

ARISTO

MITTEILUNGEN FÜR INGENIEUR- UND HOCHSCHULEN

HEFT 13

Aus dem Inhalt:

Satellitenphysik

Die Seillinie (Kettenlinie)

ARISTO-WERKE · DENNERT & PAPE KG · HAMBURG

Herausgeber: ARISTO-Kundendienst
ARISTO-WERKE · DENNERT & PAPE KG
2 Hamburg 50 · Postfach 500380

Schriftleiter: Dipl.-Ing. Rolf Jäger

Mitarbeiter dieses Heftes:

Prof. Franz Lehner
A — 8010 Graz, Plüddemanngasse 34, Österreich

Heft 13, Oktober 1970

Alle Rechte vorbehalten · Nachdruck mit Genehmigung des Herausgebers gestattet
© 1970 by ARISTO-WERKE · DENNERT & PAPE KG · HAMBURG
Printed in Germany · IO/RALA

Satellitenphysik

Prof. Franz Lehner

Ursprünglich wurden in der Astronomie nur die Monde, die Begleiter der Planeten, als Satelliten bezeichnet. Heute verwendet man dieses Wort für jeden Begleiter eines Himmelskörpers. In diesem Sinne sind Planeten als Begleiter der Sonne auf ihrer Bahn in der Milchstraße und Monde als Begleiter der Planeten auf ihrer Bahn um die Sonne natürliche Satelliten. Von Raketen in den Weltraum beförderte Objekte sind dagegen künstliche Satelliten. Meist bilden sich diese zu Begleitern der Erde aus, manche umwandern aber auch den Mond oder die Sonne. In nicht allzuferner Zeit werden künstliche Satelliten vielleicht sogar andere Planeten umkreisen und ausspionieren.

I. Newton hatte erkannt, daß es die gleiche physikalische Ursache ist, die Monde um Planeten, die Planeten um die Sonne kreisen und die Körper auf unserer Erde zu Boden fallen läßt: Die Massenanziehungskraft oder Gravitation. Diese läßt auch die künstlichen Satelliten ihre Bahn ziehen.

Das Gesetz der Gravitation verbunden mit den Planetenbewegungsgesetzen, die J. Kepler aus Beobachtungen gefolgert hatte, bilden den Inhalt der Satellitenphysik, der mathematisch wesentlich umfangreicher ist, als die meist spärliche Darstellung in Lehrbüchern angibt. Aus diesem Grunde sei erst eine kurze Übersicht über die wesentlichsten mathematischen Zusammenhänge gegeben, bevor auf Berechnungsprobleme eingegangen wird.

1. Satellitengesetze

1.1. Zweikörperproblem

Die freie Bewegung eines Körpers im Weltraum wird stets auf einen bestimmten Himmelskörper bezogen. Der bewegte Körper, der Satellit, und der Bezugskörper, der Zentralkörper, bilden die physikalische Situation. Als Verhaltensursache des Satelliten nimmt man nur diesen Zentralkörper an. Alle eventuell in Wirklichkeit auftretenden weiteren Einflüsse bleiben unberücksichtigt, wie es in der Physik üblich ist.

Wir befassen uns mit dem störungsfreien Idealfall, denn schon das Dreikörperproblem, wie etwa die Bewegung unseres Mondes unter dem Einfluß von Erde und Sonne, oder der Einfluß der Gashölle auf die Satellitenbewegung sind in geschlossenen mathematischen Gleichungen nicht mehr exakt erfaßbar.

1.2. Gravitationsgesetz

Im Jahre 1660 formulierte I. Newton das Gesetz über die Ursache der Planetenbewegung:

Zwei Massen m_1 und m_2 üben aufeinander stets die Anziehungskraft F aus. Sie wächst mit der Größe der Massen m und nimmt mit dem Quadrat ihrer Entfernung r ab.

$$F = k \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

k ist die Gravitationskonstante. Der Idealfall, in dem dieses Gesetz uneingeschränkt gilt, liegt dann vor, wenn die Massen durch Massenpunkte in ihrem geometrischen Mittelpunkt ersetzt gedacht werden können. Dies ist z. B. der Fall, wenn die Massen weit voneinander entfernt sind oder wenn die Massen kugelsymmetrisch aufgebaut sind.

Für die praktische Anwendung wird obige Gleichung umgestellt und durch Einführung anderer Begriffe umgestaltet. Wir setzen auf die eine Seite des Gleichheitszeichens die

Ursache, auf die andere Seite die Wirkung:

$$m_1 k = \frac{F}{m_2} r^2.$$

Die Charakteristik der Ursache ist die Gravitationszahl

$$C = m_1 k,$$

die der Wirkung ist die Fallbeschleunigung

$$g = \frac{F}{m_2}.$$

Das Gravitationsgesetz lautet nun:

$$m_1 k = C = g r^2. \quad (1)$$

1.3. Erstes Keplergesetz

Im Jahre 1609 veröffentlichte J. Kepler seine für den Beweis der Heliozentrität des Planetensystems sehr wichtige Beobachtung:

Die Planeten bewegen sich in Ellipsen, in deren einem Brennpunkt sich die Sonne befindet.

Wir können heute verallgemeinern:

Satelliten bewegen sich im Gravitationsfeld auf Kegelschnittlinien, in deren einem Brennpunkt sich der Zentralkörper befindet. Den Mittelpunktsabstand von Zentralkörper und Satellit nennen wir den Radiusvektor r .

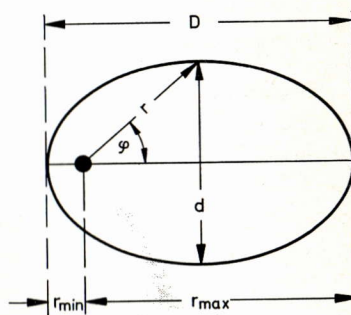


Abb. 1

1.3.1. Elliptische Bahn

Die Hauptachse der Ellipse heißt Apsidenlinie D . Sie ist die Summe aus der größten Entfernung r_{\max} und der kleinsten Entfernung r_{\min} der Mittelpunkte. Die halbe Länge der Apsidenlinie ist die mittlere Entfernung \bar{r} . Die Form der Ellipse wird entweder durch die Exzentrizität ε , durch die Brennpunktsentfernung f oder durch die Bahnbreite d charakterisiert.

$$D = r_{\max} + r_{\min} = 2\bar{r} \quad (2)$$

$$f = D\varepsilon = r_{\max} - r_{\min} = \sqrt{D^2 - d^2} \quad (3)$$

1.3.2. Parabolische Bahn

Wächst die Apsidenlinie auf unendlich an ($D = \infty$), so ist die Bahn parabolisch gekrümmt. Aus der Parabel ergibt sich, daß $\varepsilon = 0$ ist. Die kleinste Entfernung r_{\min} ist gleich dem Halbparameter p .

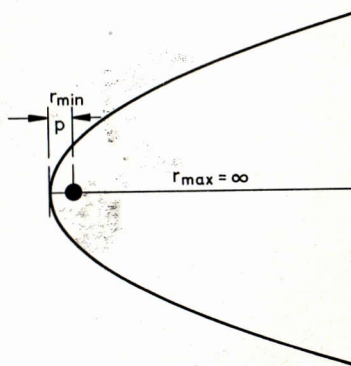


Abb. 2

1.3.3. Hyperbolische Bahn

Die Steigerung der Bahngeschwindigkeit über die Parabelbedingung hinaus führt zu hyperbolischem Bahnverlauf. Die Fluchtbahnen aus dem Gravitationsfeld sind Hyperbeln. Die Apsidenlinie D entspricht der reellen Hyperbelachse allerdings charakterisiert durch negatives Vorzeichen des Wertes. Ebenfalls negatives Vorzeichen erhält die Brennpunktsentfernung f . Die Exzentrizität ε wird größer als 1.

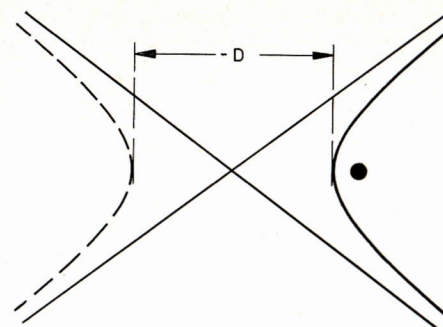


Abb. 3

Wenn ein Weltraumkörper einem Gravitationsherd entweicht, so geht er nicht verloren. Rundherum warten bereits andere Gravitationsfelder auf ihn, die sein weiteres Schicksal bestimmen.

1.4. Zweites Keplergesetz

Kepler veröffentlichte zugleich mit seinem ersten Gesetz auch folgende Feststellung:

„Der Radiusvektor r überstreicht in gleichen Zeiten stets gleiche Flächen.“

Daraus ergibt sich die Gleichung der Bahngeschwindigkeit eines Satelliten:

$$v = \sqrt{2C \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{D} \right)}. \quad (4)$$

Setzen wir für r die mittlere Entfernung $\bar{r} = \frac{D}{2}$ ein, so erhalten wir die mittlere Geschwindigkeit des Satelliten:

$$\bar{v} = \sqrt{2 \frac{C}{D}}. \quad (5)$$

1.5. Astronautische Geschwindigkeiten

Um die Eigenschaften des Gravitationsfeldes zu charakterisieren, verwendet die klassische Physik die Fallbeschleunigung g . Im Zeitalter der Weltraumfahrt werden die Gravitationseigenschaften meistens durch die Angabe charakteristischer Geschwindigkeiten umschrieben.

Die 1. astronautische Geschwindigkeit v_1 ist diejenige Geschwindigkeit, die ein Körper am betrachteten Ort besitzen müßte, um parallel zur Zentralkörperoberfläche seine Bahn ziehen zu können. Damit muß $D = 2r$ sein. Aus Gleichung (4) folgt:

$$v_1 = \sqrt{\frac{C}{r}}. \quad (6)$$

Die 2. astronautische Geschwindigkeit v_2 ist diejenige Geschwindigkeit, die ein Körper am betrachteten Ort besitzen müßte, um dem Zentralkörper gerade entfliehen zu können. Mit $D = \infty$ ergibt sich aus Gleichung (4):

$$v_2 = \sqrt{2 \frac{C}{r}}. \quad (7)$$

1.6. Umlaufzeit

Kepler veröffentlichte 1619 zu seinen beiden ersten Gesetzen noch ein drittes: „Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich zueinander wie die Kuben der Apsidenlinien.“

Später wurde auch die Beziehung zum Gravitationsfeld des Zentralkörpers gefunden. Wir erhalten daraus den Zusammenhang zwischen Umlaufzeit und Apsidenlinie eines Satelliten

$$\frac{D^3}{T^2} = \frac{2C}{\pi^2} \quad (8)$$

1.7. Einheiten

Bei der Behandlung von Satellitenproblemen bringt die Verwendung unterschiedlichster Einheiten Verwirrung in die Darstellung. Wir legen uns daher konsequent auf das MKS-Einheitensystem fest. Damit ist die Gravitationskonstante

$$k = 0,667 \cdot 10^{-10} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}.$$

Für die interessierenden physikalischen Größen verwenden wir im einzelnen folgende Einheiten:

Länge	Masse	Kraft Gewicht	Zeit	Geschwindigkeit	Beschleunigung	Gravitationszahl
m	kg	N	s	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$	$\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	$\frac{\text{m}^3}{\text{s}^2}$

2. Anwendungen

Für einige Himmelskörper unseres Sonnensystems werden nun interessierende Daten berechnet, wobei von Werten ausgegangen wird, die man fast in jedem Lexikon findet.

2.1. Gravitationszahlen

Die Masse eines Himmelskörpers liegt als gegebener Wert vor. Die zugehörige Gravitationszahl C, die bei den meisten Gleichungen benötigt wird, wollen wir uns zunächst errechnen.

Wir stellen Gleichung (1) etwas um und gewinnen dadurch gleich die Rechenvorschrift

$$\frac{1}{k} = \frac{m}{C}.$$

Setzen wir noch den Zahlenwert für k ein, so erhalten wir

$$\frac{10^{10}}{0,667} = \frac{m}{C}$$

und erkennen, daß die Zehnerpotenz der Gravitationszahl stets um 10 kleiner ist als die der Masse.

Wir stellen die 1 der Skala C über 0,667 der Skala D, durch Verschieben des Läuferstriches auf m der Skala C lesen wir darunter auf der Skala D den Wert für C ab. Die Stabeinstellung ist in Abb. 4 wiedergegeben.

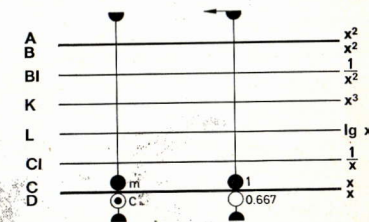


Abb. 4

	Sonne	Erde	Venus	Mars	Jupiter	Erdmond
m in kg	$1,99 \cdot 10^{30}$	$5,98 \cdot 10^{24}$	$4,87 \cdot 10^{24}$	$64,0 \cdot 10^{22}$	$19,0 \cdot 10^{26}$	$7,35 \cdot 10^{22}$
C in $\frac{\text{m}^3}{\text{s}^2}$	$1,33 \cdot 10^{20}$	$3,99 \cdot 10^{14}$	$3,25 \cdot 10^{14}$	$42,7 \cdot 10^{12}$	$12,7 \cdot 10^{16}$	$4,90 \cdot 10^{12}$

2.2. Feldeigenschaften an der Oberfläche

Die Eigenschaften der Gravitation an der Oberfläche eines Himmelskörpers beschreiben wir entweder durch die Fallbeschleunigung g nach Gleichung (1) oder durch die astronautischen Geschwindigkeiten nach den Gleichungen (6) und (7). Mit dem Radius R des Himmelskörpers erhalten wir die Gleichungskette

$$\frac{C}{R} = \frac{v_1^2}{1} = \frac{v_2^2}{2} = g R = \frac{g}{1/R}$$

Berechnen wir zunächst als Beispiel die Werte für die Erde und gehen dabei von den Größen $R = 6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$ und $C = 3,99 \cdot 10^{14} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$ aus.

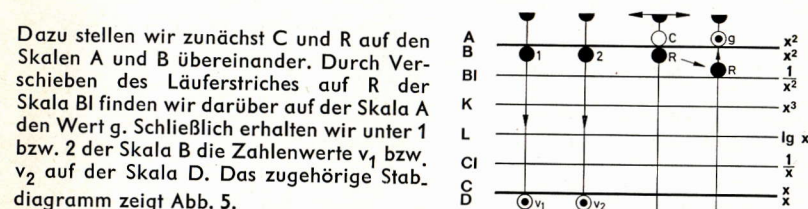


Abb. 5

In der folgenden Tabelle sind die Ergebnisse für die hier betrachteten Himmelskörper zusammengefaßt.

	Sonne	Erde	Venus	Mars	Jupiter	Erdmond
R in m	$6,96 \cdot 10^8$	$6,38 \cdot 10^6$	$6,20 \cdot 10^6$	$3,40 \cdot 10^6$	$71,5 \cdot 10^6$	$1,74 \cdot 10^6$
v_1 in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$	$4,37 \cdot 10^5$	$7,91 \cdot 10^3$	$7,24 \cdot 10^3$	$3,54 \cdot 10^3$	$42,1 \cdot 10^3$	$1,68 \cdot 10^3$
v_2 in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$	$6,18 \cdot 10^5$	$11,2 \cdot 10^3$	$10,24 \cdot 10^3$	$5,01 \cdot 10^3$	$59,6 \cdot 10^3$	$2,37 \cdot 10^3$
g in $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	275	9,81	8,46	3,69	24,8	1,62

2.3. Umlaufzeit, Apsidenlinie

In den meisten Tabellen finden wir die mittlere Entfernung angegeben. Aus der mittleren Entfernung erhalten wir durch Multiplikation mit 2 die Apsidenlinie D, die wir als Bahncharakteristik eingeführt haben, und können nun die Umlaufzeit T berechnen. Dafür stellen wir Gleichung (8) etwas um:

$$\frac{\pi^2}{2} = \frac{T^2}{C D^3}$$

Um die erforderliche Stabeinstellung besser erkennen zu können, ziehen wir die 6. Wurzel aus obigen Größen. Wir erhalten

$$\sqrt[6]{\frac{\pi^2}{2}} = \frac{\sqrt[3]{T}}{\sqrt[6]{C D^3}}$$

was wir noch umschreiben zu

$$\frac{\sqrt[3]{\frac{\pi}{\sqrt{2}}}}{\sqrt[3]{\sqrt{C}}} = \frac{\sqrt[3]{T}}{\sqrt[3]{D}}$$

Die Konstante $\frac{\pi}{\sqrt{2}} = 2,22$ können wir unmittelbar einsetzen, die Hilfsgröße $\sqrt[3]{C}$ berechnen wir vorab. Sie beträgt für die

Sonne als Zentralkörper $\sqrt[3]{C} = 5,1 \cdot 10^6$

und für die Erde $\sqrt[3]{C} = 7,36 \cdot 10^4$. Die zugehörige Stabeinstellung beginnt also

damit, daß wir mit Hilfe des Läufers $\sqrt[3]{C}$ in A und 2,22 in K untereinander stellen. Wenn wir danach die Apsidenlinie D auf Skala A einstellen, finden wir schließlich auf Skala K die Umlaufzeit T, wie das Diagramm in Abb. 6 zeigt.

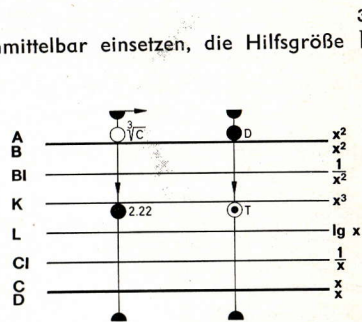


Abb. 6

Damit ergeben sich folgende Werte:

	Erde	Venus	Mars	Jupiter	Erdmond
D in m	$29,9 \cdot 10^{10}$	$21,6 \cdot 10^{10}$	$45,6 \cdot 10^{10}$	$1,56 \cdot 10^{12}$	$7,68 \cdot 10^8$
T in s	$31,5 \cdot 10^6$	$19,3 \cdot 10^6$	$59,3 \cdot 10^6$	$375 \cdot 10^6$	$2,37 \cdot 10^6$

2.4. Mittlere Geschwindigkeit

Wir verwenden Gleichung (5) in der Form

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{2C}{D}} \text{ bzw. } \bar{v} \cdot \sqrt{D} = \sqrt{2C}$$

und kommen mit besonders wenigen Stabeinstellungen aus, wenn wir die Rechnung auf den Quadratskalen beginnen und die Skalen BI und CI geschickt nutzen, wie im Diagramm Abb. 7 gezeigt.

Die 2 auf der Skala BI wird unter die Gravitationszahl C auf der Skala A eingestellt, durch Verschieben des Läuferstriches auf die Apsidenlinie D der Skala A erhalten wir \bar{v} auf der Skala CI.

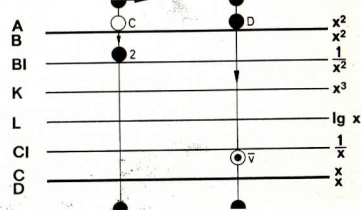


Abb. 7

Wir erhalten:

	Erde	Venus	Mars	Jupiter	Erdmond
\bar{v} in m/s	$29,8 \cdot 10^3$	$35,1 \cdot 10^3$	$24,2 \cdot 10^3$	$13,1 \cdot 10^3$	$1,02 \cdot 10^3$

2.5. Bahnform

In den astronomischen Tabellen ist die Exzentrizität ε der Bahn eine wesentliche Charakteristik. Mit den Gleichungen (2) und (3) finden wir die weiteren Beziehungen

für die Bahnelemente eines Satelliten

$$\varepsilon D = f; \quad \frac{D+f}{2} = r_{\max}; \quad \frac{D-f}{2} = r_{\min}; \quad d = \sqrt{D^2 - f^2}.$$

Auf deren Berechnung braucht aber nicht weiter eingegangen zu werden, da sie elementare Rechenoperationen enthalten. Es ergeben sich:

	Erde	Venus	Mars	Jupiter	Erdmond
ε	0,017	0,007	0,093	0,048	0,0549
f in m	$0,508 \cdot 10^{10}$	$0,151 \cdot 10^{10}$	$4,24 \cdot 10^{10}$	$0,0748 \cdot 10^{12}$	$0,422 \cdot 10^8$
r_{\max} in m	$15,2 \cdot 10^{10}$	$10,88 \cdot 10^{10}$	$24,9 \cdot 10^{10}$	$0,817 \cdot 10^{12}$	$4,05 \cdot 10^8$
r_{\min} in m	$14,7 \cdot 10^{10}$	$10,72 \cdot 10^{10}$	$20,7 \cdot 10^{10}$	$0,743 \cdot 10^{12}$	$3,63 \cdot 10^8$
d in m	$29,9 \cdot 10^{10}$	$21,6 \cdot 10^{10}$	$45,4 \cdot 10^{10}$	$1,558 \cdot 10^{12}$	$7,66 \cdot 10^8$

2.6. Extreme Geschwindigkeiten

Aus der Gleichung (4) können wir entnehmen, daß sich der wandernde Himmelskörper in Zentralkörperrnähe schneller und in Zentralkörperferne langsamer bewegt. Die größte Geschwindigkeit v_{per} besitzt er bei kleinstem Abstand r_{min} . Dieser Punkt heißt bei Bewegungen um die Sonne Perihel, bei Bewegungen um die Erde Perigäum. Die kleinste Geschwindigkeit v_{ap} tritt beim größten Abstand r_{max} auf. Entsprechend heißt dieser Punkt Aphel bzw. Apogäum.

Aus den Gleichungen (2), (4) und (5) erhalten wir die Beziehungen und zugehörigen Stabdiagramme

$$v_{\text{per}}^2 r_{\text{min}} = \bar{v}^2 r_{\text{max}} \quad v_{\text{ap}}^2 r_{\text{max}} = \bar{v}^2 r_{\text{min}}$$

wie in den Abb. 8 und 9 dargestellt.

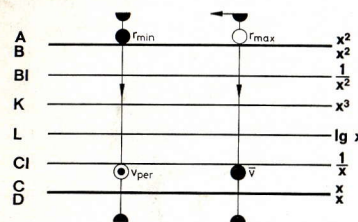


Abb. 8

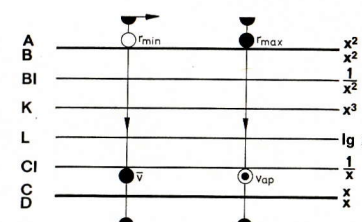


Abb. 9

Daraus folgen die Ergebnisse:

	Erde	Venus	Mars	Jupiter	Erdmond
v_{ap} in m/s	$29,3 \cdot 10^3$	$34,8 \cdot 10^3$	$22,1 \cdot 10^3$	$12,5 \cdot 10^3$	$0,964 \cdot 10^3$
v_{per} in m/s	$30,3 \cdot 10^3$	$35,3 \cdot 10^3$	$26,5 \cdot 10^3$	$13,7 \cdot 10^3$	$1,08 \cdot 10^3$

3. Anwendung bei Erdsatelliten

3.1. Aufgabenstellung

Wenn wir Berichte oder Tabellen über künstliche Erdsatelliten betrachten, so finden wir als Primärinformation nur gelegentlich Angaben wie bei den Planeten. Meist aber

enthalten sie Daten über die Höhe der Satelliten. Wie aus Abb. 10 ersichtlich, braucht man zu den Höhenangaben nur den Erdradius R zu addieren und erhält die Daten der Radiusvektoren. Damit haben wir die notwendigen Berechnungsgrundlagen. Es gelten folgende Beziehungen:

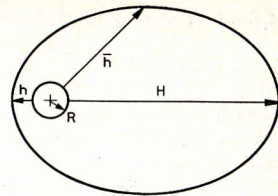


Abb. 10

$$\begin{aligned}
 H + R &= r_{\max} & H + h + 2R &= D & H &= \text{größte Höhe} \\
 h + R &= r_{\min} & H - h &= f & h &= \text{kleinste Höhe} \\
 \bar{h} + R &= \bar{r} & \frac{h + H}{2} &= \bar{h} & \bar{h} &= \text{mittlere Höhe}
 \end{aligned}$$

Die Berechnungen erfolgen dann nach den im vorigen Kapitel besprochenen Gesichtspunkten.

3.2. Satellitendaten

Aus der bereits überaus großen Zahl von künstlichen Erdsatelliten werden hierfür die ersten unbemannten (Sputnik 1, Explorer 1) und für die ersten bemannten (Wostok 1, Mercury 6) sowie für eine extreme Bahn (Explorer 6) die Daten angegeben.

$$R = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m.}$$

	Sputnik 1	Explorer 1	Wostok 1	Mercury 6	Explorer 6	
Start:	4. 10. 57	1. 2. 58	4. 4. 61 (J. Gagarin)	20. 2. 62 (J. H. Glenn)	7. 8. 59	
H	948	2540	302	257	42450	km
h	228	350	176	157	256	km
\bar{h}	588	1445	239	207	21353	km
r_{\max}	7318	8910	6672	6627	48820	km
r_{\min}	6598	6720	6546	6527	6626	km
\bar{r}	6958	7815	6609	6577	27723	km
D	13916	15630	13218	13154	55446	km
f	720	2190	126	100	42194	km
ε	0,0517	0,14	0,00953	0,0076	0,762	—
φ	87,04°	81,95°	89,45°	89,56°	40,4°	—
d	13900	15000	13200	13150	35900	km
T	$5,8 \cdot 10^3$	$6,9 \cdot 10^3$	$5,35 \cdot 10^3$	$5,3 \cdot 10^3$	$46 \cdot 10^3$	s
\bar{v}	$7,56 \cdot 10^3$	$7,13 \cdot 10^3$	$7,75 \cdot 10^3$	$7,78 \cdot 10^3$	$3,79 \cdot 10^3$	m/s
v_{per}	$7,97 \cdot 10^3$	$8,21 \cdot 10^3$	$7,82 \cdot 10^3$	$7,83 \cdot 10^3$	$10,3 \cdot 10^3$	m/s
v_{ap}	$7,17 \cdot 10^3$	$6,2 \cdot 10^3$	$7,68 \cdot 10^3$	$7,73 \cdot 10^3$	$1,4 \cdot 10^3$	m/s

3.3. Sonderfälle

Die kürzeste Umlaufzeit um die Erde hätte ein Satellit, der an der Erdoberfläche kreist. Seine Apsidenlinie betrage $D = 12,74 \cdot 10^6 \text{ m}$. Dazu ergibt sich als Umlaufzeit $T = 5060 \text{ s}$.

Die Eigendrehung der Erde besitzt die Rotationszeit $T = 86400 \text{ s}$. Startet man einen Satelliten in der Drehrichtung der Erde mit der gleichen Umlaufzeit, so scheint er

über einem bestimmten Ort still zu stehen. Für diesen Satelliten folgt die Apsidenlinie $D = 84,5 \cdot 10^6 \text{ m}$, die Höhe $h = 35,9 \cdot 10^6 \text{ m}$ und die Geschwindigkeit $v = 3,08 \cdot 10^3 \text{ m/s}$. In der Serie der Syncom-Satelliten wird dies für den internationalen Fernsprech- und Fernsehverkehr ausgenutzt.

3.4. Verlauf der Geschwindigkeit

Für die Berechnung der Geschwindigkeit eines Satelliten formen wir Gleichung (4) um $\sqrt{v^2(D-r)} = v^2 r$. Dafür ergibt sich die in Abb. 10 ersichtliche Rechenstabeinstellung. Unter $D-r$ auf der Skala A stellen wir v auf der Skala CI ein, durch Verschieben des Läuferstriches auf r der Skala A lesen wir auf der Skala CI das Ergebnis für v ab.

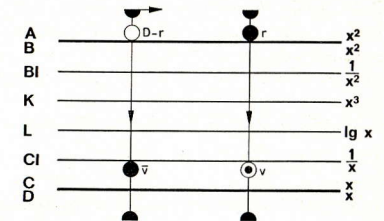


Abb. 11

Für Explorer 6, dessen Daten wir aus 3.2 entnehmen (Bahnweite $D = 55,45 \cdot 10^6 \text{ m}$, mittlere Geschwindigkeit $\bar{v} = 3,79 \cdot 10^3 \text{ m/s}$) ergeben sich zu den nachstehend gewählten Entfernungen r mit Hilfe dieser Formel die angegebenen Geschwindigkeiten v an diesen Orten:

r in m	$40,0 \cdot 10^6$	$35,0 \cdot 10^6$	$30,0 \cdot 10^6$	$25,0 \cdot 10^6$	$20,0 \cdot 10^6$
$D-r$ in m	$15,45 \cdot 10^6$	$20,45 \cdot 10^6$	$25,45 \cdot 10^6$	$30,45 \cdot 10^6$	$35,45 \cdot 10^6$
v in m/s	$2,36 \cdot 10^3$	$2,9 \cdot 10^3$	$3,49 \cdot 10^3$	$4,18 \cdot 10^3$	$5,05 \cdot 10^3$

3.5. Grenzen eines Gravitationsfeldes

Die Satellitengesetze gelten nur in dem Bereich, in dem das Gravitationsfeld des betrachteten Zentralkörpers alle anderen Gravitationsfelder „weit“ übertrifft (— Zweikörperproblem). Zur Beurteilung hierfür setzen wir die an einem bestimmten Punkt erregten Fallbeschleunigungen an. Es muß also die Fallbeschleunigung des Zentralkörpers (g_1) die Fallbeschleunigung des störenden Himmelskörpers (g_2) „weit“ übertreffen, d. h.: $g_1 \gg g_2$.

Bezüglich der Rechenstabgenauigkeit könnten wir festlegen:

$$g_1 = 1000 g_2$$

In der Satellitenphysik begnügen wir uns jedoch mit:

$$g_1 = 100 g_2$$

Die Grenze zwischen zwei Feldern, für die $g_1 = g_2$ gilt, nennen wir Gleichgewichtslinie.

Nehmen wir die Erde als Zentralkörper an, so ergibt die Gleichung (1) folgende Beziehungen der Abstände ($r_1 =$ Abstand vom Erdmittelpunkt, $r_2 =$ Abstand vom störenden Himmelskörper):

bezogen auf	$g_1 = g_2$	$g_1 = 100 g_2$	$g_1 = 1000 g_2$
Sonne	$577 r_1 = r_2$	$5770 r_1 = r_2$	$18250 r_1 = r_2$
Mond	$0,111 r_1 = r_2$	$1,11 r_1 = r_2$	$3,51 r_1 = r_2$

Die Seillinie (Kettenlinie)

Prof. Franz Lehner

Ein Seil, exakter ausgedrückt, ein idealer schwerer Faden, der an zwei Punkten aufgehängt ist, nimmt unter dem Einfluß der Erdanziehung eine parabelähnliche Ruhelage, die Form der „Seillinie“, an. Für Experimente lassen sich diese Eigenschaften am besten durch eine Kette verwirklichen, weshalb die Seillinie sehr oft auch Kettenlinie (Catenaria) genannt wird, die 1638 von Galilei als Parabel beschrieben wurde. Fast zur gleichen Zeit (1690/91) wurde der Verlauf der Seillinie als Funktion des Hyperbelkosinus von Leibniz, Bernoulli und Huygens erkannt und als Gleichgewichtsfigur mathematisch beschrieben. In späteren Jahren wurde eine Reihe von Differentialgleichungen mathematisch idealer Eigenschaften erstellt, deren Lösungen die Seillinie darstellen. Im folgenden sei aber nur auf die primäre Eigenschaft, den Verlauf des hängenden Seiles und dessen funktionelle Beschreibung, ausführlich eingegangen.

1. Die mathematische Beschreibung des Seilverlaufes

Die allgemeine funktionelle Beschreibung des Seilverlaufes im kartesischen Koordinatensystem in symmetrischer Lage ist durch die Funktion

$$y = k \cosh \frac{x}{k} \quad (1)$$

gegeben.

Mit $\frac{x}{k} = w$ (2)

erhalten wir die Funktion, die den Seilverlauf beschreibt:

$$y = k \cosh w \quad (3)$$

Die Seillinie ist als Funktion in Abb. 1 dargestellt.

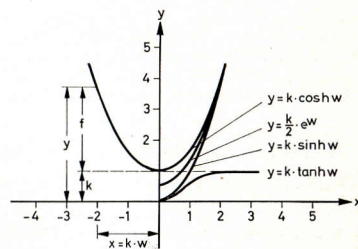


Abb. 1 Die Seillinie und Näherungskurven

Funktionen der Seillinie werden vorteilhaft mit den Rechenstäben ARISTO-HyperLog und ARISTO-Hyperbolog berechnet. Der Rechenstab ARISTO-HyperLog erweist sich gegenüber dem Rechenstab ARISTO-Hyperbolog als zweckmäßiger, weil er außer den Skalen Th und Sh noch die Skalen Ch und H aufweist. Für die Anwendung beider Rechenstäbe ergeben sich drei Beschreibungsbereiche:

a) $w \leq 0,1$

In diesem Bereich gilt:

$$y \approx k, \text{ denn für } w \leq 0,1 \text{ wird}$$

$$\cosh w \approx 1$$

b) $0,1 \leq w \leq 3,0$

Dieser Bereich ist charakteristisch für den Hyperbelkosinus, hierfür ist der Rechenstab ARISTO-HyperLog besser geeignet. Wir stellen die 1 der Skala C über w auf der Skala Ch ein und erhalten durch Verschieben des Läuferstriches auf k in Skala C den zugehörigen y-Wert in Skala D. Das Stabdiagramm ist in Abb. 2 dargestellt.

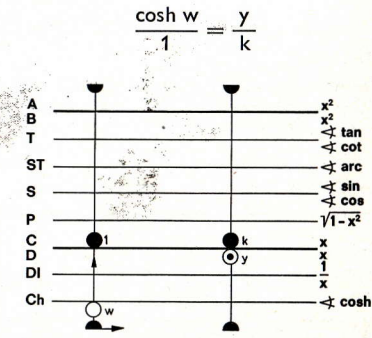


Abb. 2 Rechengang mit ARISTO-HyperLog

Für die Anwendung des Rechenstabes ARISTO-Hyperbolog wird die Funktion

$$y = k \cosh w$$

umgeformt in die Proportion:

$$\frac{\tanh w}{k} = \frac{\sinh w}{y} \quad (4)$$

Wir stellen mit Hilfe des Läufers w in Skala Th und k in Skala C übereinander, verschieben den Läufer nach w in Skala Sh 1 oder Sh 2 und lesen y in Skala C ab (s. Abb. 3).

c) $w \geq 3,00$

In diesem Bereich gilt:

$$y \approx k \frac{e^w}{2}$$

$$\text{denn } \cosh w \approx \frac{e^w}{2}$$

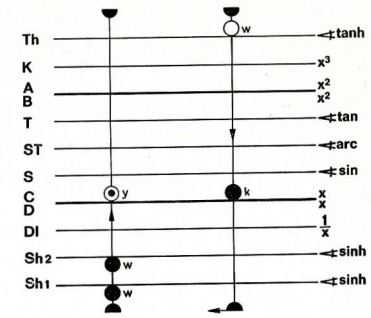


Abb. 3 Rechengang mit ARISTO-Hyperbolog

Die in der Mathematik oft übliche Verschiebung des Achsenkreuzes in den Scheitelpunkt der Kurve wird bei der Seillinie dadurch umgangen, daß die Vertikalentfernung eines Punktes vom Scheitel als besondere Charakteristik eingeführt wird. Diese Entfernung wird als Durchhang f bezeichnet und ist gleich dem Funktionswert y vermindert um die Scheitelhöhe k (siehe Abb. 1).

$$f = y - k \quad (6)$$

In nachfolgender Tabelle sind einige Beispiele für verschiedene k-Werte gegenübergestellt.

k	x	0,0	± 1,0	± 2,0	± 4,0	± 6,0	± 8,0
1	w	0,0	1,0	2,0	4,0	6,0	8,0
	y	1,0	1,543	3,76	27,3	201	1490
	f	0,0	0,543	2,76	26,3	200	1489
5	w	0,0	0,2	0,4	0,8	1,2	1,6
	y	5,0	5,10	5,40	6,68	9,05	12,88
	f	0,0	0,10	0,40	1,68	4,05	7,88
20	w	0,0	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4
	y	20,0	20,0	20,1	20,4	20,9	21,6
	f	0,0	0,0	0,1	0,4	0,9	1,6

2. Mathematische Eigenschaften des Funktionsverlaufes

2.1. Der Anstieg

Der Winkel, den die Tangente in einem Punkt der Kurve mit der x-Achse bildet ist gleich dem Winkel, den das Seil in diesem Punkt mit der Waagerechten bildet (s. Abb. 4).

Der Winkel ergibt sich durch Differentiation von $y = k \cosh w$

$$\text{zu } y' = \sinh w = \tan \alpha \quad (7)$$

Für das Aufsuchen der Winkel ergeben sich keine Unterschiede bei den Rechenstäben ARISTO-HyperLog und ARISTO-Hyperbolog. Wir unterscheiden lediglich die entsprechenden Bereiche:

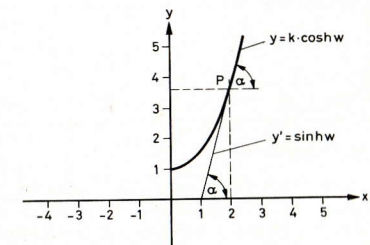


Abb. 4 Seillinie und Tangente

a) $w \leq 0,1$

In diesem Bereich gilt:

$$\sinh w \approx w. \quad (8)$$

Damit erhalten wir zu den Werten w auf der Skala C den Anstiegswinkel α auf der Skala ST (s. Abb. 5).

b) $0,1 < w < 0,882$

Hier gilt sinngemäß Gleichung (7):

Zu den Werten w auf der Skala Sh 1 erhalten wir in der Grundstellung der Zunge den Anstiegswinkel auf der Skala T.

Die Skala T steht nur bis $\alpha = 45^\circ$ im direkten Verhältnis zur Skala D und somit gilt dieser einfache Übergang nur von Skala Sh 1 nach T.

c) $0,882 < w < 3$

Für $\alpha > 45^\circ$ wird die Funktion $\tan \alpha$ in der Kehrwertskala abgelesen. Bei der Einstellung von w in Skala Sh 2 steht aber $\tan \alpha$ in Skala D. Wir müssen deshalb entweder die Zunge umgekehrt einstecken, damit die Skala T von rechts nach links zählt oder wir müssen $\sinh w = \tan \alpha$ in Skala D ablesen und in Skala DI neu einstellen; dann steht α (rot) in Skala T.

d) Wir können auch die einfacher anzuwendende Näherung $\tanh w = \sin \alpha$ im Fall b) und c) benutzen, dann ist aber für größere w -Werte die Einstellung in Skala Th und die Ablesung in Skala S ungenauer.

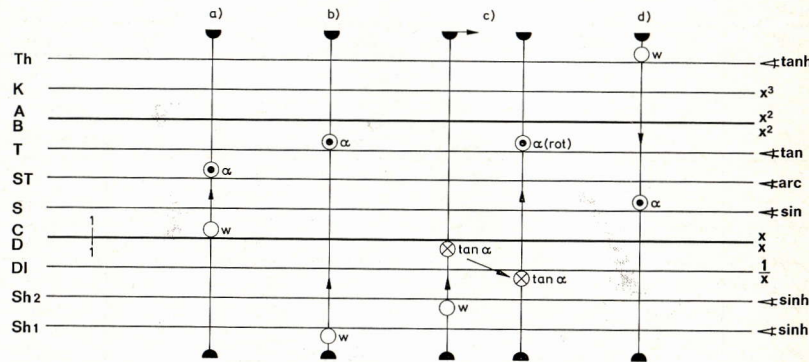


Abb. 5 Rechengang mit ARISTO-Hyperbolog und HyperLog

In der folgenden Tabelle sind die Winkel α für verschiedene w -Werte zusammengestellt.

k	x	0,5	1,0	1,5	2,0	4,0
1	α	27,5°	49,6°	64,7°	74,6°	87,9°
5	α	5,71°	11,38°	16,9°	22,3°	41,6°
20	α	1,43°	2,86°	4,30°	5,71°	11,38°

2.2. Die Seillänge

Die Bogenlänge der Kurve vom Scheitelpunkt bis zu einem beliebigen Punkt (bzw. die Länge des Seiles vom tiefsten Punkt zu einer bestimmten Stelle) heißt Scheitellänge l und berechnet sich nach den Regeln der Differentialgeometrie zu

$$l = k \sinh w \quad (9)$$

Für die Rechenstäbe ARISTO-HyperLog und ARISTO-Hyperbolog gilt für Werte von $w \geq 3,00$ die Näherungsbeziehung

$$l \approx \frac{k^2}{2} e^w \quad (10)$$

Für die Scheitellänge gilt aber auch die pythagoräische Beziehung

$$l = \sqrt{y^2 - k^2} \quad (11)$$

Damit ist die Scheitellänge exakt konstruierbar (siehe Abb. 6).

Die Seillänge L ergibt sich:

a) Als Summe der Scheitellängen l , wenn der Seilverlauf den Scheitel der Kurve einschließt.

b) Als Differenz der Scheitellängen l , wenn der Seilverlauf den Scheitel der Kurve nicht einschließt.

Die Errechnung der Scheitellängen l kann sowohl mit dem Rechenstab ARISTO-Hyperbolog als auch mit dem Rechenstab ARISTO-HyperLog erfolgen. Maßgebend sind jeweils die Anwendungsbereiche:

$w \leq 3$ (Anwendung von Gleichung 9):

Für den Rechenstab ARISTO-Hyperbolog und für den Rechenstab ARISTO-HyperLog gilt das in Abb. 7 wiedergegebene Stabdiagramm.

$$\frac{\sinh w}{1} = \frac{l}{k}$$

Wir stellen die 1 der Skala C über den Wert w auf der Skala Sh und verschieben den Läuferstrich auf k der Skala C, so daß wir darunter auf der Skala D den Wert für l ablesen können.

$w \geq 3$ (Anwendung von Gleichung 10):

Abb. 7 Rechengang mit ARISTO-HyperLog

Für beide Rechenstäbe kommt das Stabdiagramm nach Abb. 8 zur Anwendung:

$$\frac{k^2}{2} = \frac{l}{e^w}$$

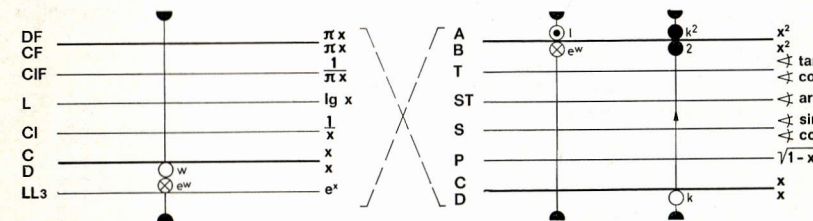


Abb. 8 Rechengang mit ARISTO-HyperLog

Wir stellen den Exponenten w auf der Log-Log-Seite des Stabes in Skala D ein und lesen darunter auf der Skala LL3 den Wert e^w ab. Nach dem Wenden des Rechenstabes stellen wir auf der Skala D den Wert k ein, darüber auf der Skala A finden wir k^2 und

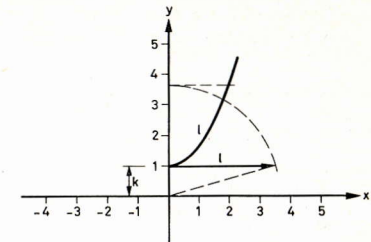


Abb. 6 Konstruktion der Scheitellänge

schieben die 2 der Skala B darunter. Mit Hilfe des Läuferstriches stellen wir den bereits ermittelten e^w -Wert auf der Skala B ein und lesen auf der Skala A den Wert für l ab. In der nachfolgenden Tabelle sind die l -Werte für verschiedene w -Werte zusammengestellt.

k	x	2,0	6,0	10,0
1	l	3,63	201	11010
5	l	2,05	7,55	18,13
20	l	2,001	6,090	10,42

2.3. Die Krümmung

Gelegentlich spielt in der Praxis die Seilkrümmung eine Rolle, sie ist der Kehrwert des Krümmungsradius. Der Radius r des Krümmungskreises wird bei der Konstruktion des Seilverlaufes vielfach benötigt (s. Abb. 9). Den Mittelpunkt des Krümmungskreises finden wir auf Grund der Eigenschaft, daß Krümmungsradius und Kurvennormale gleichlang sind.

Der Radius r des Krümmungskreises ist durch folgende Beziehung definiert

$$r = k \cosh^2 w \quad (12)$$

Für den Rechenstab ARISTO-Hyperbolog benutzen wir die Beziehung

$$\cosh^2 w = \frac{\sinh^2 w}{\tanh^2 w}$$

und gelangen über (12) zu der Proportioneinstellung

$$\frac{\tanh^2 w}{k} = \frac{\sinh^2 w}{r}$$

Das Stabdiagramm ist in Abb. 10 wiedergegeben.

Wir stellen mit dem Läuferstrich w auf der Skala Th ein und erhalten $\tanh^2 w$ auf der Skala A, darunter schieben wir k auf der Skala B, durch Verschieben des Läuferstriches auf w der Skala Sh 1 oder Sh 2 erhalten wir auf der Skala A den Wert für $\sinh^2 w$ bzw. auf der Skala B den gesuchten Wert r .

Für den Rechenstab ARISTO-HyperLog können wir ohne Umformung die Gleichung (12) benutzen (s. Abb. 11).

Hierfür stellen wir w mit dem Läuferstrich auf der Skala Ch ein, dann steht $\cosh^2 w$ auf der Skala A. Darunter schieben wir die 1 der Skala B und lesen über k der Skala B den Radius r in Skala A ab.

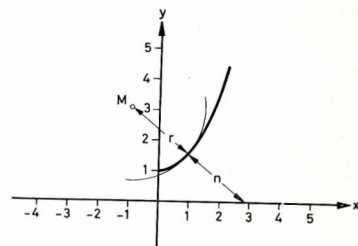


Abb. 9 Krümmungsradius und Kurvennormale

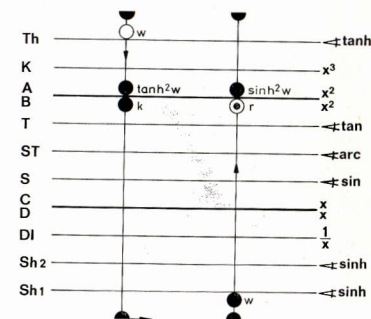


Abb. 10 Rechengang mit ARISTO-Hyperbolog

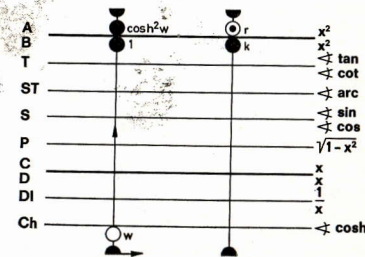


Abb. 11 Rechengang mit ARISTO-HyperLog

In der folgenden Tabelle sind einige r -Werte für verschiedene w -Werte aufgeführt.

k	x	1,0	2,0	4,0	6,0
1	r	2,38	14,2	(754)	—
5	r	5,2	5,84	8,94	16,4
20	r	20,0	20,2	20,8	21,8

2.4. Die Schmiegeparabel

Der scheinbare Verlauf kann sehr gut durch die Schmiegeparabel im Scheitel beschrieben werden:

$$y = \frac{x^2}{2k} + k \quad (13)$$

Diese Gleichung wird sehr oft zum Anlaß genommen, bei der Beschreibung des hängenden Seiles überhaupt auf die Hyperbelfunktion zu verzichten. Bei stärkerem Durchhang führt dies aber zu beachtlichen Abweichungen (s. Abb. 12).

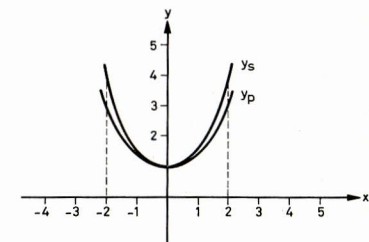


Abb. 12 Seillinie y_s und Schmiegeparabel y_p

Einige Beispiele sollen in nachfolgender Tabelle die Abweichungen verdeutlichen.

k	x	0,0	1,0	2,0	4,0	8,0
1	y_s	1,0	1,543	3,76	27,3	1490
	y_p	1,0	1,500	3,000	9,00	33,0
5	y_s	5,0	5,10	5,40	6,68	12,88
	y_p	5,0	5,10	5,4	6,6	11,4
20	y_s	20,0	20,0	20,1	20,4	21,6
	y_p	20,0	20,0	20,1	20,4	21,6

3. Übungsbeispiele

Um die Probleme voll erfassen zu können, seien abschließend einige durchgerechnete Beispiele angeschlossen, wobei von der mathematischen Angabesituation ausgegangen wurde, daß die Kurvencharakteristik k und die Abszissen x_1 und x_2 gegeben sind.

Die Beispiele sind in der folgenden Tabelle zusammengefaßt.

Beispiel	k	x	w	y	f	α	$r = n$	l	$\Sigma l = L$
a	50	$x_1 = -30$	0,60	59,3	9,3	32,5	70,2	31,8	90,6
		$x_2 = +50$	1,00	77,2	27,2	49,0	119,6	58,8	
b	0,5	$x_1 = -2$	4,0	13,6	13,1	87,9	370	13,6	15,41
		$x_2 = +1$	2,0	1,881	1,381	74,6	7,08	1,81	
c	30	$x_1 = +10$	0,333	31,7	1,69	18,6	33,4	10,1	205,9
		$x_2 = +80$	2,67	217	187,8	82,07	1582	216	

ARISTO-Neuheiten

ARISTO-Centograph 1501

Neben dem bisher bekannten Vollkreiswinkelmesser ARISTO-TriGon 1500 gibt es jetzt den Vollkreiswinkelmesser ARISTO-Centograph mit einer Prozentteilung am Außenrand, der sich für die beliebte Darstellung statistischer Ergebnisse in Kreisdiagrammen vorzüglich eignet. Obwohl die Umrechnung von Prozenten in Winkel mit den versetzten Skalen des Rechenstabes sehr einfach ist, erlaubt die unmittelbare Abtragung der Prozente mit dem ARISTO-Centograph eine schnellere Anfertigung von Kreisdiagrammen.

ARISTO-GeoDreieck 60

Rechtwinklige Zeichendreiecke ohne Teilungen gibt es in allen Größen meist paarweise mit 45° -Winkeln und mit $60^\circ/30^\circ$ -Winkeln, die nach DIN 3102 genormt sind. Bei den genormten Dreiecken ist die große Kathete des 60° -Dreiecks gleich der Hypotenuse des 45° -Dreiecks. Zu dem mit zahlreichen Teilungen versehenen 45° -ARISTO-Geo-Dreieck 1550 gibt es jetzt das passende ARISTO-Geo-Dreieck 60 mit der Bestellnummer 1554. Seine Vorteile sind der verlängerte Symmetriemaß-Stab an der Hypotenuse und ein 15 cm-Maß-Stab an der größeren Kathete. An der kleinen Kathete befinden sich eine Gradteilung der kleinen Winkel von 0° bis 10° und Ableserstriche für 15° , 30° , 45° , 60° und 75° .

Das Feld innerhalb der kreisförmigen Winkelteilung ist ähnlich wie beim ARISTO-TZ-Dreieck mit einem Quadratgitter ausgestattet. Damit ist das Geo-Dreieck 60 auch eine gute Ergänzung zum TZ-Dreieck.

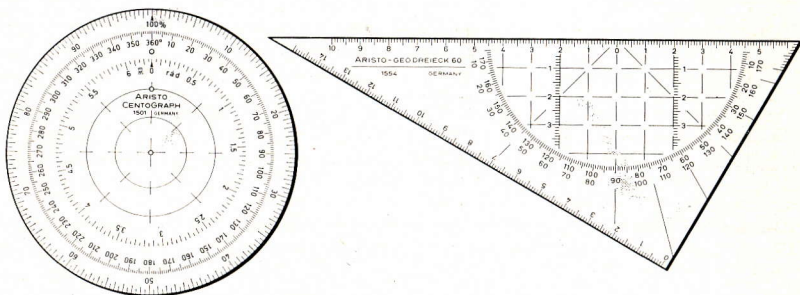


Abb. 1 ARISTO-Centograph, ARISTO-Geo-Dreieck 60

Unsere Buchbesprechung

G. MUSCHAN

MODERNES RECHNEN MIT DEM ZWEISEITENSTAB

Fachbuchhandlung Ilse Jansen, 5021 Großkönigsdorf, Paulstraße 34

Dieses Lehrbuch „für Schüler, Fachschüler, Studenten Autodidakten und Praktiker“ ist insbesondere ein Leitfaden für den Ingenieur. Der Leser wird mit allen Skalen der bekannten Zweiseitenrechenstäbe vertraut gemacht. Systematisch zusammengestellte Übungsbeispiele führen Schritt für Schritt in beinahe alle praktisch vorkommenden Aufgaben ein.

Der Autor macht einen interessanten Versuch, den Rechengang durch Punktsymbole darzustellen. Diese Methode hat den Vorteil, daß längere Rechengänge mit mehreren Zungeneinstellungen in einem einzigen Diagramm dargestellt werden können; allerdings wird das Lesen der Diagramme mitunter mühsam.

Knappe Texte und Merkgeregeln sind ein weiterer Vorteil des Buches, das durch die kompakte Unterbringung aller Rechenmöglichkeiten fleißig durchgearbeitet sein will. Dann aber bleibt es ein Nachschlagewerk in komplizierten Fällen. Auf Seite 13 wird hervor gehoben, daß es praktisch ist, die Zungenbewegungen auf ein Minimum zu beschränken, um Zeit zu sparen und die Rechengenauigkeit zu steigern. Nach diesem Grundprinzip sind alle Aufgaben der Multiplikationen und Divisionen mit zwei und mehreren Faktoren durchgeführt, sowohl mit den Grundskalen und versetzten Skalen als auch mit den Quadratskalen. Alle Variationen werden mit und ohne Kehrwertskalen geübt und jedesmal eine Überschlagsrechnung angegeben. Auf das Abschätzen des Ergebnisses wird größter Wert gelegt.

Bedingt durch die Schreibmaschinenschrift werden Proportionen nicht in der Bruchform geschrieben, dadurch büßt die wichtigste Rechenstabregel an Übersichtlichkeit ein und der oft vorteilhafte Beginn mit den versetzten Skalen geht dabei verloren.

Trigonometrische Berechnungen werden mit gleicher Gründlichkeit in allen Schwierigkeitsgraden durchgeführt. Eine übersichtliche Tabelle gibt eine Zusammenfassung der einfachen Berechnungen im rechtwinkligen Dreieck. Der Sinussatz und die Umrechnungen komplexer Zahlen schließen sich an. Die oft gebrauchte Anwendung des Sinussatzes auf das rechtwinklige Dreieck mit der Vereinfachung der vollständigen Berechnung des Dreiecks mit nur einer Zungeneinstellung (Grundprinzip von Seite 13) kommt erst sehr spät und leider ohne die entsprechende Anwendung auf den Fall, daß die Katheten gegeben sind. Diese in jeder ARISTO-Anleitung angegebenen Lösungen, die besonders die Umrechnungen der komplexen Zahlen vereinfachen, sollten in einer Neuauflage unbedingt schon früher eingeordnet werden.

Potenzen, Wurzeln und Logarithmen mit den Skalen A, B, K, L und LL werden gleichfalls unter Berücksichtigung aller Variationen geübt. Bei der Potenzrechnung mit LL-Skalen sollte nicht nur mit Skala CI, sondern auch mit Skala C operiert werden, um allen Rechenstäben besser gerecht zu werden. Dieses Buch ist nicht für einen bestimmten Rechenstab geschrieben und geht sonst auf die wesentlichen Abweichungen bei verschiedenen Rechenstäben ein.

In einer zweiten Auflage könnte die Lesbarkeit durch Buchdruck, eine übersichtlichere graphische Gestaltung und durch eingefügte Abbildungen wesentlich erleichtert werden. Häufigere Hinweise auf das Proportionsrechnen mit Farbgeregeln „weiß — gelb“ für die direkte und „weiß — rot“ für die indirekte Proportion könnten zum besseren Verstehen beitragen.

Jg.

ARISTO