ARISTO

MITTEILUNGEN FÜR INGENIEUR- UND HOCHSCHULEN

Aus dem Inhalt:

Heft 9
Oktober 1966

DENNERT & PAPE · ARISTO-WERKE KG · HAMBURG

ARISTO-MITTEILUNGEN FÜR INGENIEUR- UND HOCHSCHULEN

Herausgeber: ARISTO-Kundendienst
DENNERT & PAPE • ARISTO-WERKE KG • 2 Hamburg 50 • Juliusstraße 10

Schriftleiter: Dipl.-Ing. Rolf Jäger

Mitarbeiter dieses Heftes:

Prof. Wilhelm Bier
A-1180 Wien 18, Gentzgasse 14/12/7, Österreich

Prof. Dr.-Ing. Ernst Rossow
1 Berlin 45, Bäkestr. 11

Dr. Werner Ruppert
67 Ludwigshafen, Leuschnerstr. 46

Dipl.-Ing. Wilhelm Thiem
35 Kassel, Langenbeckstr. 26

Rechenstabdiagramme

Zur Erklärung der Beispiele benutzen wir Diagramme, die den Lösungsweg und die Reihenfolge der Einstellungen angeben. Die Skalen werden durch parallele Linien dargestellt, am linken Ende stehen die international üblichen großen Buchstaben und am rechten Ende die mathematische Kennzeichnung. Folgende Symbole erleichtern die Lesbarkeit der Abbildungen:

- ○ Anfangseinstellung
- ● jede weitere Einstellung
- ◉ Ergebnis
- ⊗ Zwischeneinstellung oder -ablesung
- Wenden des Rechenstabes
- Pfeile geben Reihenfolge und Bewegungsrichtung an
- Ein senkrechter Strich mit Halbkreisen an den Enden stellt den Läufer dar

Häufigkeitskurve und Gauß-Integral

Prof. Dr.-Ing. Ernst Rossow

Die Häufigkeitskurve und ihr Integral werden bei zahlreichen technischen Aufgaben benutzt, z. B. in der Qualitätskontrolle, beim Festlegen sinnvoller Fertigungstoleranzen und in der Fehlerrechnung.

1. Häufigkeitskurve

Die Ordinate dieser Gaußschen Glockenkurve ist gegeben durch die Gleichung

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0,5\,u^2}.$$

Sie kann auf dem ARISTO-Studio bequem berechnet werden.

Beispiel: $u = 2,73$

Wir stellen über 0,5 auf der Skala D den Wert $u = 2,73$ auf der Skala CI und multiplizieren erneut mit 2,73, indem wir den Läuferstrich auf 2,73 der Skala C stellen. Der Exponent ist berechnet, wir könnten seinen Wert auf Skala D ablesen. Nun müssen wir die Skala bestimmen, auf der wir das Ergebnis des Exponentialausdruckes finden. Dazu berechnen wir den Exponenten durch großzügige Überschlagsrechnung im Kopf $0,5 \cdot 2,73 \cdot 2,73 \approx 0,5 \cdot 2 \cdot 3 = 3$ und schließen daraus, daß wir das Ergebnis auf Skala LL03 finden. Wir wenden den Rechenstab und lesen unter dem Läuferstrich auf Skala LL03 ab, wie Abb. 1 zeigt.

$$e^{-0,5 \cdot 2,73^2} = 0,0241$$

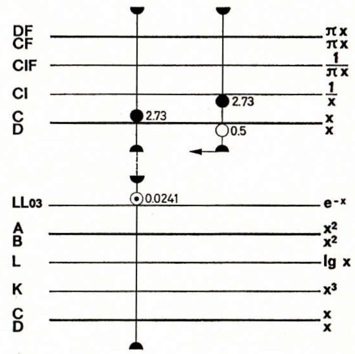

Abb. 1

Der Wert $e^{-0,5\,u^2}$ gibt die auf die maximale Ordinate bei $u = 0$ bezogene relative Ordinate an. Die Ordinate y der normierten Form erhält man durch Multiplikation mit $1/\sqrt{2\pi} = 0,3989423 \approx 0,399$ also für obiges Beispiel $y = 0,00961$.

Die Exponentialskalen des Rechenstabes ARISTO-Studio erlauben die unmittelbare Bestimmung von Ordinaten für $0,1414 \leq u \leq 4,65$, wobei allgemein mit der üblichen dreistelligen Rechenstabgenauigkeit kalkuliert werden kann. Für kleine u-Werte läßt sich die Genauigkeit des Ergebnisses bis zur fünften Stelle steigern, wenn man bei der abschließenden Multiplikation anstelle des Funktionswertes $e^{-0,5\,u^2}$ dessen Ergänzung auf 1, also den Komplementwert, verwendet.

Beispiel: $u = 0,236$

Wir berechnen auf dem in Abb. 1 dargestellten Weg $e^{-0,5 \cdot 0,236^2} = 0,9726$. Für die nun erforderliche Multiplikation schreiben wir $(1/\sqrt{2\pi}) \cdot 0,9726 = (1/\sqrt{2\pi})\,(1 - 0,0274)$ und verwenden hier den genaueren Wert $1/\sqrt{2\pi} = 0,39894$. Wir erhalten damit $0,39894 - (0,39894 \cdot 0,0274) = 0,39894 - 0,01093 = 0,38801$. Dieses Ergebnis ist einschließlich der fünften Stelle richtig.

Bei großen u-Werten ist die mit dem Rechenstab hier erreichbare Genauigkeit größer als diejenige fünfstelliger Tafeln. Der größte einstellbare Wert $u = 4{,}65$ ergibt auf der Skala LL03 den Wert $2 \cdot 10^{-5}$ und daraus $y = 0{,}00000798$. Die erreichte Genauigkeit erkennen wir aus dem Vergleich mit dem neunstelligen Tafelwert $y = 0{,}000008047$. Die Abweichung beträgt also eine Einheit der siebten Stelle.

Führt man die Berechnung des Funktionswertes $e^{-0{,}5\,u^2}$ in jedem Fall mit den Skalen D, CI, C und LL0 durch, so muß man bei einigen u-Werten die Rechenstabzunge durchschieben. Das kann man vermeiden, indem man die versetzten Skalen CIF und CF anstelle der Grundskalen CI und C verwendet, wie folgendes Beispiel zeigt.

Beispiel: $u = 0{,}7$

Wir stellen 0,7 auf der Skala CIF über 0,5 auf der Skala D und multiplizieren erneut mit 0,7, indem wir den Läuferstrich auf 0,7 der Skala CF stellen. Anschließend wenden wir den Rechenstab und lesen das Ergebnis auf der Skala LL02 ab, siehe Abb. 2.

$$e^{-0{,}5 \cdot 0{,}7^2} = 0{,}7825$$

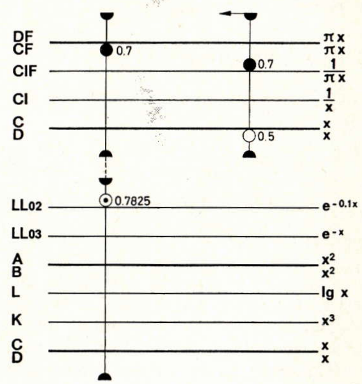

Abb. 2

2. Gauß-Integral

Das Integral der Häufigkeitskurve

$$Y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-0{,}5\,u^2}\,du$$

ist geschlossen nicht lösbar. Es ist mit unterschiedlichen Grenzen in zahlreichen Handbüchern tabelliert.

Abb. 3 zeigt die Häufigkeitskurve

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-0{,}5\,u^2}$$

die durch die Normierung so festgelegt ist, daß die Fläche zwischen dieser Kurve und der u-Achse, also das Integral

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-0{,}5\,u^2}\,du$$

genau den Wert 1 hat. Mit anderen Integrationsgrenzen unterscheidet man folgende Funktionen:

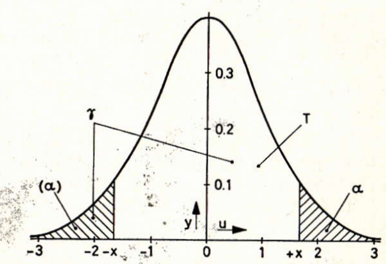

Abb. 3

Integriert man zwischen den Toleranzgrenzen $-x$ und $+x$, so erhält man die Funktion

$$T = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^{+x} e^{-0{,}5\,u^2}\,du$$

Sie wird durch die in Abb. 3 nicht schraffierte Fläche dargestellt. Mit $x = 1{,}645$ ergibt sich die T90-Grundspanne der Häufigkeitsanalyse nach Daeves und Beckel.

Als weitere Funktion wird die einseitig außerhalb der T-Spanne liegende Fläche angegeben.

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{+x}^{+\infty} e^{-0{,}5\,u^2}\,du$$

Sie ist in Abb. 3 schraffiert. Es gilt also

$$T = 1 - 2\alpha$$

Andere Tabellenwerke geben die Funktion

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+x} e^{-0{,}5\,u^2}\,du$$

an. Sie stellt die Addition der linksschraffierten Fläche (α) mit der unschraffierten Fläche T dar, wenn als obere Grenze positive x-Werte genommen werden. Für negative x-Werte ist sie gleich der linksschraffierten Fläche (α). Man sieht ferner, daß für $\gamma > 0{,}5$ gilt $\gamma = 1 - \alpha$.

Wenn die entsprechenden Tabellen zur Hand sind, wird man sie immer benutzen.

2.1. Näherungen

Die folgenden Näherungen kann man benutzen, wenn Tabellen gerade nicht zur Hand sind. Sie ermöglichen zum anderen in mathematischen Formeln, bei denen die Unmöglichkeit der geschlossenen Lösung des Integrals stört, erste Abschätzungen numerisch zu finden.

$x > 3$

Hier gilt die Näherung

$$\alpha \approx A = \frac{y}{x}\left(1 - \frac{x^2 - 3}{x^4}\right)$$

(s. Betriebshütte, Band I, Berlin 1957).

Den Ausdruck $1 - \frac{x^2 - 3}{x^4}$ berechnet man in der Form $1 - \frac{x^2 - 3}{x^2 x^2}$, wie am Beispiel $x = 3{,}5$ gezeigt wird. Zuerst berechnet man x^2, indem man mit dem Läuferstrich 3,5 auf der Skala D einstellt und $x^2 = 12{,}25$ auf Skala A abliest. Anschließend wird $12{,}25 - 3 = 9{,}25$ auf Skala D eingestellt und die Zunge so verschoben, daß 12,25 auf der Skala CF darüber steht. Stellt man dann den Läuferstrich auf 12,25 der Skala CIF, dividiert also zum zweiten Mal mit 12,25, so kann man das Ergebnis $\frac{3{,}5^2 - 3}{3{,}5^4} = 0{,}0616$ auf der Skala D ablesen. Geübte Stabrechner lesen sofort die dekadische Ergänzung $1 - 0{,}0616 = 0{,}9384$ ab. Die Stabeinstellung für die letzte Berechnung zeigt Abb. 4.

$$\frac{9{,}25}{12{,}25 \cdot 12{,}25} = 0{,}0616$$

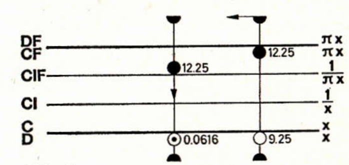

Abb. 4

Die folgende Tabelle gibt die Gegenüberstellung der durch Näherung gewonnenen Werte A mit genauen Tabellenwerten α.

x	y/x	A	α
1,0	0,2420	—	0,1587
1,5	0,0863	—	0,0668
2,0	0,0270	0,0253	0,02275
2,5	0,0070	0,0064	0,00621
3,0	0,00148	0,00137	0,00135

Viele Tabellen in Taschenbüchern gehen nur bis etwa $x = 3$. Die Tabelle zeigt, daß die Genauigkeit der Näherung ausreicht, die Tabellen zu erweitern, wenn man die üblichen technologischen Genauigkeitsansprüche stellt.

Für $x = 4$ ergibt sich

$$y/x = 0{,}00003345$$
$$A = 0{,}00003175$$
$$\alpha = 0{,}00003167$$

Der Wert A wurde auf dem ARISTO-Studio mit dem aus einer siebenstelligen Tafel entnommenen Wert $y = 0{,}0001338$ bestimmt.

$$A = \frac{0{,}0001338}{4}\left(1 - \frac{13}{256}\right) = 0{,}00003175.$$

Bei reiner Stabrechnung ist der Wert $A = 0{,}000032$ um etwa eine Stelle der sechsten Dezimale unsicher, so daß ab etwa $x = 4$ mit Rechenstabgenauigkeit nur y/x berechnet zu werden braucht. Eine Rundung des so erhaltenen Ergebnisses erfolgt zweckmäßig als Abrundung, da der Wert A und noch mehr der Wert y/x über α liegt.

$2 < x < 3$

Auch für diesen Wertebereich kann man die Näherung A verwenden. Man muß sich allerdings mit der größeren Ungenauigkeit abfinden, wie sie aus obiger Tabelle ersichtlich ist.

$x < 2$

Für kleinere x-Werte wird der Fehler schnell untragbar groß. J. D. Williams hat eine Näherung angegeben, die sich für Berechnungen mit dem ARISTO-Studio besonders eignet. (Annals Mathematical Statistics 17, 1946, Seite 363—365). Für beliebiges x gilt

$$T = \frac{1}{2\pi}\int_{-x}^{+x} e^{-0{,}5\,u^2}\,du \leq \sqrt{1 - e^{-\frac{2}{\pi}x^2}} = T'$$

Für die Näherung T′ ist der Fehler somit in seiner Richtung bekannt. Der folgenden Tabelle kann der relative Fehler

$$\varepsilon = \frac{T' - T}{T} \cdot 100 \qquad \text{in \%}$$

entnommen werden.

x	ε %	x	ε %	x	ε %	x	ε %
0,0	0,00	0,6	0,24	1,1	0,58	1,6	0,70
0,1	0,02	0,7	0,31	1,2	0,63	1,7	0,68
0,2	0,05	0,8	0,38	1,3	0,67	1,8	0,65
0,3	0,08	0,9	0,44	1,4	0,69	1,9	0,63
0,4	0,13	1,0	0,51	1,5	0,70	2,0	0,58
0,5	0,18					2,2	0,47

Ansich kann der relative Fehler auf weniger als 0,5% herabgesetzt werden, wenn im Exponenten der Näherung T′ statt $2/\pi = 0{,}6366$ gesetzt wird 0,6302. Jedoch ist dann die Richtung des Fehlers nicht mehr konstant.

Für Rechenstabgebrauch ist es günstiger, mit der obigen Formel für T′ zu rechnen und gegebenenfalls für $0{,}6 < x < 2{,}2$ vom Ergebnis 0,5% abzuziehen.

Die Berechnung der Näherung

$$T' = \sqrt{1 - e^{-\frac{2}{\pi}x^2}}$$

mit dem Rechenstab soll nun an einem Beispiel mit $x = 1{,}5$ erläutert werden. Wir müssen zuerst den Ausdruck

$$e^{-\frac{2}{\pi}x^2}$$

berechnen. Dazu stellen wir unter die 2 der Skala DF den Wert 1,5 der Skala CI und könnten das Zwischenergebnis für $\frac{2 \cdot 1{,}5}{\pi}$ unter der 1 der Skala C auf der Skala D ablesen. Wir multiplizieren gleich nochmals mit 1,5, indem wir den Läuferstrich auf 1,5 der Skala C schieben. Den Exponenten $\frac{2}{\pi}1{,}5^2$ könnten wir nun auf Skala D ablesen. Die Überschlagsrechnung im Kopf ergibt, daß er etwa 1,5 beträgt. Daher finden wir das Ergebnis auf der Skala LL03, nachdem wir den Stab gewendet haben. Diese Stabeinstellung zeigt Abb. 5.

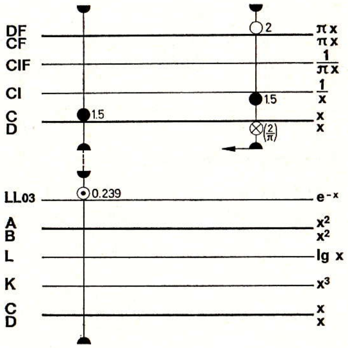

Abb. 5

$$e^{-\frac{2}{\pi}1{,}5^2} = 0{,}239$$

Danach berechnen wir die Ergänzung zu 1, erhalten $1 - 0{,}239 = 0{,}761$ und ziehen daraus die Wurzel. Das können wir in der üblichen Weise mit den Skalen A und D tun, büßen aber an Genauigkeit ein. Wer genauer arbeiten will, berechnet die Wurzel mit den Skalen LL02 und C. Wir stellen dazu die Rechenstabzunge so ein, daß 2 auf der Skala C unter 0,761 auf der Skala LL03 steht, und lesen mit Hilfe des Läuferstriches über 1 der Skala C das Ergebnis 0,8725 auf der Skala LL03 ab, wie Abb. 6 zeigt.

$\sqrt{0,761} = 0,8725$

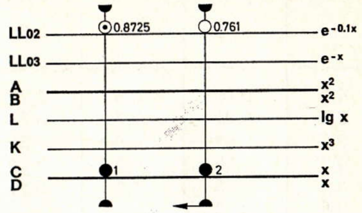

Abb. 6

Aus der oben gegebenen Näherung A für α ergibt sich für die Grenzen der Wurzelnäherung nach Williams

$$T \approx T'' = 1 - 2A$$

Die folgende Tabelle gibt die Gegenüberstellung des Tafelwertes T des Gaußintegrals, der Näherung $T' = \sqrt{1 - e^{-\frac{2}{\pi}x^2}}$, der Näherung $T'' = 1 - 2A$ und der Näherung 0,995 T'.

x	T'	T	1 — 2A	0,995 T'
0	0	0		0
0,5	0,3836	0,3829		0,3817
1,0	0,6862	0,6827		0,6828
1,5	0,8725	0,8664		0,8671
2,0	0,9600	0,9545	0,9494	0,9552
2,2	0,9767	0,9721	0,9703	0,9718
2,5	0,9907	0,9876	0,9872	0,9858
3,0	0,9984	0,9973	0,9973	

2.2. Zusammenfassung

Aus der Tabelle ergibt sich, daß mit einer Näherungsungenauigkeit von etwa $\pm$ 0,2%, also oft innerhalb der mit dem Rechenstab möglichen Genauigkeit, das Gauß-Integral

$$T = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^{+x} e^{-\frac{u^2}{2}} \, du$$

wie folgt genähert werden kann:

für	$0 < x < 0,6$	$T \approx T' = \sqrt{1 - e^{-\frac{2}{\pi}x^2}}$
	$0,6 < x < 2,2$	$T \approx 0,995\, T'$
	$2,2 < x$	$T \approx 1 - \frac{2y}{x}\left(1 - \frac{x^2 - 3}{x^4}\right)$

Der ARISTO-Studio im Maschinenbau

Fortsetzung aus Heft 6

Dipl.-Ing. Wilhelm Thiem

3. Pythagoras-Berechnungen

3.1. Zusammengesetzte Festigkeit

Eine gegebene Welle sei auf zusammengesetzte Festigkeit zu untersuchen. Der Ingenieur benutzt dafür die Formeln nach der Hypothese der gleichen Gestaltsänderungsarbeit

$$M_{vgl} = \sqrt{M_b^2 + 0,75\,(\alpha_o M_t)^2}$$

bzw.

$$\sigma_{vgl} = \sqrt{\sigma_b^2 + 3\,(\alpha_o \tau_t)^2}$$

Darin bedeuten

M_{vgl} = Vergleichs-Biegemoment
σ_{vgl} = Vergleichs-Biegespannung
M_b = vorhandenes Biegemoment
M_t = vorhandenes Drehmoment
σ_b = vorhandene Biegespannung
τ_t = vorhandene Drehspannung
α_o = Werkstoff-Faktor mit der Bestimmungsgleichung

$$\alpha_o = \frac{\sigma_{b\,zul}}{1,73\,\tau_{t\,zul}}$$

Die Ausgangswerte zur Berechnung von α_o entnehmen wir einem Taschenbuch, z. B. Dubbels Taschenbuch für den Maschinenbau, Berlin 1966, und erhalten

Werkstoff	$\sigma_{b\,zul}$ kp/mm²	$\tau_{t\,zul}$ kp/mm²	α_o
St 37	17	14	0,70
St 42	19	16	0,69
St 50	24	19	0,73
St 60	28	22	0,74
St 70	32	26	0,71

Aufgabe:

Eine Welle aus St 50 ist in A und B gelagert. Sie soll die vom Ritzel aufgenommene Leistung P = 20 PS bei der Drehzahl n = 220 min^{-1} auf das Zahnrad weiterleiten. Die Abstände sind aus Abb. 14 zu ersehen. Das für die Festlegung des Wellendurchmessers ausschlaggebende Vergleichsmoment aus Biegung und Verdrehung soll berechnet werden. Die an den

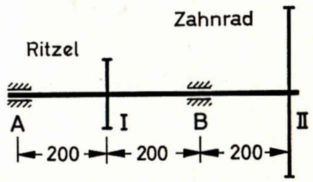

Abb 14.

Zahnrädern auftretenden horizontalen und vertikalen Kraftkomponenten sind bekannt.

$$F_{vI} = -\ 50\ \text{kp}$$
$$F_{vII} = 500\ \text{kp}$$
$$F_{hI} = -\ 325\ \text{kp}$$
$$F_{hII} = 175\ \text{kp}$$

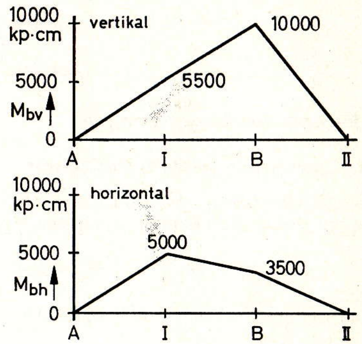

Abb. 15

Abb. 15 zeigt die daraus berechneten Biegemomentkurven.

Das übertragene Drehmoment bestimmen wir mit der Zahlenwertgleichung $M_t = 71620 \frac{P}{n}$ mit P in PS, n in min^{-1} und M_t in kp · cm. Wir erhalten

$$M_t = 71620 \frac{20}{220} = 6510\ \text{kp} \cdot \text{cm}.$$

Für die Stellen I und B sollen nun die vorhandenen und die zusammengesetzten Spannungen sowie ihr Verhältnis zur zulässigen Spannung, die Sicherheit, berechnet werden. Aus M_{bv} und M_{bh} bestimmt man zuerst das resultierende Biegemoment M_{bres} nach der Gleichung

$$M_{bres} = \sqrt{M_{bv}^2 + M_{bh}^2}$$

Wir wählen die trigonometrische Lösung und führen für Stelle I ($M_{bv} = 5500$ kp · cm und $M_{bh} = 5000$ kp · cm) folgende Rechnung aus: Die 1 der Skala C stellen wir über 5000 (kleinerer Wert!) der Skala D, schieben den Läuferstrich auf 5500 der Skala CI und lesen den zugehörigen Winkel von 42,3° auf der Skala T ab. Dann stellen wir den Läuferstrich auf den gleichen Winkelwert der Skala S und lesen das Ergebnis $M_{bres} = 7430$ kp · cm auf der Skala CI ab. Die Stabeinstellung zeigt Abb. 16.

$$\sqrt{5500^2 + 5000^2} = 7430$$

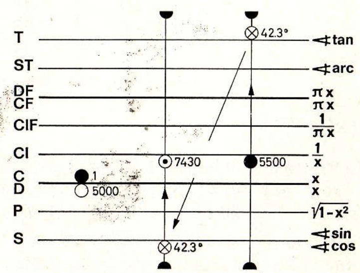

Abb. 16

Mit einer gleichartigen Rechnung erhält man für die Stelle B $M_{bres} = 10590$ kp · cm.

Nun errechnet man das Vergleichsmoment

$$M_{vgl} = \sqrt{M_b^2 + 0{,}75\,(\alpha_o M_t)^2}.$$

Dazu formt man die Gleichung praktisch um

$$M_{vgl} = \sqrt{M_b^2 + (\sqrt{0{,}75}\,\alpha_o M_t)^2}$$

und berechnet zuerst den zweiten zu quadrierenden Ausdruck.

Für die Stelle I ergibt sich folgender Rechnungsgang:

In der rechten Hälfte der Skala A wird mit dem Läuferstrich der Wert 0,75 eingestellt. Auf Skala D könnte man $\sqrt{0{,}75}$ ablesen. Da man diesen Zwischenwert jedoch nicht braucht, rechnet man sofort weiter. Der Stab wird gewendet und die Zunge so verschoben, daß $\alpha_o = 0{,}73$ auf der Skala CIF unter dem Läuferstrich steht. Zur Multiplikation mit $M_t = 6510$ wird nun der Läuferstrich auf diesen Wert der Skala CF geschoben und das Ergebnis 4110 auf der Skala D abgelesen. Abb. 17 zeigt die zugehörige Stabeinstellung.

$$\sqrt{0{,}75} \cdot 0{,}73 \cdot 6510 = 4110$$

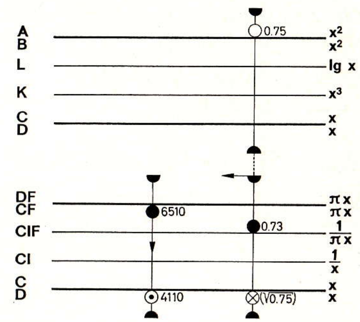

Abb. 17

Nun wiederholt man den in Abb. 3 wiedergegebenen Rechnungsgang und erhält $M_{vgl} = 8490$ kp · cm.

Für den Wellendurchmesser d = 60 mm folgt

$$\sigma_{vgl} = \frac{M_{vgl}}{W} = \frac{8490\ \text{kp} \cdot \text{cm}}{21{,}21\ \text{cm}^3} = 400\ \text{kp/cm}^2$$

Genauso erhält man für Stelle B:

$$M_{vgl} = 11360\ \text{kp} \cdot \text{cm}; \quad \sigma_{vgl} = 536\ \text{kp/cm}^2$$

Man kann diese Berechnung auch auf anderem Wege durchführen. Für Stelle I berechnet man zuerst die vorhandene Biegespannung σ_b für den Durchmesser d = 60 mm.

$$\sigma_b = \frac{M_{bres}}{W} = \frac{7430\ \text{kp} \cdot \text{cm}}{21{,}21\ \text{cm}^3} = 350\ \text{kp/cm}^2$$

Dann berechnet man die vorhandene Drehspannung τ_t für den gleichen Durchmesser.

$$\tau_t = \frac{M_t}{W_t} = \frac{6510\ \text{kp} \cdot \text{cm}}{42{,}42\ \text{cm}^3} = 153{,}5\ \text{kp/cm}^2$$

Die Vergleichsspannung σ_{vgl} erhält man aus der Gleichung

$$\sigma_{vgl} = \sqrt{\sigma_b^2 + (\sqrt{3}\,\alpha_o\,\tau_t)^2}$$

Zuerst wird der zweite zu quadrierende Ausdruck berechnet. In der linken Hälfte der Skala A wird mit dem Läuferstrich die 3 eingestellt, der Stab gewendet und die Zunge so verschoben, daß 0,73 auf der Skala CI unter dem Läuferstrich steht. Zur Multiplikation mit $\tau_t = 153{,}5$ wird nun der Läuferstrich auf diesen Wert der Skala C geschoben und das Ergebnis 194 auf der Skala D abgelesen. Abb. 18 zeigt die zugehörige Stabeinstellung

$$\sqrt{3} \cdot 0{,}73 \cdot 153{,}5 = 194$$

Mit diesem Wert erhält man

$$\sigma_{vgl} = \sqrt{350^2 + 194^2} = 400 \text{ kp/cm}^2$$

Führt man diese Rechnungen für die Stelle B aus, so erhält man ebenfalls die bekannten Ergebnisse.

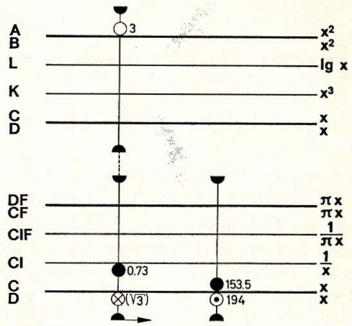

Abb. 18

Die Winkelfunktionen auf dem Rechenstab

Prof. Wilhelm Bier

Die Winkelfunktionen bieten reichlich Gelegenheit, den Rechenstab mit Vorteil anzuwenden. Durch seine Anwendung wird ein vertieftes Verständnis grundlegender Beziehungen der Trigonometrie gewonnen und gleichzeitig eine Einführung des Stabrechnens in die Trigonometrie ermöglicht.

1. Die Sinusskala

Die Sinusskala beginnt bei 5,7°, den zugehörigen Funktionswert 0,1 findet man auf der Skala D, sie reicht bis 90° mit dem Funktionswert 1,0. Für Winkel zwischen 0,57° und 5,7° steht ebenfalls eine ganze Skalenlänge zur Verfügung, nämlich die Skala ST. In diesem Bereich gilt die Beziehung

$$\sin\alpha \approx \tan\alpha \approx \operatorname{arc}\alpha$$

mit ausreichender Genauigkeit.

Bei einigen Rechenstäben finden wir auf den Skalen C, D und CI die mit ϱ bezeichneten Marken für den Wert

$$\varrho = \frac{\pi}{180} = 0{,}01745 = \operatorname{arc} 1^\circ$$

Man überzeuge sich nun, daß der Sinus und auch der Tangens kleiner Winkel durch die Multiplikation

$$\varrho\,\alpha \approx \sin\alpha \approx \tan\alpha \qquad (\alpha \text{ in } ^\circ)$$

zu finden ist und daß der auf das Produkt $\varrho\,\alpha$ gestellte Läuferstrich gerade den Winkel α auf der Skala ST anzeigt. Dabei erkennt man, daß die Teilung der Skala ST mit der der Skala C übereinstimmt. Die Skala ST ist lediglich um $\pi/180$ gegen die Skala D versetzt.

Den Sinus von Winkeln unter 0,57° kann man ebenfalls durch die Skala ST ermitteln, weil die Beziehung $\sin\alpha \approx \alpha$ für kleinere Winkel noch genauer gilt. Abb. 1 zeigt die Stabeinstellung für

$\sin 0{,}283^\circ = 0{,}00494$

$\sin 0{,}0161^\circ = 0{,}000281$

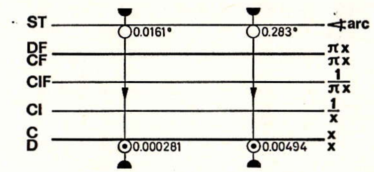

Abb. 1

Wenn die Winkel in Minuten oder in Sekunden angegeben sind, ist erst eine Umrechnung in Grad erforderlich, bevor der Funktionswert mit Hilfe der Skala ST errechnet werden kann. Bei einigen Rechenstäben kann man aus dem in Minuten oder Sekunden angegebenen Winkel direkt den Funktionswert berechnen. Dazu dienen die Marken

$$\varrho' = \frac{180}{\pi}\,60 = 3438 \quad \text{und} \quad \varrho'' = \frac{180}{\pi}\,3600 = 206\,265$$

mit den allgemeinen Beziehungen

$$\sin\alpha' = \operatorname{arc}\alpha' = \frac{\alpha'}{\varrho'} \qquad (\alpha' \text{ in Minuten})$$

und

$$\sin\alpha'' = \operatorname{arc}\alpha'' = \frac{\alpha''}{\varrho''} \qquad (\alpha'' \text{ in Sekunden})$$

Abb. 2 zeigt die Stabeinstellung für ein Beispiel mit ϱ' und Abb. 3 diejenige für ein Beispiel mit ϱ''.

$\sin 26{,}1' = 0{,}00759$

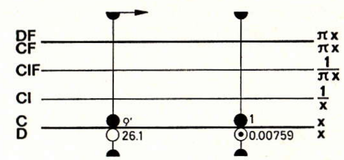

Abb. 2

$\sin 7{,}45'' = 0{,}0000361$

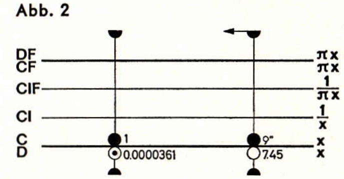

Abb. 3

Nun wollen wir einige wiederholt angewendete Beziehungen mit dem Rechenstab überprüfen. Zuerst $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

$$\sin^2 42{,}5^\circ + \cos^2 42{,}5^\circ = 0{,}456 + 0{,}544 = 1$$

$$\text{und } \sin^2 65^\circ + \cos^2 65^\circ = 0{,}821 + 0{,}179 = 1$$

Wir stellen die Winkel auf der Skala S ein und lesen die Quadratwerte auf der Skala A ab, wie Abb. 4 für das 2. Beispiel zeigt. Dabei müssen wir den ARISTO-Studio allerdings wenden.

$\sin^2 65° = 0{,}821$

$\cos^2 65° = 0{,}179$

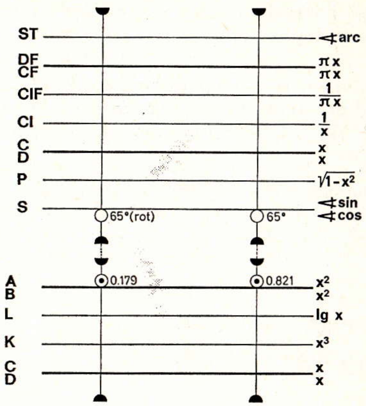

Abb. 4

In ähnlicher Weise kann die Beziehung $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ überprüft werden.

$$\cos^2 23{,}5° - \sin^2 23{,}5° = \cos 47°; \quad 0{,}841 - 0{,}159 = 0{,}682$$

Wir wählen als weiteres Beispiel die Beziehung $\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha$.

$$2 \sin 17° \cdot \cos 17° = \sin 34°; \quad 2 \cdot 0{,}292 \cdot 0{,}956 = 0{,}559$$

2. Die Tangensskala

Der Rechenstab gestattet die unmittelbare Ablesung der Tangenswerte für Winkel zwischen 5,7° und 45°, wobei $\tan\alpha$ im Bereich von 0,1 bis 1 liegt. Durch die Beziehung

$$\tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha} = \frac{1}{\tan(90° - \alpha)}$$

wird die Ermittlung des Tangens eines Winkels zwischen 45° und 84,3° auf die des komplementären Winkels zurückgeführt, wobei der Tangenswert auf der Skala CI abgelesen wird. Er liegt im Bereich von 1 bis 10. Abb. 5 zeigt die Stabeinstellung für zwei Beispiele.

$\tan 12{,}9° = 0{,}229$

$\tan 70{,}6° = 2{,}84$

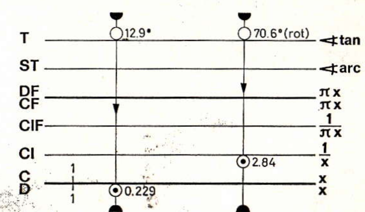

Abb. 5

Für Winkel unter 5,7° wird wegen der hier gültigen Näherung

$$\tan\alpha \approx \alpha \approx \sin\alpha$$

die gleiche Ablesung verwendet wie für die Sinuswerte dieser kleinen Winkel.

Da schließlich für Winkel über 84,3° der Komplementwinkel unter 5,7° liegt, benutzt man gleichfalls zur Winkeleinstellung die Skala ST, liest aber den Tangenswert $10 < \tan\alpha < 100$ auf der Skala CI ab. Abb. 6 zeigt die Stabeinstellung für zwei Beispiele.

$\tan 3{,}22° = 0{,}0562$

$\tan 85{,}3° = 12{,}2$

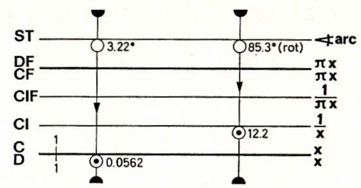

Abb. 6

Während die Tabellen den Stellenwert bzw. die Kennziffer ohne Mühe liefern, erfordert die Ermittlung der Tangenswerte mit dem Rechenstab hinsichtlich Einstellung und Stellenwert jedesmal Denkarbeit, was jedoch durchaus positiv zu werten ist.

Es lassen sich nun z. B. folgende Beziehungen rasch überprüfen:

Im ebenen Dreieck gilt:

$$\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha \cdot \tan\beta \cdot \tan\gamma.$$

Für die Winkel $\alpha = 15°$; $\beta = 65°$ und $\gamma = 100°$ erhält man

$$\begin{aligned} \tan 15° &= 0{,}268 \\ \tan 65° &= 2{,}14 \\ \tan 100° = -\tan 80° &= \underline{-5{,}67} \\ & -3{,}262 \end{aligned}$$

Das durch Addition gewonnene Ergebnis wird durch Multiplikation bestätigt.

$$0{,}268 \cdot 2{,}14 \cdot (-5{,}67) = -3{,}26$$

Für die Winkel $\alpha = 2°$; $\beta = 38°$ und $\gamma = 140°$ erhält man

$$\begin{aligned} \tan 2° &= 0{,}0349 \\ \tan 38° &= 0{,}781 \\ \tan 140° = -\tan 40° &= \underline{-0{,}839} \\ & -0{,}0231 \end{aligned}$$

Auch dieses Ergebnis wird durch Multiplikation bestätigt.

Ferner gilt im ebenen Dreieck

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma$$

Für die Winkel $\alpha = 2°$; $\beta = 75°$ und $\gamma = 103°$ erhält man

$$\begin{aligned} \sin 4° &= 0{,}0698 \\ \sin 150° &= 0{,}5 \\ \sin 206° = -\sin 26° &= \underline{-0{,}438} \\ & 0{,}1318 \end{aligned}$$

und das Produkt $\quad 4 \cdot \sin 2° \cdot \sin 75° \cdot \sin 103° = 4 \cdot 0{,}0349 \cdot 0{,}966 \cdot 0{,}974 = 0{,}1315$

Zum Schluß sei noch die Formel für die Fläche A eines Vielecks herausgegriffen, das einen Kreis mit dem Radius r umschreibt: $\quad A = n \cdot r^2 \cdot \tan\frac{180°}{n}$

Für genügend großes n und für $r = 1$ strebt der Flächeninhalt dem Wert π zu, während der Umfang gegen 2π konvergiert. Wir wählen die Werte für n so, daß sich für die Winkel ganze Zahlen ergeben, z. B.

$$\begin{aligned} n = 9 \quad & A = 9 \cdot \tan 20° = 3{,}28 \\ 18 \quad & 18 \cdot \tan 10° = 3{,}175 \\ 36 \quad & 36 \cdot \tan 5° = 3{,}15 \end{aligned}$$

So kann die Konvergenz gegen π leicht mit dem Rechenstab gezeigt werden.

Praktische Berechnung von Exponentialgleichungen in Physik und Chemie mit dem ARISTO-Studio

Fortsetzung aus Heft 6 und 7

Dr. Werner Ruppert

5. Zusammenfassung

Bisher wurde an Beispielen vorgeführt, daß gewisse Exponentialgesetze mit einer Rechenstabeinstellung berechnet werden können. Folgend wird gezeigt, bei welchen Naturgesetzen diese einfache Berechnung möglich ist.

Der charakteristische Differentialansatz dieser Gesetze lautet:

Die relative Änderung der einen Variablen ist proportional der absoluten Änderung der anderen Variablen.

$$\frac{dy}{y} = d\,(\ln y) = \text{const} \cdot dx \qquad (16)$$

Durch Integration zwischen den Grenzen y_1 und y_2 und den ihnen entsprechenden Grenzen x_1 und x_2 ergibt sich die Gleichung, die die Abhängigkeit der Variablen voneinander beschreibt.

$$\ln \frac{y_2}{y_1} = \text{const} \cdot (x_2 - x_1) \qquad (17)$$

Eine Änderung von x um das Intervall $i = x_2 - x_1$ hat eine Änderung von y_1 auf y_2 zur Folge. Wie bereits in Abschn. 1 erläutert, bezeichnet man $y_2/y_1 = r$ als Restzahl und schreibt allgemein:

$$\frac{\log r_1}{i_1} = \frac{\log r_2}{i_2} = \frac{\log r_3}{i_3} = \ldots = \text{const} \qquad (18)$$

Die Logarithmen der Restzahlen verhalten sich wie die korrespondierenden Intervalle.

Für praktische Rechnungen ist die für Logarithmen beliebiger Basis geltende Gleichung (18) am bequemsten. Wenn drei Werte der Proportion bekannt sind, kann der vierte mit dem Rechenstab ARISTO-Studio berechnet werden. Man stellt dazu zwei bekannte, zusammengehörige Werte übereinander, die Restzahl r auf der Exponentialskala und das Intervall i auf der Grundskala. Schiebt man den Läuferstrich nun auf den dritten bekannten Wert, so kann man das Ergebnis auf der korrespondierenden Skala ablesen.

Durch diese Einstellung ist der Rechenstab zu einer Tabelle geworden, so daß man eine Vielzahl zusammengehöriger Werte überblicken und ablesen kann. Wir haben somit wieder das für das Stabrechnen günstige Proportionsprinzip und es kommt nur darauf an, die Aufgaben in die Proportionsform zu bringen.

Um festzustellen, ob ein Naturgesetz mit einer Einstellung eines Rechenstabes mit Exponentialskalen berechnet werden kann, muß man also prüfen, ob es in die Form der Gleichung (18) gebracht werden kann. In der folgenden Tabelle sind einige wichtige passende Gesetze zusammengestellt. In der Tabelle ist angegeben, welche Größe als Restzahl und welche als Intervall bezeichnet wird.

Gesetz	Restzahl	Intervall	Vorzeichen der Konstanten
Dämpfung von Schwingungen	Schwingungsenergie	Zeit	−
Zeitliche Abnahme der Schallintensität in einem Raum	Intensität	Zeit	−
Abkühlung eines Körpers	Temperatur	Zeit	−
Relaxationstheorem von Maxwell	Zähelastische Spannungsdiff.	Zeit	−
Radioaktiver Zerfall	Masse	Zeit	−
Chemische Reaktionen 1. Ordnung	Konzentration	Zeit	−
Zinseszinsberechnung	Kapital	Zeit	+
Absorption von Strahlen (Licht-, Röntgen-, Gammastrahlen, Schallwellen)	Intensität	Schichtdicke	−
Hypsometrisches Gesetz	Druck	Höhe	−
Arbeitsleistung bei isothermer und reversibler Volumenänderung idealer Gase	Volumen	zugeführte Arbeit	−
Druckabhängigkeit der Entropie eines idealen Gases	Druck	Entropie	−
Druckabhängigkeit der Viskosität von Ölen	Fluidität Viskosität	Druck	− +

Zum Abschluß sollen von drei Gesetzen praktische Beispiele durchgerechnet werden.

5.1. Rohrzuckerinversion

Unter Rohrzuckerinversion versteht man die Spaltung von Rohrzucker in Trauben- und Fruchtzucker. Es handelt sich um eine chemische Reaktion erster Ordnung.

Bei einer Temperatur von 15° C und einer 1 n $H^{\bullet}$-Konzentration habe man aufgrund der Drehung der Ebene des polarisierten Lichtes festgestellt, daß nach 30 Minuten noch 91,31 % des Rohrzuckers vorhanden sind. Es ist gefragt, wann die Hälfte des Rohrzuckers invertiert (Halbwertzeit) und wann die Konzentration an Rohrzucker nur noch 1‰ beträgt.

Der Ansatz lautet:

$$\frac{\ln 0{,}9131}{30} = \frac{\ln 0{,}5}{i_1} = \frac{\ln 0{,}001}{i_2}$$

Man stellt 30 auf der Skala C unter die zugehörende Restzahl 0,9131 auf der Skala LL01. Dann stellt man den Läuferstrich auf 0,5 der Skala LL02 und liest darunter auf Skala C als erstes Ergebnis 229 Minuten ab. Stellt man den Läuferstrich anschließend auf 10^{-3}

der Skala LL03, so findet man auf Skala C das zweite Ergebnis zu 2280 Minuten. Abb. 8 zeigt diese Stabeinstellung.

$$\frac{\ln 0{,}9131}{30} = \frac{\ln 0{,}5}{229} = \frac{\ln 10^{-3}}{2280}$$

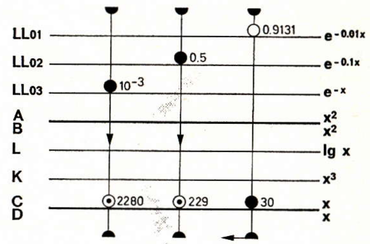

Abb. 8

5.2. Lichtabsorption (Lambert'sches Gesetz)

Gefragt ist, wie dick eine Scheibe sein darf, die 1% des Lichtes (Restzahl r = 0,99) absorbiert, wenn eine 15 mm dicke Schicht die Strahlung um 70% (r = 0,30) schwächt.

Es gilt der Ansatz

$$\frac{\ln 0{,}30}{15} = \frac{\ln 0{,}99}{x}$$

Man stellt die Rechenstabzunge so ein, daß 15 auf der Skala C unter 0,30 auf der Skala LL03 steht. Nun schiebt man den Läuferstrich auf 0,99 der Skala LL01 und liest darunter das Ergebnis 0,125 mm auf der Skala C ab. Abb. 9 zeigt die Stabeinstellung.

$$\frac{\ln 0{,}30}{15} = \frac{\ln 0{,}99}{0{,}125}$$

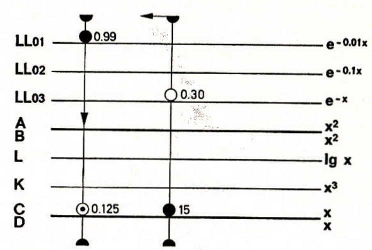

Abb. 9

5.3. Viskosität

Gefragt ist, bei welchem Druck sich die Viskosität eines Maschinenöls verdoppelt hat, wenn sie bei einem Druck von 500 atü das 4,24fache beträgt.

Es gilt der Ansatz

$$\frac{\ln 4{,}24}{500} = \frac{\ln 2{,}0}{x}$$

Man stellt 500 auf der Skala C über 4,24 auf der Skala LL3. Um nun das Ergebnis ablesen zu können, muß man die Rechenstabzunge durchschieben. Über 2,0 auf der Skala LL2 findet man das Ergebnis 240 auf der Skala C.

ARISTO-Sonderrechenstäbe

Die Beiträge dieser Zeitschrift befassen sich hauptsächlich mit dem Rechenstab ARISTO-Studio, weil wir überzeugt sind, daß der ARISTO-Studio für Ingenieurschulen, Technische Hochschulen und Universitäten der geeignetste Rechenstab ist. Das schließt nicht aus, daß für spezielle Fälle unsere Sonderrechenstäbe mit Vorzug benutzt werden. Deshalb sind hier zur Information die charakteristischen Merkmale derjenigen Rechenstäbe zusammengestellt, die in der Berufspraxis Bedeutung erlangt haben.

ARISTO-MultiLog 0970

Ein Zweiseiten-Rechenstab mit den Qualitäten des ARISTO-Studio, aber mit dem wesentlichen Unterschied, daß die Skalen der trigonometrischen Winkelfunktionen auf der Zunge angeordnet sind und daß die Exponentialskalen um die Skalen LL00 und LL0 erweitert sind, deren Bereich von 0,990 bis 0,999 und von 1,001 bis 1,010 reicht.

ARISTO-HyperboLog 0971

Ein dem ARISTO-MultiLog sehr ähnlicher Rechenstab. Anstelle der Skalen LL0 und LL00 sind die Skalen der hyperbolischen Funktionen sinh und tanh auf dem Körper angeordnet. Mit ihrer Hilfe können die hyperbolischen Funktionen abgelesen werden; wichtiger ist aber, daß mit diesen Skalen gerechnet wird, ohne die Funktionswerte ablesen zu müssen. Die Umwandlung trigonometrischer und hyperbolischer Funktionen mit komplexem Argument von der Komponentenform in die Vektorform und umgekehrt wird durch das Zusammenwirken der Skalen der trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen außerordentlich abgekürzt.

ARISTO-Geodät 0958

Ein Zweiseiten-Rechenstab mit dem Teilungsbild des ARISTO-Studio auf der einen und Spezialskalen für Tachymetrie und Pythagoras-Kontrollen auf der anderen Seite. Die trigonometrischen Funktionen sind entweder in 400°-Teilung dezimal oder in 360° sexagesimal geteilt.

ARISTO-Stahlbeton 939

Ein Rechenstab zur Vereinfachung der Berechnungen im Stahlbetonbau. Dieser Rechenstab, System Göttsch, hat den Vorteil, daß die komplizierten Beziehungen der am häufigsten vorkommenden Bemessungsaufgaben mit einer Zungeneinstellung nach einem einprägsamen Einstellschema schnell zu übersehen sind. Das übersichtliche Rechnen gilt für Stahlspannungen σ_e von 1200 bis 3500 kp/cm² und Betonspannungen σ_b von 30 bis 120 kp/cm².

ARISTO