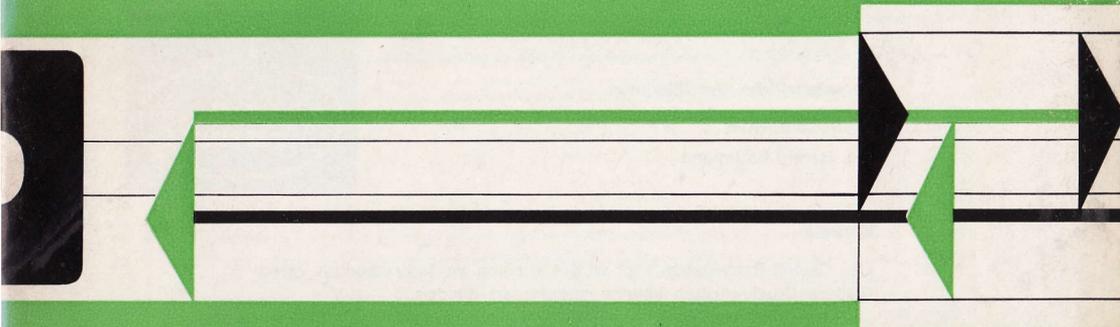




14 | '71

Rechenstab-Brief



Berichte und Anregungen für das Stabrechnen

Aus dem Inhalt

- Seite 3 Faber-Castell-Rechenstäbe im Telekolleg des Bayerischen Rundfunks
- Seite 5 Anwendungsbeispiele für die Möglichkeit, am Rechenstab Novo-Duplex 2/83 N die 4. Potenz direkt abzulesen von Dr. techn. H. Faatz, Steyr
- Seite 9 Anwendung des Faber-Castell-Rechenstabes Duplex 2/82 N bei Berechnungen zur Reaktionskinetik, insbesondere bei der „Kinetischen Spektrometrie“ im Zusammenhang mit der Impulsphotolyse von Dr. Max Klenert, Hannover
- Seite 13 Der Rechenstab in der Vektorrechnung Winkel zwischen Vektoren von Adolf Kraemer, Münster
- Seite 16 Addition auf dem logarithmischen Rechenstab von Studienrat J. J. Fuchs, Nürnberg
- Seite 19 Subtraktion auf dem logarithmischen Rechenstab von Studienrat J. J. Fuchs, Nürnberg
- Seite 22 Grundanwendung des Funktionenschiebers 1080 nach Dr. Th. Marzani, Villach

Verantwortliche Schriftleitung:

Dr. Peter Pirchan
Ing. Harald Bachmann



Hinweis:

Der Castell-Rechenstab-Brief wird kostenlos an Interessenten verschickt.
Weitere Druckschriften können angefordert werden.

Copyright 1971 by A. W. FABER-CASTELL, Stein bei Nürnberg

Wichtiger Hinweis!

FABER-CASTELL-Rechenstäbe im TELEKOLLEG des Bayerischen Rundfunks

Ab Januar 1971 wird eine Fernsehsendung „Praktische Mathematik“ ausgestrahlt.

In den Sendungen 3 - 6 wird unser

Castell-Schul-D-Stab Nr. 52/82

als Lehrgerät verwendet. In zwei Ansagen des TELEKOLLEGS ist die Anschaffung dieses Rechenstabes den Kursteilnehmern empfohlen worden.

Wir verweisen auf das

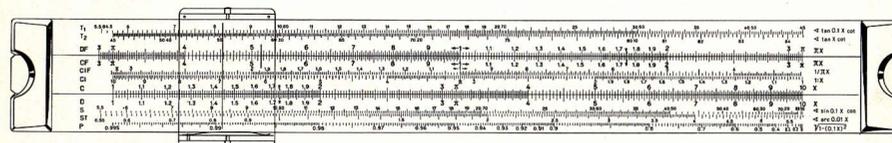
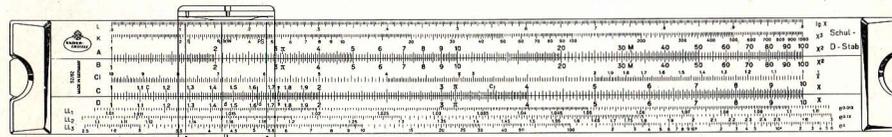
STUDIENPROGRAMM des Bayerischen Fernsehens

jeden Donnerstag um 19.00 Uhr, beginnend am 7.1.1971
und das

1. PROGRAMM (als Wiederholung) des Bayerischen Fernsehens

jeden Samstag um 14.10 Uhr, beginnend am 9.1.1971.

Der **Schul-D-Stab Nr. 52/82** ist ein hochwertiges Schulmodell. Bei ihm sind die π -versetzten Skalen mit dem System Rietz, mit einer zusätzlichen zweiten Tangensskala und drei Exponentialskalen vereinigt.

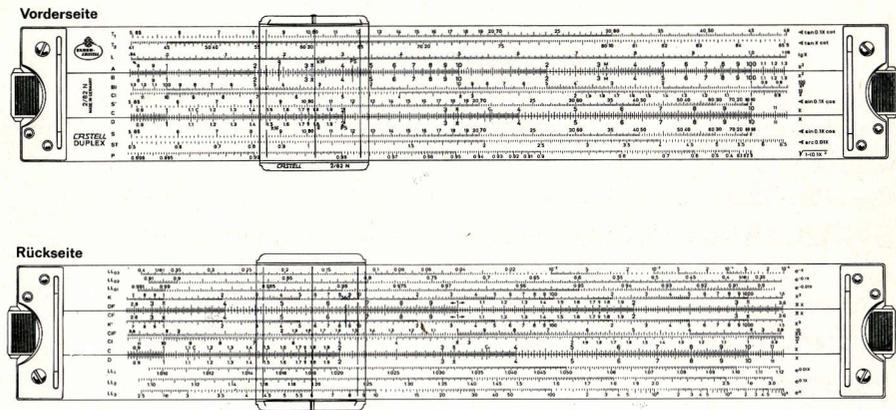


Der **Schul-D-Stab** hat sich an Gymnasien, Realschulen und Berufsschulen außerordentlich bewährt und viele Freunde gewonnen. Besonders auch für die Erwachsenenfortbildung (TELEKOLLEG) ist er hervorragend geeignet.

Als weitergehendes Modell, welches sich im Aufbau an den Schul-D-Stab anschließt und ebenfalls für die Fernsehreihe des TELEKOLLEGS geeignet ist, empfehlen wir unseren

Castell-Duplex Nr. 2/82 N

Der **Castell-Duplex Nr. 2/82 N** ist das Modell für den Ingenieur und Techniker und für die Studenten der Ingenieurakademien, Fachoberschulen und Technischen Universitäten.



Auf der Vorderseite trägt der **Castell-Duplex** ein sehr übersichtliches Skalenbild mit den wichtigsten festen trigonometrischen Skalen, dem Hauptskalenpaar C/D und dem Quadratskalenpaar A/B, einer beweglichen Sinusskala und weiteren Skalen (s. Abbildung).

Auf der Rückseite sind sechs Exponentialskalen vereinigt mit dem modernen Skalensystem der versetzten Skalen, einer beweglichen und festen Kubenskala und weiteren Skalen.

Zum **Castell-Duplex** gibt es ein ausführliches Lehrbuch von S. Petry „**Stabrechnen mit Novo-Duplex 2/83 N und Duplex 2/82 N**“ im Lindauer-Verlag, München.

Wünschen Sie weitere Auskünfte, so schreiben Sie bitte an uns.

Anwendungsbeispiele für die Möglichkeit, am Rechenstab NOVO-DUPLEX 2/83 N die 4. Potenz direkt abzulesen

von Dr. techn. H. Faatz, Steyr

Wie bereits im Rechenstabbrief Nr. 13 (Aussatz von Dr. F. Heywang, Seite 3) erwähnt, bietet der Novo-Duplex 2/83 N die Möglichkeit, durch Übergang von den W-Skalen bzw. W'-Skalen zu den Skalen A bzw. B die 4. Potenz direkt zu bestimmen und eventuell damit weiterzurechnen. Dieser Vorgang wird in der Ingenieurpraxis keineswegs so selten benötigt, wie es den Anschein haben mag, sondern stellt für den Ingenieur oft eine wirkliche Erleichterung und Verkürzung mancher Rechenvorgänge dar. Im folgenden werden hierfür verschiedene Anwendungsbeispiele aus der Praxis aufgezeigt, die sich gewiß noch durch weitere ergänzen lassen.

1. Flächenträgheitsmomente

Die Berechnung des polaren (Flächen-) Trägheitsmomentes eines Kreisquerschnittes wurde bereits im oben zitierten Aufsatz unter (2) aufgezeigt. Auf prinzipiell gleiche Weise können selbstverständlich auch die sehr oft benötigten axialen Trägheitsmomente verschiedener technisch wichtiger Flächen berechnet werden.

Nachstehend einige Beispiele:

Kreis (Radius R, Durchmesser D)

$$I_x = R^4 \cdot \frac{\pi}{4} = D^4 \cdot \frac{\pi}{64}$$

Halbkreis (I_x um Schwerachse parallel zum ϕ)

$$I_x = R^4 \cdot 0,1098$$

Quadrat (Seite a; I_x bzgl. jeder beliebigen Schwerachse)

$$I_x = a^4 : 12$$

regelm. Sechseck (Seite = Umkreisradius = R)

$$I_x = R^4 \cdot 0,5413$$

regelm. Achteck (Umkreisradius R)

$$I_x = R^4 \cdot 0,6381$$

Ellipse (Halbachsen a, b; Achsenverhältnis $a : b = k \geq 1$, I_x um kleine Achse)

$$I_x = a^4 \cdot \frac{0,7854}{k}$$

Rechteck (Seitenverhältnis $h : b = k \geq 1$, I_x um Schwerachse parallel b)

$$I_x = h^4 \cdot \frac{0,08333}{k}$$

2. Dynamisches (Massen-) Trägheitsmoment eines beliebigen Rotationskörpers

Für einen solchen Körper, dessen Profil gemäß Abb. 1 gegeben sei, gilt bekanntlich

$$J_x = \frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \pi \cdot \int r^4 \cdot dx;$$

ist die Funktion $r = r(x)$ nicht analytisch gegeben und einfach integrierbar, so zeichnet man über x die Kurve r^4 , die mittels eines gewöhnlichen Planimeters ausgewertet wird. Die Berechnung der oft zahlreichen Werte für r^4 ist mit Benützung des Läufers allein sehr bequem möglich. Eine nähere Erläuterung dieses Vorganges erscheint unnötig.

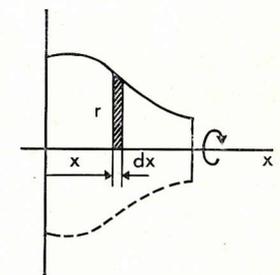


Abb. 1

3. Massenträgheitsmoment eines aus zylindrischen Teilen zusammengesetzten Rotationskörpers

Rotationskörper

Diese Aufgabe tritt in der Ingenieurpraxis besonders häufig auf, weil das Massenträgheitsmoment sowohl zur Berechnung der rotatorischen Bewegungsenergie als auch zur Berechnung der Eigen-Drehschwingungsfrequenzen erforderlich ist.

Für einen Zylinder lautet die Formel für das Massenträgheits-

$$\text{moment bezüglich seiner Achse } J = (r^4 \cdot b) \cdot \frac{\pi \cdot \gamma}{2g}$$

(siehe Abb. 2). Für Zylinder aus Stahl mit $\gamma = 7,85 \text{ kp/dm}^3$ ergeben sich daraus die Zahlenwertgleichungen

$$J \text{ (kp} \cdot \text{cm} \cdot \text{sek}^2) = \frac{r^4 \text{ (cm}^4) \cdot b \text{ (cm)}}{8,13 \cdot 10^4} = \frac{d^4 \text{ (cm}^4) \cdot b \text{ (cm)}}{1,3 \cdot 10^6}$$

Bei spezifisch leichtem Werkstoff sind die Konstanten im Nenner entsprechend dem Verhältnis der spezifischen Gewichte zu vergrößern. Der Rechengang verläuft analog dem Beispiel (2) im eingangs zitierten Aufsatz. Bei einem kegelförmigen Körper aus Stahl wäre in den obigen Formeln anstelle von b die Höhe h des Kegels einzusetzen; die entsprechenden Konstanten im Nenner betragen in diesem Fall $39,8 \cdot 10^4$ bzw. $6,37 \cdot 10^6$.

4. Berechnung der Reibungsverlustrhöhe h_r (m Flüss.-Säule) für einen Rohrstrang, bestehend aus Rohren verschiedener Durchmesser.

Für ein einzelnes Rohrstück lautet die entsprechende Formel $h_r = \frac{v_1^2 \cdot \lambda L_i}{2g \cdot d_i}$

Dabei bedeutet λ den i. a. für alle Teile gleichen, dimensionslosen Reibungsbeiwert, g die Erdbeschleunigung (m/sek^2), d_i bzw. L_i die in (m) einzusetzenden Durchmesser beziehungsweise Längen, v_1, v_2, \dots, v_i die Geschwindigkeiten in den einzelnen Rohrstücken (m/sek).

Da zwischen den Geschwindigkeiten aus „Kontinuitätsgründen“ die Beziehung $v_i \cdot d_i^2 = \text{konst}$ besteht, wird für den ganzen Rohrstrang

$$h_{r \text{ ges}} = v_1^2 \cdot \frac{\lambda}{2g} \cdot \left[\frac{L_1}{d_1} + \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4 \cdot \frac{L_2}{d_2} + \left(\frac{d_1}{d_3}\right)^4 \cdot \frac{L_3}{d_3} + \dots \right]$$

Die Glieder mit den 4. Potenzen in den Klammern können sehr bequem ausgewertet werden. Zum Beispiel: $d_1 = 0,042 \text{ m}$

$$d_2 = 0,053 \text{ m}, L_2 = 6,8 \text{ m}$$

Läufer auf W_2 42, W_2' 53 unter den Läufer, Läufer auf W_2' 10; B 53 unter den Läufer,

Läufer auf B 68, Ergebnis $\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4 \frac{L_2}{d_2} = 50,6$ auf A.

5. Drehfederkonstante einer abgesetzten Welle

Diese wird sehr oft benötigt. Einerseits dient sie zur Feststellung des bei einem gegebenen Torsionsmoment entstehenden Verdrehwinkels, andererseits zur Berechnung der Drehschwingungs-Eigenfrequenzen.

Die Drehfederkonstante eines einzelnen Wellenstückes (Abb. 3) beträgt

$$c_1 = \frac{G \cdot J_{p1}}{L_1} = \frac{G \cdot \pi}{32} \cdot \frac{d_1^4}{L_1}$$

c_1 (kp · cm/rad), G (kp/cm²)
Gleitmodul, d_i (cm), L_i (cm).

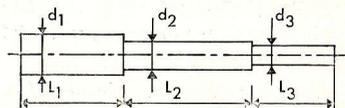


Abb. 3

Die gesamte Federkonstante, die sich durch Hintereinanderschaltung ergibt, beträgt

$$c_{\text{res}} = \frac{1}{\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \dots} = \frac{G \cdot \pi}{32} \cdot \frac{d_1^4}{\left[L_1 + L_2 \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4 + L_3 \left(\frac{d_1}{d_3}\right)^4 + \dots \right]}$$

Die einzelnen Summanden der Klammer lassen sich auf nunmehr schon bekannte Weise sehr einfach berechnen.

6. Verfahren der graphischen Ermittlung der Biegelinie nach „Mohr“.

Im Rahmen dieses sehr oft benötigten Verfahrens, das jedem Ingenieur bekannt ist und auf das natürlich hier nicht näher eingegangen werden kann, geht es unter anderem darum, das Momentendiagramm einer meist mehrfach abgesetzten Welle entsprechend den verschiedenen Trägheitsmomenten (die sich wie die 4. Potenzen der Durchmesser verhalten!) auf beispielsweise den ersten Durchmesser zu „reduzieren“.

Die Abb. 4 zeigt eine solche Welle mit Belastung sowie das Momentendiagramm und das „reduzierte“ Momentendiagramm. Die dabei auszuführenden Rechenoperationen sind im Prinzip die gleichen, wie die unter 5. und gehen aus der Abbildung hervor.

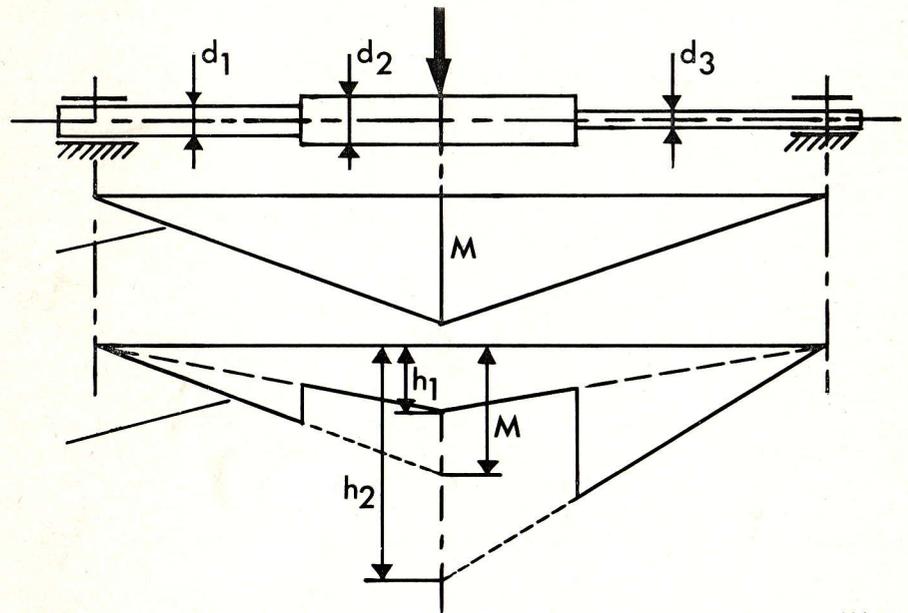


Abb. 4

$$h_1 = M \cdot \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4 \quad \text{Mom.-Diagramm}$$

$$h_2 = M \cdot \left(\frac{d_1}{d_3}\right)^4 \quad \text{„reduziertes“ Mom.-Diagramm}$$

7. Direktes Ziehen der 4. Wurzel

Auch diese Möglichkeit bietet sich beim Novo-Duplex 2/83 N, wenn auch hierzu die Notwendigkeit vielleicht seltener gegeben sein dürfte. Trotzdem wird sie doch gelegentlich als angenehm empfunden.

Wird beispielsweise eine Welle auf Durchbiegung dimensioniert, so ergibt sich bekanntlich aus dem Belastungsmoment und den elastischen Bedingungen das erforderliche axiale Trägheitsmoment I_x . Der dazu gehörige Wellendurchmesser errechnet sich dann aus der Formel

$$d = \sqrt[4]{\frac{I_x \cdot 64}{\pi}}$$

Zahlenbeispiel: $I_x = 12,5 \text{ cm}^4$
 Läufer über A 125 (linke Skalenhälfte), B π unter Läufer. Läufer auf B 64 (links),
 Ergebnis auf W_2 $d = 4,0 \text{ cm}$.

Hinsichtlich der erforderlichen Stellung des Läufers auf der linken bzw. rechten Hälfte der B-Skala vor dem Ablesen der vierten Wurzel gelten die als bekannt vorausgesetzten Regeln, die beim Ziehen der Quadratwurzel zu beachten sind. Beim obigen Beispiel ermittle man im Kopf überschlägig den Stellenwert des Radikanden (hier Hunderter), also linke Skalenhälfte. Ob Endergebnis auf W_1 oder W_2 abzulesen ist, folgt ebenfalls aus überschlägiger Kopfrechnung.

Anwendung des Faber-Castell-Rechenstabes Duplex 2/82 N bei Berechnungen zur Reaktionskinetik, insbesondere bei der „kinetischen Spektrometrie“ im Zusammenhang mit der Impulsphotolyse

von Dr. Max Klenert

Einleitung

Der Verlauf der Reaktion zwischen zwei Stoffen A und B wird durch das Differentialgleichungssystem

$$\frac{da}{dt} = \frac{db}{dt} = -k' \cdot a \cdot b, \quad a(0) = a_0, \quad b(0) = b_0$$

beschrieben (a und b = Konzentrationen der Stoffe A und B, k' = Geschwindigkeitskonstante der Reaktion). Ist $a_0 \ll b_0$, so bleibt b praktisch konstant und es liegt eine Reaktion 1. Ordnung vor, ist $a_0 = b_0$, so liegt eine Reaktion 2. Ordnung vor.

Nun möge der Stoff A in einem der Messung zugänglichen Spektralbereich absorbieren, und es gelte das Beersche Gesetz

$$E_A = \epsilon_A \cdot l \cdot a$$

(E_A = dekadische Extinktion des Stoffes A, ϵ_A = molarer dekadischer Extinktionskoeffizient des Stoffes A, l = Küvettenlänge). Bei Einführung der Extinktion E_A lautet die Lösung des Differentialgleichungssystems für den Stoff A im Falle einer Reaktion 1. Ordnung

$$\ln E_A = \ln (\epsilon_A \cdot l \cdot a_0) - k' \cdot b_0 \cdot t$$

und im Falle einer Reaktion 2. Ordnung

$$\frac{1}{E_A} = \frac{1}{\epsilon_A \cdot l \cdot a_0} + \frac{k'}{\epsilon_A \cdot l} \cdot t.$$

In E_A bzw. $1/E_A$ als Funktionen von t stellen also im jeweiligen Fall eine Gerade dar. Ermittelt man nun für die zu untersuchende Reaktion durch Extinktionsmessung $E_A(t)$ und trägt die Funktionen $\ln E_A$ und $1/E_A$ vs. t auf, so wird bei einer Reaktion 1. Ordnung im ersten Fall, bei einer Reaktion 2. Ordnung im zweiten Fall eine Gerade auftreten. Auf diese Weise wird der Reaktionstyp ermittelt. Aus der Geradensteigung folgt bei Kenntnis der Größen b_0 bzw. ϵ_A und l die Geschwindigkeitskonstante der Reaktion k' . Bei der praktischen Durchführung der Messung von $E_A(t)$ befindet sich das reagierende System in einem Absorptionsspektrometer mit einem Meßsystem genügend kurzer Einstellzeit (bis zu 10^{-6} sec herab) und oszillographischer Registrierung der Intensität des Meßstrahles.

Die beschriebene Art der Messung — die „kinetische Spektrometrie“ — findet vor allem bei der Untersuchung der Primärprozesse bei Photolyse- und Radiolysereaktionen Anwendung. Die im Absorptionsspektrometer befindliche Substanz wird hierbei von außen durch einen Lichtblitz bestrahlt oder kurzzeitig ionisierender Strahlung ausgesetzt, wodurch primär kurzlebige Reaktionsprodukte entstehen. Es handelt sich nun darum, deren Reaktionsweisen zu untersuchen.

Als Beispiel: Impulsphotolyse einer Hydrochinonlösung

Abb. 1 zeigt ein Oszillogramm des Intensitätsverlaufs des Meßstrahles bei der Impulsphotolyse einer Hydrochinonlösung. Die Bestrahlung erfolgt kurzzeitig zur Zeit $t = 0$. Das entstehende p-Hydroxyphenoxy-Radikal verursacht bei der Meßwellenlänge eine

starke Absorption des Analysenlichtes, so daß dessen Intensität von 100% auf nahezu 10% abnimmt. In dem Maße, in dem durch Reaktion die Konzentration des Radikals geringer wird, wird die Absorption schwächer und die Intensität des Meßstrahles nimmt zu.

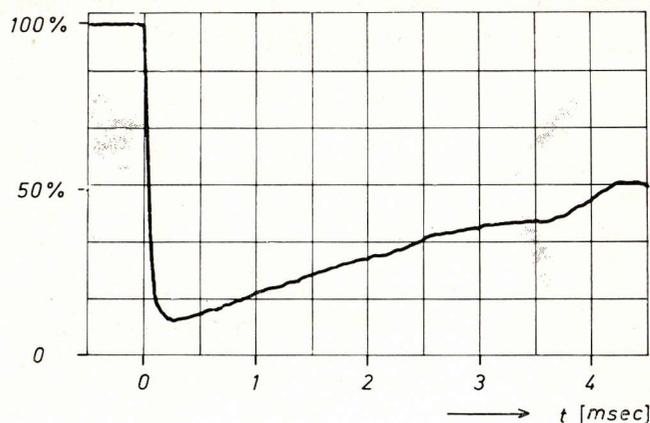


Abb. 1

Das Problem liegt darin, aus dem letzten Kurventeil Reaktionsart und Geschwindigkeitskonstante der Reaktion des p-Hydroxyphenoxy-Radikals zu ermitteln.

Auswertung der Messung

Der Zusammenhang zwischen der Intensität I des Meßstrahles und der Extinktion E ist durch die Beziehung

$$E = \log \frac{I_0}{I}$$

gegeben, wobei I_0 die Intensität vor der Reaktion ist (im Oszillogramm mit 100% bezeichnet). Da bei der Berechnung von E nur Intensitätsverhältnisse auftreten, genügt es, dem Oszillogramm die Intensitäten in Millimetern oder, wie es weiterhin geschehen soll, als Vielfache der Rasterweite zu entnehmen.

Zur numerischen Auswertung greift man verschiedene (im allgemeinen äquidistante) Zeitpunkte heraus. Hat man E dafür berechnet, so bildet man $\ln E$ und $1/E$.

Der Faber-Castell-Rechenstab „Duplex 2/82 N“ ist dadurch, daß er die Mantissenskala auf dem Stabkörper trägt und die Exponentialskalen LL_1 , LL_2 , LL_3 und deren reziproke LL_{01} , LL_{02} , LL_{03} besitzt, sehr gut für die Berechnungen geeignet. Der überwiegende Teil der allgemein gebräuchlichen Rechenschiebermodelle besitzt nicht beide Vorzüge zugleich, und man muß daher mit zwei verschiedenen Stäben arbeiten oder einen hohen Rechenaufwand in Kauf nehmen.

Im folgenden soll die Auswertung des Oszillogramms durchgeführt werden. Alle wesentlichen Werte sind in einer Tabelle zusammengestellt. Sie enthält in den ersten drei Spalten verschiedene Zeitpunkte nach der Bestrahlung, die zugehörigen Intensitäten I und die Intensität I_0 vor der Bestrahlung.

t (msec)	I	I_0	$E = \log \frac{I_0}{I}$	$\ln E$	1/E
(Rasterweite = 1)					
0,50	0,72		0,906	—0,099	1,104
0,75	0,87		0,823	—0,195	1,215
1,00	1,08		0,729	—0,316	1,372
1,25	1,22		0,676	—0,392	1,480
1,50	1,41		0,613	—0,489	1,632
1,75	1,58		0,564	—0,573	1,774
2,00	1,69	5,79	0,534	—0,628	1,873
2,25	1,83		0,500	—0,693	2,000
2,50	2,03		0,455	—0,788	2,200
2,75	2,14		0,432	—0,840	2,320
3,00	2,24		0,412	—0,887	2,430
3,25	2,32		0,397	—0,925	2,520
3,50	2,35		0,392	—0,937	2,555
3,75	2,44		0,375	—0,982	2,670

Die Berechnung der Werte I_0/I geschieht in bekannter Weise in einer einzigen*) Zungen-einstellung durch Verwendung der Grundskala D und der Reziprokskala Cl. Man stellt Cl 1 bzw. Cl 10 über D 5,79 (= I_0). Auf Cl sucht man die Werte von I auf und findet die Werte $E = \log I_0/I$ ohne Ablesung eines Zwischenergebnisses darüber auf der Mantissenskala L (Spalte 4).

Die Werte $\ln E$ und $1/E$ lassen sich leicht mit den Exponentialskalen LL_{01} bis LL_{03} und LL_1 bis LL_3 und den Grundskalen C und D ermitteln. Bei Benutzung von C bleibt die Zunge in Grundstellung.

Für Werte von $E < 1$ sucht man E auf den Skalen LL_{01} bis LL_{03} auf. Man liest $\ln E$ bis auf einen der Faktoren —0,01, —0,1 oder —1 auf der Grundskala C ab. Den richtigen Faktor findet man im Exponenten der e-Funktion, die rechts neben der Ausgangsskala angeschrieben ist. Die Werte $1/E$ stehen bei derselben Läufer-einstellung auf den Skalen LL_1 bis LL_3 . Sollten Werte von $E > 1$ auftreten, so geht man von den Skalen LL_1 bis LL_3 aus, hat für $\ln E$ auf den Skalen C oder D einen der Faktoren 0,01, 0,1 oder 1 zu berücksichtigen und findet $1/E$ auf den Skalen LL_{01} bis LL_{03} . Die Werte von $\ln E$ und $1/E$ sind in den Spalten 5 und 6 angegeben.

Abb. 2 zeigt die graphische Darstellung der Ergebnisse. Da die Funktion $1/E$ vs. t eine Gerade darstellt, liegt eine Reaktion 2. Ordnung vor. Es liegt der Schluß nahe, daß jeweils zwei p-Hydroxyphenoxy-Radikale miteinander reagieren. Ob dies endgültig richtig ist, kann natürlich erst durch weitere Experimente — z. B. Messung bei weiteren Wellenlängen — geklärt werden.

*) Vom eventuell nötigen Durchschieben der Zunge abgesehen.

Ermittlung des Typus der Reaktion
des *p*-Hydroxyphenoxy-Radikals

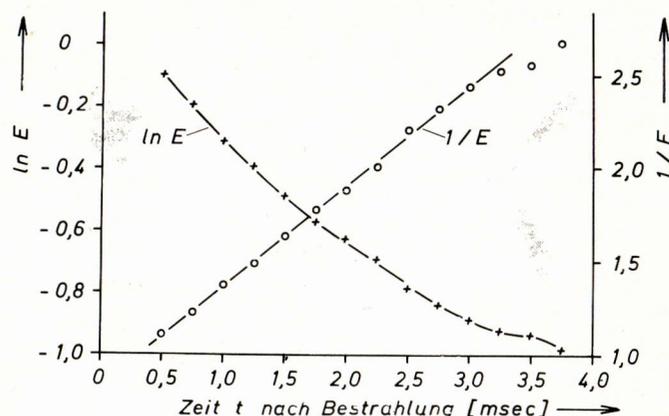


Abb. 2

Als Steigung der Geraden ermittelt man $0,54 \text{ (msec}^{-1}\text{)}$. Aus der Lösung des Differentialgleichungssystems folgt — wie aus der Einleitung ersichtlich — im Falle einer Reaktion 2. Ordnung für die Steigung der Wert $k'/\epsilon \cdot l$. Es gilt also

$$\frac{k'}{\epsilon \cdot l} = 0,54 \text{ (msec}^{-1}\text{)},$$

und bei Kenntnis von ϵ und l kann k' berechnet werden.

Die Unregelmäßigkeiten in den Kurven für $t > 3 \text{ (msec)}$ rühren von Störungen bei der Messung her.

Für den Fall, daß z. B. das Endprodukt der Reaktion bei der Meßwellenlänge absorbiert, müssen statt $\ln E$ und $1/E$ die Ausdrücke $\ln (1 - E \infty)$ und $1/(E - E \infty)$ gebildet werden ($E \infty = \text{Extinktion für } t \gg \infty$). Die Anwendung des Rechenstabes ist in diesem Fall wie vorher möglich, nur daß jetzt in der Tabelle eine weitere Spalte mit den Werten $E - E \infty$ vorzusehen ist.

Der Rechenstab in der Vektorrechnung:

Winkel zwischen Vektoren

von Adolf Kraemer, Münster

Den Winkel zwischen zwei Vektoren zu berechnen, ist eine metrische Grundaufgabe der Vektorgeometrie; sie wird vom Skalarprodukt gelöst. Nach dessen Definition gilt nämlich für zwei Vektoren \mathbf{v} , \mathbf{w} , die den Winkel φ einschließen:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v w \cos \varphi \quad (1)$$

v , w bedeuten die Beträge der beiden Vektoren, also

$$v = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}, \quad w = \sqrt{\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}}.$$

Es folgt

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \sqrt{\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}}} \quad (2)$$

Bei kartesischen Koordinaten

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 \quad (3)$$

lassen sich die Skalarprodukte leicht ermitteln, so daß die Winkelbestimmung (2) auf die Berechnung dreier Skalarprodukte, zweier Wurzeln und zweier Quotienten hinausläuft. Man wird im ersten Schritt die drei Skalarprodukte $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$, $\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}$ nach (3) ausrechnen. Im zweiten Schritt führt man die Winkelbestimmung nach (2) mit den Skalen D ($\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$), B ($\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$, $\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}$) und S oder ST (φ) aus; rechte Winkel erkennt man natürlich vorher am Verschwinden des Skalarprodukts. Der zweite Schritt erfordert drei Läufer-einstellungen.

Diese Winkelbestimmung (2) ist in Vektorräumen beliebiger Dimension möglich; (3) ist entsprechend abzuändern. Die Kosinusfunktion liefert den nichtorientierten Winkel φ (\mathbf{v}, \mathbf{w}) = φ (\mathbf{w}, \mathbf{v}) eindeutig im Bereich des gestreckten Winkels. Ist das Skalarprodukt $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ negativ, der Winkel φ also stumpf, so berechnet man zunächst den spitzen Winkel ψ , der zum Betrag des Produkts gehört, und geht hernach zum Supplementwinkel $\varphi = 180^\circ - \psi$ über.

Ein Beispiel in der Ebene soll den Rechengang zeigen. Sei $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Dann ist

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = -35$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 34, \quad \cos \psi = \frac{35}{\sqrt{34 \cdot 41}} = \cos 20,4^\circ, \quad \text{also } \varphi = 180^\circ - \psi = 159,6^\circ.$$

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{w} = 41$$

Läufer auf D 35

B 34 unter den Läufer

Läufer auf C 10

B 41 unter den Läufer

Läufer auf C 10

Ergebnis unter dem Läufer auf S: $20,4^\circ$.

Die Ablesegenauigkeit ist in diesem zusammengedrängten Ende der S-Skala nicht mehr besonders groß. Man könnte auf den Gedanken kommen, sie ließe sich durch einen

weiteren Rechenschritt mit Hilfe der pythagoreischen P-Skala verbessern. Liest man statt des letzten Rechenschritts auf D den Betrag der Winkelfunktion zu $\cos \psi = 0,937$ ab und überträgt ihn auf P, so entspricht ihm auf S allerdings der Winkel $\psi = 20,44^\circ$ mit größerer Ablesegenauigkeit. Eine ebenso mögliche Ablesung $\cos \psi = 0,938$ führt jedoch auf $\psi = 20,28^\circ$, so daß es mit der Steigerung der Rechengenauigkeit nichts ist.

Im Gegensatz zu diesem wohlbekannten „Standardverfahren“ ist ein anderer Rechengang zur Winkelbestimmung merkwürdigerweise weithin unbekannt, der zwar auf den zweidimensionalen kartesischen Vektorraum beschränkt, dort aber dem Standardverfahren (2) in zweifacher Hinsicht überlegen ist. Da die höhere Schule weitgehend Vektorgeometrie der Ebene treibt, eignet sich das Verfahren daher besonders für den Schulunterricht.

In der Ebene, die durch die kartesische Basis $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ in dieser Reihenfolge orientiert ist, geht der Vektor $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ durch Drehung um $+90^\circ$ in seinen Lotvektor („Quervektor“) $\bar{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} x-v_2 \\ \end{pmatrix}$ über. Durch Vergleich mit (1) sieht man

$$\bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{w} = v w \cos (\varphi - 90^\circ) = v w \sin \varphi,$$

wo aber jetzt φ den orientierten Winkel $\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = -\varphi(\mathbf{w}, \mathbf{v})$ bedeutet, der die \mathbf{v} -Richtung in die \mathbf{w} -Richtung dreht und der im Spielraum des Vollwinkels liegen kann. Übrigens stellt das alternierende Produkt $\bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{w} = -\bar{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{v}$ die Determinante der Vektoren \mathbf{v}, \mathbf{w} in dieser Reihenfolge dar:

$$\bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{w} = \det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix} = v_1 w_2 - v_2 w_1 \quad (4)$$

Für den nichtorientierten Winkel im Spielraum des gestreckten Winkels gilt daher

$$|\bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{w}| = |\det(\mathbf{v}, \mathbf{w})| = v w \sin \varphi \quad (5)$$

Dies ist gerade der Flächeninhalt des von \mathbf{v}, \mathbf{w} aufgespannten Parallelogramms. Division von (5) durch (1) führt nun sofort auf

$$\tan \varphi = \frac{|\bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{w}|}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}} = \frac{|v_1 w_2 - v_2 w_1|}{v_1 w_1 + v_2 w_2} \quad (6)$$

Diese Winkelbestimmung (6) erfordert die Berechnung eines Skalarprodukts, einer Determinante (gleicher Rechenaufwand) und eines Quotienten. Der erste Schritt, die Berechnung der Zählerdeterminante und des Nennerskalarprodukts, macht Zweidrittel des Rechenaufwands beim ersten Verfahren aus. Der zweite Schritt verlangt zwei Läufer-einstellungen mit den Skalen D $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$, C $(\bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{w})$ und T_1, T_2 oder ST (φ) . Der Rechenaufwand bleibt also um ein Drittel geringer, das neue Verfahren ist schneller. Der Hauptvorteil liegt jedoch in einem anderen Umstand: Statt auf der Sinusskala, liest man jetzt auf der doppelt so langen und viel gleichmäßiger geteilten Tangensskala ab, vor allem vermeidet man das rechte zusammengedrückte Ende von S, das, wie das Beispiel zeigt, immer zu Genauigkeitsverlust führt.

Die Tangensfunktion liefert den nichtorientierten Winkel φ eindeutig im Bereich des gestreckten Winkels mit Ausnahme der drei Winkel, bei denen der Zähler oder der Nenner von (6) verschwindet. Das Skalarprodukt Null zeigt den rechten Winkel an. Ist

das Skalarprodukt negativ, so berechnet man wieder mit seinem Betrage den zugehörigen spitzen Winkel ψ und geht dann zum Supplementwinkel $\varphi = 180^\circ - \psi$ über. Die Regel erfaßt auch die Unterscheidung der Fälle 0° und 180° bei verschwindender Determinante.

Das oben durchgeführte Beispiel rechnet sich jetzt so:

$$\bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{w} = 13, \quad \tan \psi = \frac{13}{35} = \tan 20,38^\circ, \text{ also } \varphi = 159,62^\circ.$$

1) Um Verwechslungen mit dem sogleich benutzten absoluten Betrag auszuschließen, vermeiden wir die übliche Schreibweise $\begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix}$.

Läufer auf D 13

C 35 unter den Läufer

Läufer auf C 10

Ergebnis unter dem Läufer auf T_1 : $20,38^\circ$.

Die Rechengenauigkeit ist mindestens sechsmal so groß wie im ersten Beispiel, wie man beim Vergleich des 1^o-Schrittes auf S und T_1 sieht.

Addition auf dem logarithmischen Rechenstab

von Studienrat J. J. Fuchs, Nürnberg

In allen Lehrbüchern erfährt man, daß Multiplikation und Division, Quadrieren und Quadratwurzelziehen, dritte Potenz und Kubikwurzelziehen, Logarithmieren und Delogarithmieren möglich sind, beileibe keine Addition. Der Rechenstab arbeitet eben nach dem Proportionalitätsprinzip. Und gerade deswegen läßt sich auf ihm addieren! Man verwandelt die Additions Gleichung in eine fortlaufende Proportion und gibt dem Rechenstab bewegliche Skalen für die lineare, die quadratische und die kubische Funktion.

Die Addition als einfache, lineare Gleichung heißt

$$a + b = c \quad (1)$$

Wir wandeln um in eine fortlaufende Proportion

$$a : b : c = ?$$

Ein weiterer Kunstgriff: wir kürzen durch a und erhalten

$$(a/a) : (b/a) : (c/a) = 1 : n : (n + 1)$$

Wir erhalten folgerichtig

$$a : b : c = 1 : n : (n + 1) \quad (2)$$

Für ein Beispiel auf dem Rechenstab benutzen wir die beiden unteren Skalen, um später bewußt den Zehnerübergang zu erleben. Wir geben die Addition mit Lösung:

Beispiel: $3 + 5 = 8$

$$3 : 5 : 8 = 1 : n : (n + 1) = 1 : 1,66 : 2,66.$$

Verfahren auf dem Rechenstab:

Über 3 auf der D-Skala setzen wir 1 der C-Skala. Läufer über 5 auf D zeigt 1,66 auf C, also $n = 1,66$. Nun bilden wir $(n + 1)$, d. i. $(1,66 + 1)$ also 2,66. Zieht man nun den Läufer auf 2,66 der C-Skala, so liest man darunter auf der D-Skala die Summe 8 ab (siehe Abb. 1).

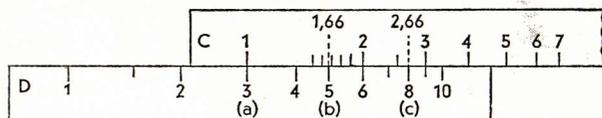


Abb. 1

Wenn der Zehnerübergang eintritt, z. B. bei $8 + 14 = x$, dann stelle man das Ende der C-Teilung über 8; Läufer über 14 der D-Teilung, darüber 1,75 auf der C-Teilung, addiere 1 und findet unter 2,75 auf C das Ergebnis 22 auf D.

Summenbildung von Quadraten:

Dafür benötigen wir drei Leitern: die Grundteilung auf D, die feste Quadratteilung auf A und die bewegliche Quadratteilung auf B. Auf dieser allein erscheint die Proportion $1 : n : (n + 1)$. Als wichtigstes Problem tritt uns hier der Pythagoräische Lehrsatz entgegen. Man berechne also

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad (3)$$

$$a^2 : b^2 : c^2 = 1 : n : (n + 1) \quad (4)$$

1. Beispiel: $3^2 + 4^2 = 5^2$ wird

$$3^2 : 4^2 : 5^2 = 1 : n : (n + 1)$$

$$3^2 : 4^2 : 5^2 = 1 : 1,78 : 2,78$$

Ausführung: Läufer auf D über 3; 1 auf B darüber; Läufer auf D über 4; ablesen auf B 1,78; dazu + 1 = 2,78 auf B, Läufer darüber; auf D erscheint Ergebnis 5. Man erspart also Quadrieren, Addieren und Wurzelziehen!

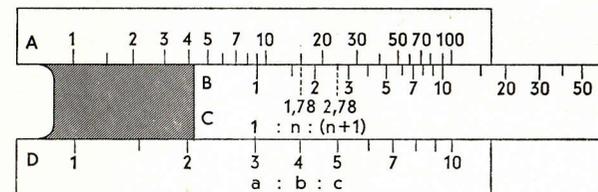


Abb. 2

2. Beispiel („indisches Dreieck“):

$$5^2 + 12^2 = 13^2 \text{ wird}$$

$$5^2 : 12^2 : 13^2 = 1 : 5,76 : 6,76$$

Ausführung: Läufer auf D über 5; Ende des Schiebers darüber; Läufer auf D nach 12; Ablesen auf B 5,76; dazu + 1 gibt 6,76 auf B; Läufer zeigt darunter auf D das Ergebnis 13.

Damit wäre auch der „Zehnerübergang“ beim Addieren von Quadraten vorgeführt.

Um **Kuben** addieren zu können, braucht man ebenfalls drei Teilungen: die Grundteilung auf D, die **festen Kubikteilung** auf K und die **bewegliche Kubikteilung** auf K'. Mit den meisten auf den Markt kommenden Rechenstäben kann man dieses Problem nicht lösen. Häufig ist eine feste Kubikteilung vorhanden, aber die bewegliche fehlt. Im Jahre 1954 brachte die Firma A. W. Faber eine Fortentwicklung des Rechenstabmodells System Darmstadt unter der Bezeichnung „Castell-Duplex 2/82“ heraus, welches eine bewegliche Kubikteilung enthält. Im Zusammenspiel dieser Teilungen können gebrochene Potenzen in Verbindung mit Multiplikation und Division durch wenige Einstellungen von Läufer und Schieber gelöst werden. Damit läßt sich dann auch ausführen:

$$a^3 + b^3 = x^3 \quad (5)$$

$$a^3 : b^3 : x^3 = ?$$

$$a^3 : b^3 : x^3 = 1 : n : (n + 1) \quad (6)$$

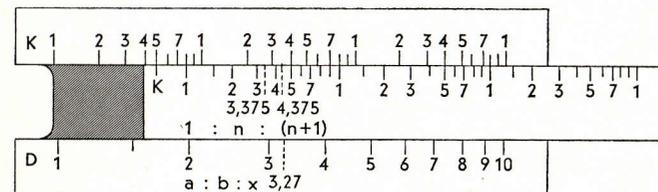


Abb. 3

1. Beispiel: $2^3 + 3^3 = x^3$

$$2^3 : 3^3 : x^3 = 1 : 3,375 : (3,375 + 1)$$

$$x = 3,27$$

Ausführung: Läufer auf D über 2; darunter Schieberanfang; Läufer auf D über 3; ablesen auf K' 3,375; Läufer auf K' nach $(3,375 + 1)$; darunter auf D Ergebnis $x = 3,27$.

Beim **Castell-Duplex** ist die D-Teilung auf der Vorderseite, die feste Kubikteilung K und die bewegliche Kubikteilung K' auf der Rückseite des Rechenstabes, weshalb der Stab in der Längsachse gewendet werden muß. Die exakte Justierung des Läufers garantiert die Richtigkeit der Ergebnisse.

2. Beispiel: $3^3 + 5^3 = x^3$
 $3^3 : 5^3 : x^3 = 1 : 4,64 : (4,64 + 1)$
 $x = 5,34$

3. Beispiel: Zehnerübergang
 $8^3 + 11^3 = x^3$
 $8^3 : 11^3 : x^3 = 1 : 2,6 : (2,6 + 1)$
 $x = 12,25$

Welchen praktischen Wert wird man nun mit der Addition auf dem log. Rechenstab verfolgen?

Die Addition einfacher Zahlen diene hier nur zur Erklärung der Grundlagen. Man wird kaum davon Gebrauch machen. Aber wichtig erscheint uns schon die Addition von Quadratzahlen (besonders nicht ganzzahliger!), da der Pythagoräische Lehrsatz ja auch in der Technik zur Anwendung kommt. Nur einige Beispiele: In der Elektrotechnik für die Berechnung des Schein-, Wirk- und Blindwiderstandes, im Bauwesen am Kräfterechteck, aber auch bei Anwendung des Kosinussatzes und bei Wurzelgleichungen mit komplexen Zahlen.

Subtraktion auf dem logarithmischen Rechenstab

von Studienrat J. J. Fuchs, Nürnberg

Ausgehend von der linearen Gleichung

$$a + b = c \quad (1)$$

erhält man zur Bildung der Differenz

$$c - b = a \quad (2)$$

Auch hier wandeln wir in eine fortlaufende Proportion um:

$$\frac{c}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a}{c} \quad \text{daraus}$$

$$1 - m = (1 - m) \quad \text{deshalb}$$

$$c : b : a = 1 : m : (1 - m) \quad (3)$$

Die Additionsformel $1 + n = (n + 1)$ enthält den Buchstaben n; bei der Subtraktion soll zur Unterscheidung m eingesetzt werden, obwohl der „minuendus“ 1 heißt und die zweite Zahl der „subtrahendus“ ist. Der Buchstabe s muß für die Bezeichnung einer Strecke vorbehalten werden!

Um den Vorgang der Subtraktion zu erklären, nehmen wir auf dem Rechenstab die Skalen C und D, wie es in der Abbildung 1 gezeigt ist. Das Zahlenbeispiel heißt dort

$$8 - 5 = 3 \quad (4)$$

nach Formel (3) $c : b : a = 1 : m : (1 - m)$

$$8 : 5 : 3 = 1 : 0,625 : 0,375$$

Ausführung: Über 9 auf der D-Skala setzen wir 1 der C-Skala, und zwar das Ende des Schiebers! Stellt man den Läufer über 5 auf D, dann erhält man auf C 0,625. Die Differenz $(1 - 0,625)$ läßt sich auch ablesen, wenn man die rechts stehende 7 als 0,3 liest und die Striche links bis zum Läuferstrich dazunimmt, wodurch man 0,375 als Komplementärzahl erhält! Das wesentliche ist also: nur richtig ablesen, keinesfalls rechnen! Damit erfüllt der Rechenstab wieder seine Aufgabe als Rechenhilfe. Um eine Subtraktion mit Zehnerübergang auszuführen, muß man den Anfang des Schiebers über den Minuenden stellen, z. B.

$$12 - 8 = 4$$

$$12 : 8 : 4 = 1 : 0,66 : 0,33 \quad (5)$$

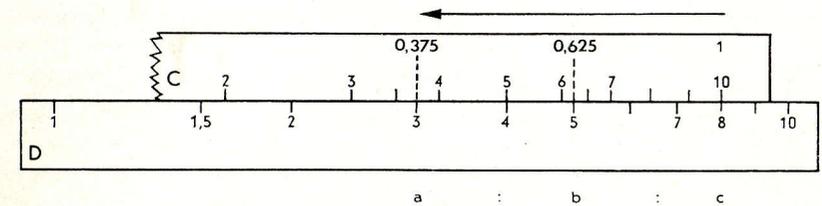


Abb. 1

Andere Aufgaben erfordern eine zweimalige Einstellung des Schiebers, z. B.

$$18 - 15 = 3$$

$$18 : 15 : 3 = 1 : 0,833 : 0,166 \quad (6)$$

Ausführung: Rechte 1 des Schiebers über 18 auf D; Läufer über 15 auf D; ablesen unterm Läuferstrich auf C 0,833 und Komplementärzahl 0,166. Jetzt linke 1 des Schiebers über 18 auf D, dann mit dem Läufer auf C 0,166 suchen und darunter auf D 3 ablesen. Mit der Einstellung und gegebenenfalls Umstellung des Schiebers muß man sich vertraut machen.

Grundanwendungen des Funktionenschiebers 1080

nach Dr. Th. Marzani

Im Rechenstab-Brief 11 (1967), Seite 15-19, wurden nach kurzer Beschreibung des Gerätes (hierzu Abb. 1) die **Grundanwendungen zu Seite b der Streifenserie** besprochen: 1.1 Elementare Flächenverwandlung durch Scherung; 1.2 Affine Transformation der Ebene im stetigen Übergang; 1.3 Ellipse als affine Linie des Kreises; 1.4 Ganzrationale Funktionen und algebraische Gleichungen (hierzu Abb. 2 bis 7).

2. Grundanwendungen zu Seite a der Streifenserie

In Abb. 9 erscheint die Seite a der Streifenserie in **Grundstellung** (mittels des Stabes hochgestellt). Die **Musterkurven** a 1 bis a 4 können als graphische Darstellungen **harmonischer Schwingungen** bzw. **harmonischer Wellen** aufgefaßt werden (Zeit bzw. Weg als Argument, Schwingungsdauer bzw. Wellenlänge als Periode). Dies gilt auch für die Randkurven der **Schablonen** 2 bis 5, die mit beliebiger „Phase“ eingestellt werden können (z. B. Schablone 3 in Abb. 9 und Abb. 10).

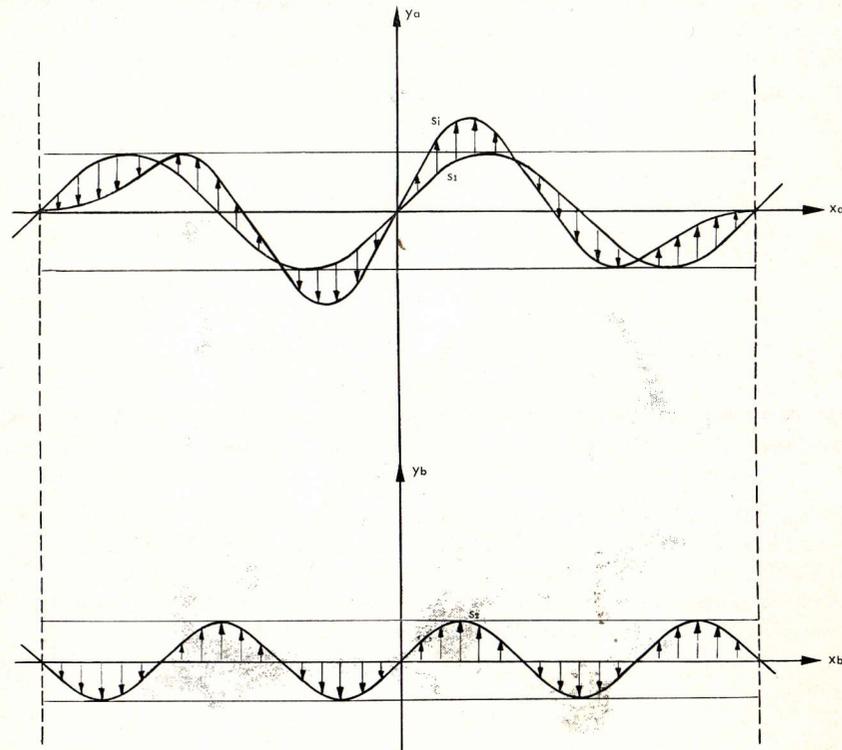


Abb. 8

2.1 Überlagerung zweier Funktionen (Darstellung der Summenfunktion)

Die Überlagerung zweier Funktionen ist das wesentliche Prinzip für die Grundanwendungen der Seite a.

Abb. 8 stellt dar, wie aus dem Graph s_1 und dem Graph s_2 zweier Funktionen punktweise der Graph s ; der Summenfunktion gewonnen wird. Die Durchführung dieser „Überlagerung“ mit dem Stechzirkel ist mühsam und im Ergebnis zumeist unbefriedigend.

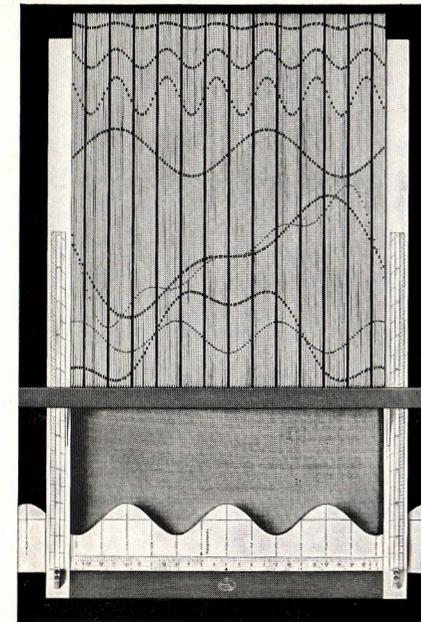


Abb. 9

Abb. 9 und Abb. 10 zeigen die Darstellung dieser Überlagerung mittels des Funktionenschiebers: In Abb. 9 stellt die **Musterkurve a 4** den Graph s_1 dar. Der Mittelstreifen gilt hierbei als y-Achse. Auf die x-Achse wird im Bild verzichtet. Sie kann jeweils mittels des **Läufers** demonstriert werden (siehe Abb. 1 im Rechenstab-Brief 11). Die Randkurve der unten eingeschobenen **Schablone 3** stellt den Graph s_2 dar (in Abb. 9 „phasenverschoben“, in Abb. 10 richtig eingestellt mit angedeuteter Achse \bar{x}).

Wird der Stab weggenommen, so „fällt“ die Streifenreihe auf die Schablone (Abb. 10). Aus der Musterkurve a 4 ergibt sich hierbei mit einem Schlag der Graph s ; der Summenfunktion (Überlagerung). Die Achse x wird hierzu mit dem Läufer eingestellt.

Erklärung: Die einzelnen Punkte der Musterkurve a 4 (in Grundstellung auf die Achse x bezogen) erscheinen in Abb. 10 um dieselben Strecken verschoben wie die unteren Enden der Streifen gegenüber der Achse \bar{x} (positiv - nach oben; negativ - nach unten). Damit ist mechanisch für alle Punkte vollzogen, was in Abb. 8 einzeln mit dem Stechzirkel ausgeführt ist. Man kann dies eindringlich zeigen, indem man die Musterkurve a 4 in Grundstellung (Abb. 9) auf die transparente Scheibe des Läufers paust, in der Endstellung (Abb. 10) die Achse des Läufers auf die x-Achse einstellt und das Gesamtbild mit der graphischen Ausführung nach Abb. 8 vergleicht.

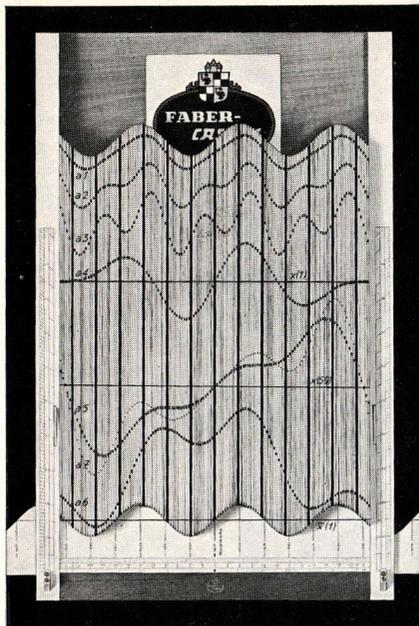


Abb. 10

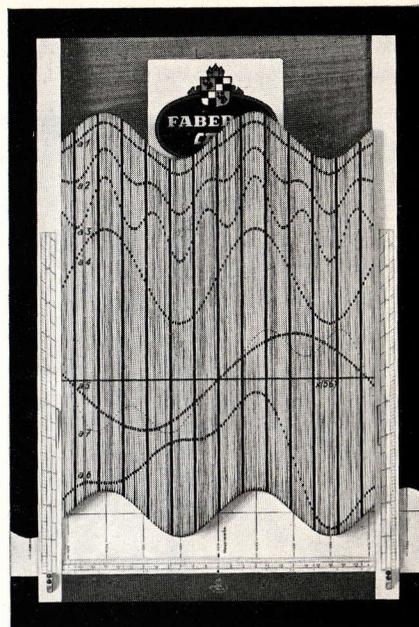


Abb. 11

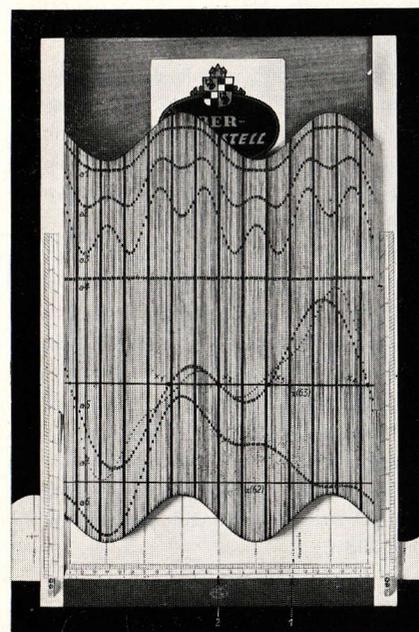


Abb. 12

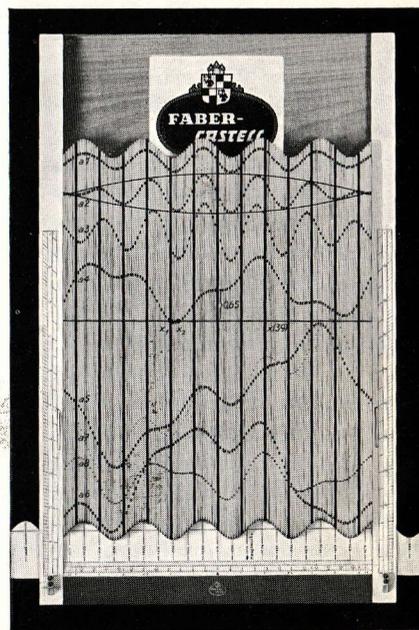


Abb. 13

2.2 Demonstrationen zur Wellenlehre und zur Akustik

Bei den folgenden Grundanwendungen geht jeweils aus dem Zusammenhang hervor, ob die Kurven als graphische Darstellungen von **Schwingungen** oder **Wellen** aufgefaßt werden. In beiden Fällen ist wesentlich:

Das **Frequenzverhältnis** zweier Schwingungen (bzw. zweier Wellen) ist gleich dem Verhältnis der Anzahl von Perioden ihrer Bildkurven, die auf dasselbe Intervall der Zeitskala (bzw. der Wegskala) entfallen. Als Vergleichsintervall dient uns das „Bildintervall“ zwischen dem dritten und dem drittletzten Streifen (Länge 2π für 5 cm Einheitsstrecke). Im Bildintervall sind enthalten:

- 2 Perioden: Schablone 2 und Musterkurve a 4
- 3 Perioden: Schablone 3
- 4 Perioden: Schablone 4
- 5 Perioden: Schablone 5
- 6 Perioden: Musterkurven a 1, a 2 und a 3 (mit verschiedenen Amplituden)

2.21 Periode einer Überlagerung zweier Wellen (Interferenz)

Es soll durch Demonstration bestätigt werden: Die Überlagerung zweier Wellen mit den Wellenlänge λ_1 und λ_2 ergibt eine Welle, deren Wellenlänge λ das kleinste gemeinsame Vielfache von λ_1 und λ_2 ist.

1. Beispiel: Beim Musterbeispiel zu 2.1 (Abb. 10; **Musterkurve a 4 und Schablone 3**) sind zwei Wellen mit dem Frequenzverhältnis 2 : 3 überlagert (**Quint**). Das Bildintervall enthält zwei bzw. drei Perioden der Teilwellen, also eine Periode der Interferenz.
2. Beispiel: Dasselbe Frequenzverhältnis ergibt die Überlagerung der **Musterkurven a 1 bis a 3** mit der **Schablone 4** (in Abb. 1 im Rechenstab-Brief 11 oben für a 1 und a 2 sichtbar). Das Bildintervall umfaßt dann 4 bzw. 6 Perioden der Teilwellen, also zwei Perioden der Interferenz.

2.22 Oberton und Klangfarbe

Beim Frequenzverhältnis 1 : n (n ganzzahlig) ist λ_1 durch λ_2 teilbar, demnach λ_1 zugleich die Wellenlänge der Interferenz.

1. Beispiel: In Abb. 10 ergeben die **Schablone 3** und die **Musterkurven a 1 bis a 3** Überlagerungen mit dem Frequenzverhältnis 1 : 2 (**Oktav; Grundton und 1. Oberton**). Das Bildintervall umfaßt drei Perioden.
2. Beispiel: In Abb. 11 und Abb. 12 ergeben die **Schablone 2** und die **Musterkurven a 1 bis a 3** Überlagerungen mit dem Frequenzverhältnis 1 : 3 (**Grundton und 2. Oberton**). Das Bildintervall umfaßt zwei Perioden.

In der Akustik bedeutet dies: Der **Grundton** bestimmt die **Tonhöhe**. Die **Obertöne** wirken sich nur in der **Klangfarbe** aus. Die Intensität der Auswirkung ist in Abhängigkeit von der Amplitude des Obertones wird durch den Vergleich der Musterkurven a 1, a 2 und a 3 veranschaulicht.

2.23 Auswirkung der Phasenverschiebung

In Abb. 11 und Abb. 12 ist die **Schablone 2** mit verschiedener „Phase“ eingestellt. Die Kurven a 1 bis a 3 zeigen, daß sich hieraus bei den Überlagerungen bemerkenswerte Unterschiede ergeben. Eine Phasenverschiebung der Schablone in kleinen Schritten ergibt eine überraschende Fülle weiterer interessanter Kurvenbilder.

Schlagen wir mehrmals zwei Stimmgabeln an, so treten in einer Aufzeichnung auf Tonband oder Schallplatte solche Unterschiede auf. Dennoch hört das Ohr stets denselben Klang. Folgerung: Das Sinnesorgan setzt nicht die Gesamtschwingung unmittelbar in Empfindung um, sondern zerlegt sie zunächst wieder in ihre Teilschwingungen, so daß sich die Phasen nicht auswirken (Basilarmembran).

2.24 Stehende Welle

Die **Musterkurve a 4** (siehe Abb. 10) und die **Schablone 2** stellen **harmonische Wellen gleicher Frequenz** und gleicher Amplitude dar. Das Bildintervall umfaßt zwei Perioden. Die Überlagerung ergibt bei beliebiger Phase jeweils eine **harmonische Welle gleicher Frequenz, jedoch mit wechselnder Phase und Amplitude**. Bei gleicher Phase summieren sich die Amplituden (Abb. 11), bei einer halben Periode Phasenverschiebung heben sie sich auf (Abb. 12). Die schrittweise Verschiebung der Schablone ergibt im allmählichen Übergang alle dazwischen liegenden Fälle.

Verschiebt man die Koordinatenscheibe des Läufers jeweils halb so weit wie die Schablone, so bedeutet die fortlaufende Verschiebung — bezogen auf das Koordinatensystem des Läufers — die Überlagerung von fortschreitender Welle und Echowelle. Die Überlagerung behält sodann ihre Phase bei und ändert sich nur in ihrer Amplitude. Paust man ihren Graph schrittweise auf die Koordinatenscheibe, so ergibt sich eine Kurvenschar mit **Knoten** und **Bäuchen** als Darstellung der **stehenden Welle**, des Prinzips aller Saiten- und Pfeifeninstrumente.

2.25 Schwebung

In Abb. 13 ergeben die **Schablone 5** und die **Musterkurven a 1 bis a 3** Überlagerungen mit dem Frequenzverhältnis 5:6. Hierbei tritt die **Schwebung** deutlich in Erscheinung: Die Amplitude der Überlagerung schwankt periodisch zwischen der Summe und der Differenz der Teilamplituden. Bei a 2 (Überlagerung mit gleichen Teilamplituden) wird dies durch eine transparente Auflage mit aufgetragener Hüllkurve besonders eindrucksvoll dargestellt. Die Auflage ist bei beliebiger Phase der eingeschobenen Schablone verwendbar, da hierbei die Hüllkurve lediglich phasenverschoben wird. Es ist wertvoll, dies mit etappenweise verstellter Phase zu demonstrieren.

Für die Überzeugungskraft der in 2.2 besprochenen Demonstrationen am Funktionschieber ist wesentlich, daß augenfällig lediglich zwei harmonische Schwingungen bzw. Wellen mechanisch überlagert werden. Diese Wirkung kann etwa durch Demonstrationen am Oszillographen vertieft, aber nicht ersetzt werden.

Die Formschönheit der in vielfachen Variationen herstellbaren Überlagerungskurven ist zudem gewiß geeignet, die Erinnerung an die Besprechung der genannten Erscheinungen erlebnishaft zu vertiefen.

In einem der nächsten Rechenstab-Briefe soll die Besprechung der Grundanwendungen zu Seite a durch folgende Punkte ergänzt werden:

2.3 Graphische Lösung transzendenter Gleichungen.

2.4 Überlagerung dreier Funktionen („Negativverfahren“).

Weitere Ergänzungen bleiben späteren Beiträgen vorbehalten.



A.W.Faber-Castell · Stein bei Nürnberg, Germany