zur Berechnung von Querschnitten (Kreisflächen) nach der Formel $q = d^2\,\pi/4$ an. Steht der mittlere Läuferstrich über dem Durchmesser d auf Skala D, kann der Querschnitt links oben auf Skala A abgelesen werden. Die gleiche Beziehung besteht auch zwischen dem rechten unteren und dem mittleren Strich.

Da der Strichabstand gleichzeitig dem spezifischen Gewicht 7,85 g/cm³ von Flußstahl entspricht, kann — anschließend an die Querschnittsablesung am Mittelstrich — das Gewicht von Flußstahlstangen für die Längeneinheit am linken Strich abgelesen werden. Zieht man den Anfang der Zungenskala B schließlich unter diesen linken oberen Strich, so erhält man beim Verschieben des Läufers das Gewicht für jede beliebige Länge. Diese Vereinfachung entfällt bei Nr. 01068, weil infolge der doppelten Basislänge der Faktor $\pi/4$ nur einmal enthalten ist, wenn man von rechts unten nach links oben übergeht.

18.3 Die Marken kW und PS

Der Abstand zwischen dem Mittelstrich und der rechten oberen Marke gibt in den Quadratskalen den Faktor für die Umwandlung von kW in PS und umgekehrt an (s. Abb. 57).

Stellt man z. B. den Mittelstrich auf 20 kW, so gibt die obere rechte Marke 27,2 PS an. Umgekehrt liefert die Einstellung von 7 PS mit der rechten Marke am Mittelstrich 5,15 kW. Für Umrechnungen im Zollsystem gibt es einen Spezialläufer mit der Marke HP. Dieser Läufer ist unter der Bezeichnung L 0968 E erhältlich. Bei dem 50 cm langen Rechenstab Nr. 01068 steht die Bezeichnung kW an der Marke links oben. Die gleichen Umrechnungen werden mit dieser kW-Marke und der rechten PS-Marke durchgeführt.

18.4 Abnehmen des Läufers

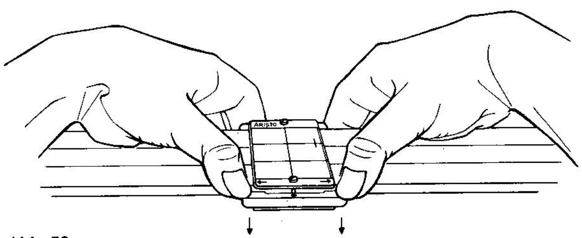


Abb. 58

Die Läuferstriche sind zum Skalenbild so justiert, daß während der Rechnung der Übergang von einer Seite des Rechenstabes zur anderen möglich ist. Der Läufer kann zum Zwecke der Reinigung abgenommen werden, ohne daß dabei die Justierung verlorengeht. Auf einer Seite sind die Läufergläser mit vier Schrauben, auf der anderen Seite mit zwei als Druckknöpfe ausgebildeten Schrauben an den Läuferstegen befestigt. Zum Abnehmen des Läufers vom Rechenstab werden die mit den Pfeilen markierten Enden des Läufersteges mit den Daumennagelspitzen nach unten gedrückt, damit sich der Druckknopf öffnet. Der obere Druckknopf öffnet sich beim Hochklappen des Läuferglases, und der Läufer kann leicht abgenommen werden.

18.5 Justieren des Läufers

Falls gelegentlich eine Justierung erforderlich ist, z. B. beim Aufsetzen eines Ersatzläufers, wird der Rechenstab so auf den Tisch gelegt, daß die Läuferseite mit den vier Schrauben oben liegt. Nach Lockerung dieser vier Schrauben mit einem passenden Schraubenzieher wird der Rechenstab umgedreht und der Läuferstrich genau über die Endstriche der Winkelteilungen gestellt. Vorsichtig wird der Rechenstab wieder gewendet, ohne den Läufer zu bewegen, und dann bei festgehaltenem Läufer das obenliegende Läuferglas nach den Endwerten 1 bzw. nach den Hilfsmarken in den LL-Skalen ausgerichtet. Danach werden die vier Schrauben wieder fest angezogen.

19. Der Normzahlen-Maßstab 1364

(nur bei Nr. 0968 und 01068)

19.1 Aufbau der Normzahlen-Skala

Normung und Typisierung sind wichtige Faktoren jeder rationellen Fertigung geworden; damit erlangen die Normzahlen (NZ) in der Technik immer mehr Bedeutung. Die Normzahlen nach DIN 323 sind ausgewählte Werte einer geometrischen Reihe, die auf das dekadische Zahlensystem zugeschnitten sind. Die Zusammenhänge werden beim Betrachten der logarithmischen Teilung D und der dazugehörigen Mantissenskala L sehr deutlich.

Gegenüber den gleichmäßig gestuften Mantissenwerten der Skala L stehen in Skala D die dazugehörigen Numeri. Die Normzahlen nach DIN 323 sind Abrundungen dieser Numeri.

Aus den Skalen L und D entsteht eine NZ-Skala, wenn man die D-Skala fortläßt und die Normzahlen an die entsprechenden Teilstriche der vereinfachten Mantissenskala anschreibt.

Den zehn bezifferten Teilstrichen der oberen Mantissenteilung stehen die Normzahlen der Reihe R 10 gegenüber. Die Aufteilung der Mantissenteilung in 20 gleiche Teile führt zu den Normzahlen der Reihe R 20 und aus 40 gleichen Intervallen wird die Reihe R 40 gebildet.

Neben dem mm-Maßstab sind die NZ-Werte zusätzlich markiert, und zwar die Reihe: R 10 mit Pfeilspitzen, R 20 mit Strichen und R 40 mit Punkten. Damit können NZ-Werte in Zeichnungen abgetragen werden.

19.2 Zweck der NZ-Skala

In erster Linie soll die NZ-Skala eine Gedächtnisstütze sein, so daß die gebräuchlichsten NZ-Werte immer zur Hand sind. Ferner sind sie praktisch für die Herstellung einfacher und doppeltlogarithmischer Netze auf gewöhnlichem kariertem Papier für übersichtliche nomographische Auswertungen. Da das Multiplizieren und Dividieren von Normzahlen mit bzw. durch Normzahlen immer wieder eine Normzahl ergibt, wird eine Netztafel aus Normzahlen zur graphischen Rechentafel.

Die Vereinigung von Normzahlen und Mantissen in einer Skala hat den Vorteil, daß logarithmische Überschlagsrechnungen sehr vereinfacht werden, denn den Normzahlen stehen in der Mantissenskala einfache Logarithmen gegenüber, die leicht im Kopf addiert oder subtrahiert werden können. Durch Hinzufügen der Kennziffern (wie beim Rechnen mit der Logarithmentafel) erhält man ein im Stellenwert richtiges Ergebnis, das um höchstens 3% ungenau ist, wenn man die Reihe R 40 in die Rechnung einschließt.

In vielen Fällen kann man sich gleichfalls der NZ-Skala bedienen, wenn man großzügig abrundet, z. B. für $\pi = 3{,}15$ oder für $\gamma = 7{,}85$ den Wert $\gamma = 8$ setzt. Die den Normzahlen entsprechenden Mantissen werden aus der über den Normzahlen liegenden Mantissenskala abgelesen. Besondere Aufmerksamkeit ist den Kennziffern zu schenken, da von diesen die Rechensicherheit wesentlich abhängt.

Bei umfangreicheren Formeln ist es vorteilhaft, die Logarithmen beim Ablesen aufzuschreiben, um die Addition nachprüfen zu können. Natürliche Zahlen kleiner als 1 (z. B. 0,8) werden oft besser durch negative Logarithmen ausgedrückt, z. B. $\lg 0{,}8 = -0{,}1$ statt $\lg 0{,}8 = 0{,}9 - 1$.

Die Teilungen L und D erlauben eine genauere logarithmische Rechnung, denn sie bilden eine dreistellige graphische Logarithmentafel.

19.3 Logarithmische Maßstäbe

Für das genauere Auftragen von logarithmischen Skalen oder Netzen befinden sich auf dem NZ-Maßstab logarithmische Teilungen der Basislängen 200 mm, 150 mm, 100 mm, 50 mm und 25 mm. Die Basislängen 125 mm und 250 mm können der Rechenstabzunge entnommen werden.

19.4 Umrechnungsfaktoren für nichtmetrische Einheiten

Beim Studium englischer und amerikanischer Fachbücher bereiten die nichtmetrischen Einheiten große Schwierigkeiten, weil die Beziehungen zum metrischen System oft mühselig in der Literatur gesucht werden müssen. Diese Sucharbeit nehmen die Tabellen des Maßstabes weitgehend ab, weil darauf die wichtigsten Umrechnungsfaktoren zusammengestellt sind. Als Grundlage diente hauptsächlich U. Stille, Messen und Rechnen in der Physik, Verlag Vieweg & Sohn.

19.5 Veröffentlichungen über Normzahlen

Berg, S.: Angewandte Normzahl, Berlin und Köln 1949.

Kienzle, O.: Normungszahlen, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1950.

Tuffentsammer, K., und P. Schumacher: Normzahlen — die einstellige Logarithmentafel des Ingenieurs. Werkstattstech. und Masch.-Bau 43 (1953), S. 156.

Tuffentsammer, K.: Das Dezilog, eine Brücke zwischen Logarithmen, Dezibel, Neper und Normzahlen. VDI-Zeitschrift 98 (1956), S.267/74.

Strahringer, W.: Zauberwelt der Normzahlen, Verlags- und Wirtschaftsgesellschaft der Elektrizitätswerke m. b. H. VWEW, Frankfurt a. M. 1952.