ARISTO

MITTEILUNGEN FÜR INGENIEUR- UND HOCHSCHULEN

HEFT 10

Aus dem Inhalt:

ARISTO-WERKE · DENNERT & PAPE KG · HAMBURG

ARISTO - MITTEILUNGEN FÜR INGENIEUR- UND HOCHSCHULEN

Herausgeber: ARISTO-Kundendienst
ARISTO-WERKE · DENNERT & PAPE KG · 2 Hamburg 50 · Juliusstraße 10

Schriftleiter: Dipl.-Ing. Rolf Jäger

Mitarbeiter dieses Heftes:

Prof. Manfred Floderer
A-1100 Wien 10, Rotenhofgasse 28/14, Österreich

Dipl.-Ing. Rolf Jäger
2 Hamburg 52, Hittfelder Stieg 5

Prof. Franz Lehner
A-8010 Graz, Plüddemanngasse 34, Österreich

Oberstudienrat a. D. Dr. Richard Stender
2 Hamburg 50, Griegstr. 29

Heft 10, Oktober 1967

Raketenphysik

Prof. Franz Lehner

Die Geschichte der Rakete reicht sehr weit zurück, denn die Antriebsart, auf der ihre Bewegung beruht, ist im Prinzip schon Jahrtausende bekannt. Uralte Berichte erzählen bereits von der antreibenden Kraft, die ausströmendem Feuer innewohnt. In der Blütezeit der Alchimisten befaßte man sich intensiv mit dem Bau von Raketen. Und Newton sagte dem Raketenantrieb bereits die Eroberung des Weltraumes voraus. In unserer Zeit gelang es nun, auf dieser Basis ein mächtiges Antriebsaggregat zu entwickeln, das die kühnsten Menschheitsträume zu verwirklichen imstande ist. In unseren Lehrbüchern allerdings fehlt die physikalische, elementarmathematische Darstellung der Problematik meist völlig. Daher sei im folgenden erst die physikalische Situation skizziert, bevor auf die rechenstabgemäße Beschreibung eingegangen wird.

1. Die einfache Rakete

1.1. Die physikalische Situation

In der elementaren Betrachtung besteht die Rakete aus 2 Teilen: Erstens aus dem Raketenkörper, den man als Endmasse m_t bezeichnet und der im wesentlichen aus dem Antriebsaggregat und der Nutzlast besteht, und zweitens aus dem Treibstoff, den man als Treibstoffmasse m_b bezeichnet. Beide zusammen bilden die Startmasse m_o.

$$m_o = m_t + m_b$$

Zur einfacheren Beschreibung des Bewegungsablaufes werden die Verhältnisse der einzelnen Massen zueinander eingeführt. Wir benötigen in diesem Zusammenhang das Massenverhältnis

$$\mu = \frac{m_o}{m_t}$$

und das Treibstoffverhältnis

$$\beta = \frac{m_b}{m_t}$$

Zwischen beiden besteht die Beziehung $\mu = \beta + 1$.

Im Idealfall, den die Physik beschreibt, verläuft die Verbrennung des Treibstoffs über die gesamte Brennzeit t konstant. Demzufolge strömen die Verbrennungsprodukte mit der konstanten Ausströmgeschwindigkeit w aus der Rakete aus. Der in der Zeiteinheit verbrauchte Treibstoff ist demzufolge zugleich der Massenverlust k.

$$k = \frac{m_b}{t}$$

Basierend auf dem Impulssatz der klassischen Mechanik erfährt dadurch die Rakete eine Kraftwirkung in der entgegengesetzten Richtung. Diese Kraft nennt man den Schub F. Er ist gleich dem Produkt aus dem Massenverlust und der Ausströmgeschwindigkeit.

$$F = k\,w$$

Vielfach wird statt dessen die Leistung P des Antriebes angegeben. Sie ist physikalisch die in der Zeiteinheit in Bewegung der Verbrennungsprodukte umgesetzte Energie und beträgt somit

$$P = \frac{W}{t} = \frac{m_b\,w^2}{2\;t} = \frac{k\,w^2}{2}$$

1.2. Kinematik der Rakete

Wie in der Physik allgemein üblich, lassen wir bei der Beschreibung alle anderen Einflüsse wie die Erdanziehung, den Luftwiderstand usw. außer acht. Die kinematischen Größen lassen sich in dieser als verlustlos bezeichneten Situation wie folgt berechnen.

1.2.1. Die Beschleunigung a

Durch den Schub der ausströmenden Gase erfährt die Raketenmasse die Beschleunigung

$$a = \frac{k\,w}{m}$$

Setzen wir für m die Startmasse m_o ein, so erhalten wir die Anfangsbeschleunigung a_o, setzen wir die Endmasse m_t ein, so erhalten wir den Höchstwert der Beschleunigung, die Endbeschleunigung a_t. Soll eine Rakete bei senkrechtem Start sich sanft vom Erdboden erheben, so darf die Anfangsbeschleunigung maximal gleich der Fallbeschleunigung sein, sonst erfährt die Rakete einen Ruck.

1.2.2. Der Trieb f

Mit abnehmender Masse nimmt die Beschleunigung zu. Diesen Zuwachs der Beschleunigung bezeichnet man als den Trieb f. Er beträgt

$$f = \frac{w\,k^2}{m^2}$$

und ist demzufolge ebenfalls von der Masse abhängig wie die Beschleunigung. Er spielt bei Problemen der Weltraumschiffahrt eine große Rolle, denn er darf zur Verträglichkeit für Lebewesen nur ganz bestimmte Höchstwerte erreichen.

1.2.3. Die Geschwindigkeit v

Die Geschwindigkeit v, die die Rakete am Ende der Antriebsphase erreicht, beträgt

$$v = w \cdot \ln \mu$$

1.2.4. Der Antriebsweg s

Der Weg, den die Rakete bis zur Beendigung der Antriebsphase zurückgelegt hat, beträgt

$$s = w\,t\left(1 - \frac{\ln \mu}{\beta}\right)$$

1.3. Wirkungsgrade

Ein Vergleich der Formeln über die Geschwindigkeit und den Weg mit den Formeln der Translation zeigt gewisse Ähnlichkeiten auf. Um dies deutlicher hervortreten zu lassen, hat man Raketenwirkungsgrade eingeführt. Den Logarithmus des Massenverhältnisses bezeichnet man als den Geschwindigkeitswirkungsgrad η_v.

$$\eta_v = \ln \mu$$

Den inneren Wirkungsgrad η_i erhält man, wenn man den Geschwindigkeitswirkungsgrad durch das Treibstoffverhältnis dividiert

$$\eta_i = \frac{\ln \mu}{\beta}$$

Für den Wegwirkungsgrad η_s gilt die Definition

$$\eta_s = 1 - \frac{\ln \mu}{\beta} = 1 - \eta_i$$

Als Raketenwirkungsgrad oder kinematischen Wirkungsgrad η_k bezeichnet man den Ausdruck

$$\eta_k = \frac{(\ln \mu)^2}{\beta} = \eta_i \cdot \ln \mu$$

Er besitzt interessanterweise für $\mu = 4{,}95$ das Maximum $\eta_k = 0{,}647$. In diesem Zusammenhang erwähnenswert sind die Überlegungen über den Antriebsbedarf, der durch eine umfangreiche Formel definiert ist. Nach Ziffernwert und Dimension entspricht er dem Kehrwert der Ausströmgeschwindigkeit w.

2. Großraumraketen

Der Bau von Raketen auf der oben beschriebenen Basis, die die Eroberung des Weltraumes ermöglichen, bringt bei den benötigten Größenordnungen technisch unlösbare Probleme mit sich. Man hat aber Wege gefunden, die einflußreichsten Faktoren auf Umwegen entsprechend mächtig zu gestalten. Um das Massenverhältnis μ möglichst groß werden zu lassen, wirft die Rakete ausgebrannte Triebwerksanlagen immer wieder ab, woraus der Begriff der Stufenrakete entstand. Die Nutzlast einer Rakete (1. Stufe) wird dabei durch eine entsprechende kleinere zweite Rakete (2. Stufe) ersetzt und so fort. Handelt es sich dabei um gleiche Raketentypen, so ist die Ausströmgeschwindigkeit als gleich anzunehmen, und man erhält dann anstelle von μ das Gesamtmassenverhältnis

$$M = \mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \mu_3 \cdot \ldots$$

als Produkt der Massenverhältnisse der einzelnen Stufen.

Um den Massenverlust k möglichst ergiebig zu erhalten, bündelte man einfach eine Reihe technisch beherrschter Raketen nebeneinander und zündete sie zugleich, wodurch der Gesamtmassenverlust K die Summe der einzelnen Massenverluste betrug.

$$K = k_1 + k_2 + k_3 + \ldots$$

Heute baut man rationeller Mehrbrennkammern- bzw. Mehrdüsenraketen.

Von größter Bedeutung wäre die Steigerung der Ausströmgeschwindigkeit. Aber hier ist den chemischen Treibstoffraketen eine Grenze gesetzt. So groß der Fortschritt der Raketentechnik in den letzten 25 Jahren war, hierin gelang nur eine geringfügige Steigerung. Es gilt heute allgemein als Maximum etwa 2,3 km/s, während für den Prototyp der Großraumraketen, der deutschen V2, bereits 1,92 km/s angegeben wurden.

3. Rechenstabdiagramme für die konstanten Größen

Durch Umstellen einzelner Formeln lassen sich stets mehrere zu Formelketten vereinigen, die sich als Proportionen leicht mit dem Rechenstab ermitteln lassen. So erhält man z. B.

$$\frac{m_t}{1} = \frac{m_b}{\beta} = \frac{m_o}{\mu}$$

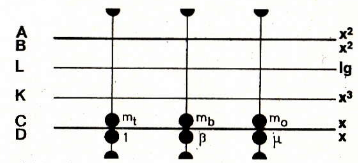


Abb. 1

$$\frac{k}{1} = \frac{m_b}{t} = \frac{F}{w} = \frac{2\,P}{w^2}$$

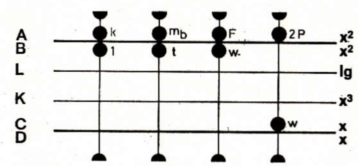


Abb. 2

$$\frac{k}{m} = \frac{a}{w} = \sqrt{\frac{f}{w}}$$

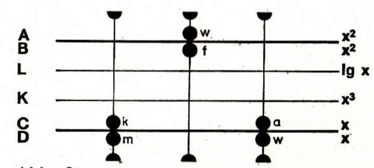


Abb. 3

$$\frac{v}{w} = \frac{\ln\mu}{1} = \frac{\eta_v}{1} = \frac{\eta_i}{1/\beta} = \sqrt{\frac{\eta_k}{1/\beta}}$$

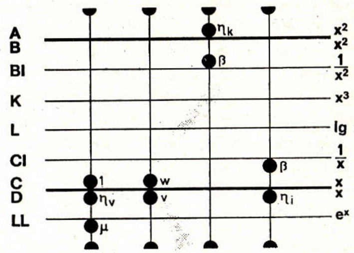


Abb. 4

Mit diesen Gleichungen sind die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Werte für einige historische Raketen berechnet.

	V 2	A 10	Viking 7	T 3	
m_t	4200	21000	1150	23800	kg
m_b	8750	64000	3720	76000	kg
m_o	12950	85000	4870	99800	kg
β	2,08	3,05	3,23	3,19	
μ	3,08	4,05	4,23	4,19	
t	70	90	72	120	s
w	1,92	1,98	1,90	2,02	km/s
k	125	711	51,7	633	kg/s
F	240	1410	98,2	1279	kN
P	230	1394	93,2	1291	MW
a_o	18,53	16,56	20,2	12,81	m/s^2
a_t	57,2	67,0	85,4	53,7	m/s^2
f_o	0,179	0,139	0,214	0,81	m/s^3
f_t	1,70	2,27	3,84	1,43	m/s^3
v	2,16	2,77	2,74	2,90	km/s
η_v	1,125	1,399	1,442	1,433	
η_i	0,541	0,459	0,447	0,449	
η_s	0,459	0,541	0,553	0,551	
s	61,7	96,5	75,6	133,5	km
η_k	0,608	0,642	0,644	0,644	
1/w	0,521	0,505	0,526	0,495	s/km

4. Rechenstabdiagramme für die veränderlichen Größen

Während ein großer Teil der zu berechnenden Größen für eine Rakete charakteristische Werte besitzt, ändert ein anderer Teil im Verlauf der Raketenbewegung seinen Wert kontinuierlich. Es sind dies die kinematischen Größen, die mit den in Abschnitt 1. angegebenen Formeln berechnet werden können. Dabei ist nur zu beachten, daß in der

momentanen Masse m der noch vorhandene Treibstoff enthalten ist, während m_b die bis zu diesem Moment verbrauchte Treibstoffmasse bezeichnet. Daraus folgen die Augenblickswerte

$$\mu = \frac{m_o}{m} \quad ; \quad \beta = \frac{m_b}{m}$$

4.1. Geschwindigkeit

Bringen wir die Formel für die Geschwindigkeit v auf die Form

$$\frac{v}{\ln\mu} = \frac{w}{1},$$

so haben wir die Veränderlichen v und μ auf dem Rechenstab übereinander; und zwar lesen wir auf den Skalen LL direkt den Wert $\mu = m_o/m$ ab. Interessiert uns, welcher Anteil der Startmasse bei der auf Skala C eingestellten Geschwindigkeit noch vorhanden ist, so brauchen wir nur den Kehrwert $1/\mu = m/m_o$ zu bilden. Dazu stellen wir auf der Skala CI den Wert μ ein und lesen darunter auf der Skala C den Wert m/m_o ab. Das zugehörige Rechenstabdiagramm zeigt Abb. 5.

$$\frac{v}{\ln\mu} = \frac{w}{1}; \quad \frac{1}{\mu} = \frac{m}{m_o}$$

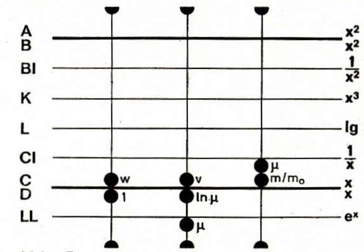


Abb. 5

Rechenstäbe mit den Skalen LL0, wie z. B. ARISTO-Studio, ARISTO-StudioLog, ARISTO-MultiLog, ARISTO-HyperboLog bieten den Vorteil, daß man darauf den gesuchten Kehrwert ohne erneute Stabeinstellung ablesen kann, wie dem Diagramm Abb. 6 zu entnehmen ist.

$$\frac{v}{\eta_v} = \frac{v}{\ln\mu} = \frac{w}{1}$$

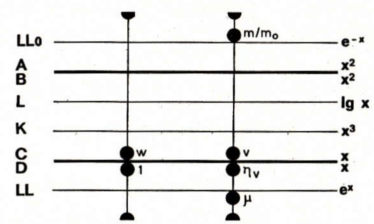


Abb. 6

Beispiel: w = 1920 m/s

$\frac{m}{m_o}$ in %	90	80	70	60	50	40	30
v in m/s	202	428	685	981	1330	1758	2310

4.2. Beschleunigung und Trieb

In den Formeln der Beschleunigung und des Triebes ist die Masse als Funktion der Zeit die zweite sich ändernde Größe.

$$m = m_o - m_b = m_o - kt$$

Haben wir für verschiedene Zeitwerte die zugehörigen Massen berechnet, so finden wir mit einfachen Stabeinstellungen die Beschleunigung a und den Trieb f.

$$\frac{1/k}{w} = \frac{1/m}{a}$$

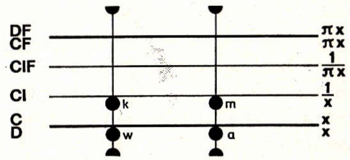


Abb. 7

$$\frac{w}{1/k^2} = \frac{f}{1/m^2}$$

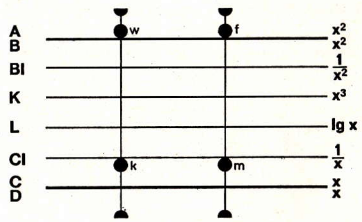


Abb. 8

Beispiel: $w = 1920$ m/s; $k = 125$ kg/s

t in s	0	10	20	30	40	50	60
m in kg	12950	11700	10450	9200	7950	6700	5450
a in m/s^2	18,53	20,5	23,0	26,1	30,2	35,8	44,1
f in m/s^3	0,179	0,22	0,275	0,355	0,475	0,67	1,01

5. Astronautische Geschwindigkeiten

Bei der Betrachtung der Probleme der Weltraumschiffahrt spielen die astronautischen Geschwindigkeiten eine fundamentale Rolle.

Die 1. astronautische Geschwindigkeit ist die Kreisbahn-Geschwindigkeit $v_1 = 7{,}92$ km/s.

Die 2. astronautische Geschwindigkeit ist die Erdflucht-Geschwindigkeit $v_2 = 11{,}2$ km/s.

Die 3. astronautische Geschwindigkeit ist die Sonnenflucht-Geschw. $v_3 = 16{,}6$ km/s.

Bei der Frage nach dem hierfür benötigten Massenverhältnis μ einer Stufenrakete oder irgendwelcher „Traumraketen" gehen wir von der Geschwindigkeitsformel aus und verwenden die zugehörige Stabeinstellung, siehe Abb. 5. und 6. Damit berechnen wir die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Werte.

Gesamtmassenverhältnis μ für	v_1	v_2	v_3
Chemische Treibstoffrakete mit w = 2,0 km/s	52	270	4000
Chemische Traumrakete mit w = 2,6 km/s	21	74	590
Jonenrakete mit w = 6,0 km/s	3,74	6,46	15,9
Plasmarakete mit w = 20 km/s	1,486	1,75	2,29
Protonenrakete mit w = 300 km/s	1,0268	1,0381	1,057

Aus solchen Tabellen kann man schnell und deutlich wesentliche Funktionen der Problematik ablesen. Die hier aufgezeigten Gedankengänge sollen aber vor allem anregen, die interessierenden oder benötigten Größen mit dem Rechenstab einfach zu berechnen.

Näherungslösung eines Typs transzendenter Gleichungen

Prof. Manfred Floderer

Verwendet man die Skalen des Rechenstabes als Funktionstabellen, so kann man durch geeignete Gegenüberstellung entsprechender Skalen rasch die Näherungslösung transzendenter Gleichungen besonderen Typs finden. Es handelt sich dabei um Gleichungen, bei denen eine Winkelfunktion ihrem Argument proportional ist, wie etwa

$$\tan x - 1{,}1\,x = 0 \quad \text{oder} \quad 4 \sin x = 3x,$$

also allgemein $\tan x = kx$ oder $\sin x = kx$, die elementar nicht lösbar sind. Für den Proportionalitätsfaktor k müssen einschränkende Bedingungen erfüllt sein, damit die Lösbarkeit gewährleistet ist. Außerdem erhält man mit dem Rechenstab nur Lösungen, die im ersten Quadranten liegen. Das Verfahren sei zunächst an dem Beispiel $\tan x = 1{,}1\,x$ erklärt.

Das Aufsuchen der Lösung beruht im wesentlichen darauf, eine Funktionstabelle für tan x und 1,1 x zu erstellen und zu vergleichen, für welche Winkel die Funktionswerte gut übereinstimmen, wie etwa mit der folgenden Tabelle:

x	tan x	1,1 x
in °		in rad
20	0,3640	0,3840
25	0,4663	0,4799
27	0,5095	0,5183
28	0,5317	0,5376
29	0,5543	0,5567
30	0,5774	0,5760
29,6	0,5681	0,5683

Aufgrund dieser Tabelle kann man vermuten, daß das Ergebnis $x \approx 29{,}6°$ lautet.

Das Aufstellen der Tabelle ist mühsam und zeitraubend. Man kann es durch geschickte Kombination der Rechenstabskalen vollkommen ersparen.

Da auf der Skala T die Winkel x im Gradmaß angegeben sind, brauchen wir eine Skala 1,1 x, bei der x ebenfalls im Gradmaß abzulesen ist, um die x-Werte, die gleichen Funktionswerten entsprechen, miteinander vergleichen zu können. Verschieben wir nun die Skala ST um den Faktor 1,1, so haben wir die gesuchte Skala. Wir stellen mit Hilfe des Läuferstriches die 1 der Skala C unter 1,1 der Skala ST und finden dann zu jedem auf Skala C eingestellten Winkelwert das 1,1 fache Bogenmaß auf der Skala D.

Die gleiche Stabeinstellung erhalten wir aus der bekannten Proportion

$$\frac{180^\circ}{\pi} = \frac{x}{\operatorname{arc} x},$$

die wir für unsere spezielle Aufgabenstellung erweitern zu

$$\frac{180^\circ}{1{,}1\,\pi} = \frac{x}{1{,}1 \operatorname{arc} x}.$$

Wir können leicht kontrollieren, daß unsere Stabeinstellung richtig ist, indem wir die Werte der ersten Zeile obiger Tabelle überprüfen, wie Abb. 1 verdeutlicht.

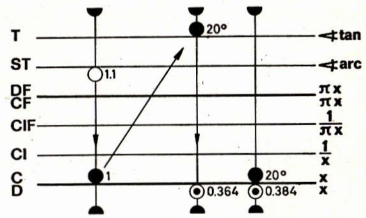


Abb. 1

Um unsere eigentliche Aufgabe

$\tan x = 1{,}1\,x$

zu lösen, müssen wir durch Verschieben des Läuferstriches die Stelle auf dem Rechenstab suchen, an der auf der Skala T und auf der Skala C gleiche Werte abgelesen werden. Wir finden sie bei $x = 29{,}6^\circ$ und lesen mit der in Abb. 2 gezeigten Stabeinstellung auf der Skala D den Funktionswert

$\tan x = 1{,}1\,x = 0{,}568$ ab.

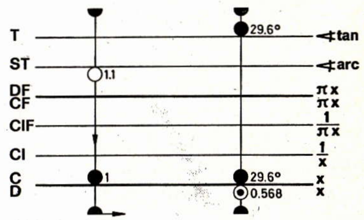


Abb. 2

Für die etwas abgewandelte Aufgabe $\tan x = 1{,}2\,x$ findet man das Ergebnis $x = 39{,}8^\circ$.

Bei obigen Aufgaben sind wir mit der Skala T ausgekommen. Doch bereits für die Aufgabe $\tan x = 1{,}3\,x$ finden wir keine Lösung mehr, da $x > 45^\circ$ wird.

Wir haben hier einen Fall, für den der Rechenstab ARISTO-StudioLog mit der Skala T2 nützlich ist. Wir schieben die rechte 1 der Skala C unter 1,3 der Skala ST, fangen mit der Suche nach dem Ergebnis bei 45° auf der Skala T2 an und finden schließlich $x = 46{,}6^\circ$ mit dem Funktionswert $\tan x = 1{,}3\,x = 1{,}057$.

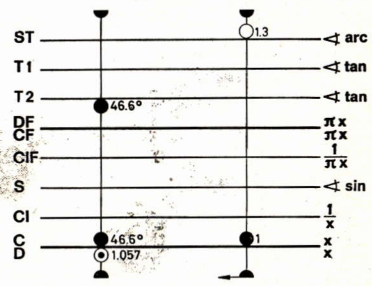


Abb. 3

Als weiteres Beispiel ermitteln wir $\tan x = 2\,x$ und erhalten $x = 66{,}8^\circ$ mit dem Funktionswert $\tan x = 2\,x = 2{,}33$. Das Verfahren kann für alle Winkelfunktionen verallgemeinert werden, wobei man sich im wesentlichen auf Lösungen im 1. Quadranten

beschränken muß. Man findet nun leicht die Einschränkungen für den Proportionalitätsfaktor k, der geometrisch nichts anderes ist, als der Anstieg der Ursprungsgeraden, die der rechten Seite der Gleichung jeweils entspricht. Da uns hier die mit dem Rechenstab erfaßbaren Lösungen im ersten Quadranten interessieren, ermitteln wir die Einschränkungen für k, indem wir den gerade noch ablesbaren Grenzwert einstellen. Für den Gleichungstyp $\tan x = kx$ finden wir ihn durch folgende Einstellung:

Mit Hilfe des Läuferstriches stellen wir 84,5 auf der Skala C unter 84,5° der Skala T2 und lesen über 1 auf Skala C den Faktor $k = 7{,}04$ auf der Skala ST ab, wie im Diagramm Abb. 4 dargestellt.

Den unteren Grenzwert für k finden wir aus der Näherung für kleine Winkel $\tan x \approx x$ zu $k = 1$. In ähnlicher Weise erhalten wir für den Gleichungstyp $\sin x = kx$ die Bedingung $0{,}637 \leqq k \leqq 1$ für $90^\circ \geqq x \geqq 0^\circ$.

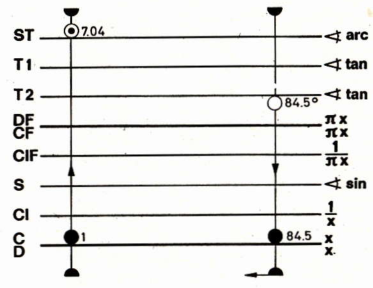


Abb. 4

Wenden wir uns nun dem Gleichungstyp $\cos x = kx$ zu mit dem Beispiel $\cos x = 2x$.

Wir stellen mit Hilfe des Läuferstriches die 1 der Skala C unter 2,0 der Skala ST und finden, daß die x-Werte auf der Skala S entgegengesetzt laufen zu den x-Werten auf Skala C, denn wir müssen wegen der cos-Funktion die rote Bezifferung der Skala S auswerten. In der mit Abb. 5 gezeigten Stabeinstellung finden wir das Ergebnis $x = 25{,}8^\circ$ mit dem Funktionswert $\cos x = 0{,}901$ auf Skala D.

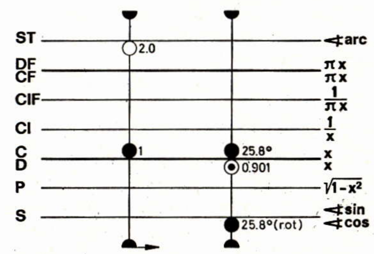


Abb. 5

Für die Konstante k erhalten wir die Bedingung

$$0{,}067 \leqq k \leqq 5{,}64$$

für $84{,}5^\circ \geqq x \geqq 10^\circ$.

Will man über den ersten Quadranten hinaus, so erfordert die Ablesung schon ein sehr hohes Maß an Konzentration.

Als Beispiel möge die Gleichung $\sin x = 0{,}5x$ dienen. Die Lösung ist größer als 90°, daher muß man von 90° weiterzählend die Sinusskala rückläufig, also von rechts nach links, benutzen. Mit der in Abb. 6 gezeigten Stabeinstellung erhält man das Ergebnis $x = 108{,}5^\circ$ mit dem Funktionswert $\sin x = 0{,}948$.

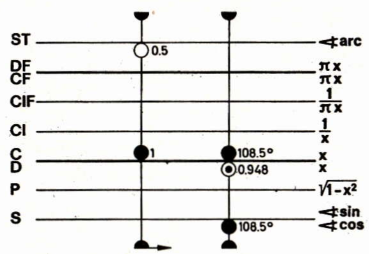


Abb. 6

Die eigentliche Anwendung dieses Einstellverfahrens liegt jedoch nicht in der möglichst allgemeinen Auflösung transzendenter Gleichungen ähnlicher Bauart. Vielmehr scheint es einerseits eine zeitsparende Möglichkeit, um eine graphische Lösung rechnerisch nachprüfen zu können, und andererseits erhält man so recht gute Anfangswerte für die iterativen Näherungsverfahren, wie das Newtonsche Verfahren, die man sonst in der Schulmathematik höchstens für algebraische Gleichungen verwendet.

Ermittlung der Stellenzahl

Oberstudienrat a. D. Dr. Richard Stender

Da wir es bei den logarithmischen Skalen des Rechenstabes mit aufgetragenen Mantissen zu tun haben, ist für die Einstellung der Zahlen auf dem Rechenstab nur die Ziffernfolge maßgebend. So bedeutet beispielsweise der Teilstrich 1—3—9, wie man ihn am besten schreibt, zugleich 1,39; 13,9; 139; 1390; 13900. . . ; bzw. 0,139; 0,0139; 0,00139. . .

Es werden also alle Zahlen immer nur ziffernmäßig eingestellt und abgelesen, so daß eine reine Zahlenrechnung ohne Komma durchgeführt wird. Für uns Rechner entsteht demgemäß die Aufgabe, außer dem auf dem Rechenstab festgestellten Ergebnis in Ziffern die Kommastellung zusätzlich zu bestimmen.

Früher hatte man schematische Stellenzahlregeln und auf dem Rechenstab entsprechende Gedächtnisstützen wie P—1 am Skalenende und Q+1 am Skalenanfang. Aber das ist heute nur noch selten der Fall! In dem seinerzeit führenden Buch „Der logarithmische Rechenschieber und sein Gebrauch" hat Prof. Dr. E. Hammer im Jahre 1902 im Vorwort den Satz geprägt: „Ich glaube bei dieser Gelegenheit nochmals aussprechen zu sollen, daß, wer für die gewöhnliche Multiplikations-, Divisions- und Proportionalrechnungen, die der Rechenschieber so sehr erleichtert, besondere „Regeln" über die Stellung des Dezimalkommas braucht, seine Hände besser von diesem Werkzeug läßt."

Der andere bedeutende Verfasser eines wissenschaftlichen Rechenstabbuches, Prof. Dr. Lothar Schrutka, meint in seiner „Theorie und Praxis des logarithmischen Rechenschiebers" Wien 1943: „Man führe eine Aufgabe derselben Art wie die vorgelegte mit einfachen Zahlenwerten aus. Wählt man die Zahlen dabei so, daß sie von den Zahlen der Aufgabe wenig abweichen, so hat man in dem Ergebnis zugleich einen Näherungswert erhalten."

Das ist der Sinn der Überschlagsrechnung, die am besten vor der Benutzung des Rechenstabes angestellt wird.

Wir können beim Überschlag sehr großzügig verfahren, weil uns ja nur daran gelegen ist, die Stellenzahl, d. h. die Größenordnung des Ergebnisses, zu ermitteln. Das Motto jeglicher Überschlagsrechnung muß heißen: „Sicher rechnen mit vereinfachten Zahlen." Beginnen wir anhand von ausgewählten Rechenbeispielen, uns mit einigen Kniffen vertraut zu machen, die einem „scharfen Ansehen" entspringen. Es kommt immer darauf an, in einer Aufgabe zu erkennen, welche Vereinfachungen möglich sind. Großzügiges Kürzen führt zu kleineren Werten bzw. reduziert die Anzahl der Faktoren. Mitunter ist ein Bruch besser als eine Dezimalzahl zu benutzen: 0,5 = 1/2; 0,33 = 1/3; 0,25 = 1/4.

1. Multiplizieren

$$18{,}93 \cdot 0{,}55 = 10{,}41; \quad \text{denn} \quad 20 \cdot 0{,}5 = 10$$
$$75{,}2 \cdot 3{,}96 = 298; \quad \text{denn} \quad 75 \cdot 4 = 300$$
$$84 \cdot 0{,}0736 = 6{,}18; \quad \text{denn} \quad 80 \cdot 0{,}1 = 8$$
$$299776 \cdot 0{,}0052 = 1559; \quad \text{denn} \quad 300000 \cdot 0{,}005 = 300 \cdot 5 = 1500$$

Die so schwierig aussehende letzte Aufgabe ist ganz leicht zu überschlagen, wenn das Komma nur „verschoben" wird. Der 1. Faktor wird durch 1000 geteilt, dafür der 2. Faktor mit 1000 malgenommen.

2. Dividieren

$$\frac{920}{220} = 4{,}18; \quad \text{denn} \quad \frac{1000}{200} = 5$$

oder Zähler und Nenner durch 100 kürzen, dann bleibt 9 : 2 = 4,5.

$$\frac{280{,}3}{2{,}94} = 95{,}3; \quad \text{denn} \quad \frac{300}{3} = 100$$

In diesem Falle ist das Ergebnis zweistellig, obwohl der Überschlag dreistellig ist. Das Ergebnis kann nicht 953 sein, es muß bei 100 liegen.

$$\frac{111{,}1}{60} = 1{,}852; \quad \text{denn} \quad \frac{100}{60} = 1{,}7$$

einfacher ist die Abrundung $\frac{100}{50} = 2$;

$$\frac{139{,}3}{0{,}642} = 217; \quad \text{denn} \quad \frac{140}{0{,}7} = 200$$

hier Abrundung auf 0,7, weil 140 durch 7 teilbar ist.

3. Dreisatzaufgaben

$$\frac{427 \cdot 0{,}524}{0{,}091} = 2460; \quad \text{denn} \quad \frac{400 \cdot 0{,}5}{0{,}1} = 2000$$
$$\frac{0{,}237 \cdot 1745}{33{,}3} = 12{,}42; \quad \text{denn} \quad \frac{0{,}25 \cdot 1800}{30} = 15$$

Rechenhilfen: $\frac{1800}{30} = \frac{180}{3} = 60$

$$0{,}25 = \frac{1}{4}; \quad 60 : 4 = 15$$

4. Mehrsatzaufgaben

$$\frac{58{,}3 \cdot 215 \cdot 3{,}46}{41{,}6 \cdot 7{,}41} = 140{,}7; \quad \text{denn}$$
$$\frac{60 \cdot 200 \cdot 3{,}5}{40 \cdot 7} = \ldots\ldots; \quad \text{jetzt kürzen:}$$
$$\frac{3{,}5}{7} = \frac{1}{2}; \quad \frac{200}{40} = \frac{5}{1}; \quad \text{bleibt also:} \quad \frac{60 \cdot 5}{2} = 150$$
$$\frac{8580 \cdot 15{,}45 \cdot 2{,}86}{22{,}1 \cdot 17{,}6 \cdot 7{,}32} = 133{,}2; \quad \text{denn}$$
$$\frac{8600 \cdot 15 \cdot 3}{20 \cdot 18 \cdot 7} = \ldots\ldots\ldots; \quad \text{jetzt kürzen:}$$
$$\frac{15}{18} \approx 1; \quad \frac{3}{7} \approx \frac{1}{2}; \quad \text{bleibt also} \quad \frac{8000}{40} = \frac{800}{4} = 200$$

5. Proportionen

$$\frac{360}{6{,}28} = \frac{88{,}1}{x}; \quad x = 1{,}538; \quad \text{denn} \quad \frac{360}{6} = \frac{90}{1{,}5}$$
$$\frac{750}{1000} = \frac{x}{1033}; \quad x = 775$$

denn x kann nur etwas größer sein als 750, nämlich im Verhältnis der Nenner 1000 : 1033.

$$\frac{x}{619} = \frac{26{,}8}{381}; \quad x = 43{,}5$$

denn die Nenner verhalten sich ungefähr wie 2 : 1; deshalb muß auch x etwa doppelt so groß wie 26,8 sein.

6. Kreisflächenberechnung

Nach der Rechenstabformel $A = \left(\frac{d}{c}\right)^2$, wobei d der Durchmesser und $c = \frac{2}{\sqrt{\pi}} = 1{,}129$ sind. Hier können wir $c \approx 1$ annehmen, also den Kreisinhalt in der Größenordnung des Quadrates von d schätzen.

Beispiele:

$$d = 5{,}38\ \text{cm},\ A = 22{,}7\ \text{cm}^2 \quad \text{und} \quad d = 6{,}19\ \text{dm},\ A = 30{,}1\ \text{dm}^2$$

7. Ein klassisches Beispiel

$$J = \frac{760 \cdot 13{,}6 \cdot 0{,}00366}{1{,}293 \cdot 0{,}0685}$$

Wir runden nach den Rundungsregeln und erhalten als Näherung:

$$J \approx \frac{800 \cdot 14 \cdot 0{,}004}{1{,}3 \cdot 0{,}07} = \frac{800 \cdot 14 \cdot 4}{91}$$

Um hier bequem weiterrechnen zu können, führen wir als weitere Näherung $91 \approx 100$ für den Nenner ein und erhalten

$$J \approx \frac{800 \cdot 14 \cdot 4}{100} = 8 \cdot 56 = 448$$

Nun greifen wir zum Rechenstab, rechnen ziffernmäßig durch und lesen als Ergebnis die Ziffernfolge 4—2—7 ab. Damit lautet das vollständige Ergebnis: $J = 427$.

Ein Trick der Überschlagsrechnung besteht darin, zuerst die Schwierigkeiten zu beseitigen. Das sind immer die Nullen nach einem Dezimalkomma und die großen Zahlen. Das vorliegende Beispiel kann auch von hinten aufgerollt werden. Durch Verschieben des Kommas um den Faktor 100 lauten die letzten Werte 0,4 : 7. Ferner sieht man, daß $13{,}6 : 1{,}29 \approx 10$ ist und schreibt sofort $\frac{700 \cdot 4}{7} = 100 \cdot 4 = 400$. Da bleibt kaum noch etwas zu rechnen.

Allgemeine Regeln für die Überschlagsrechnungen gibt es aber nicht. Hier ist der Findigkeit des Rechners ein breiter Spielraum gelassen. Wer sich auf den Umgang mit Zehnerpotenzen versteht, geht sicher, wenn er wie folgt rechnet:

$$J = \frac{7{,}6 \cdot 10^2 \cdot 1{,}36 \cdot 10^1 \cdot 3{,}66 \cdot 10^{-3}}{1{,}293 \cdot 6{,}85 \cdot 10^{-2}}$$

$$= 4{,}27 \cdot 10^{(2+1-3-(-2))} = 4{,}27 \cdot 10^2 = 427$$

Diese Methode hat den Nachteil der Schreibarbeit, aber den Vorteil, daß an den Ziffernfolgen nichts geändert wird und trotzdem mit dem kleinen Einmaleins schnell das Ergebnis gefunden wird, wenn der Rechner Sicherheit im Rechnen mit den Exponenten hat. Oft ist es besser, die Potenzen wegzukürzen: $\frac{10^{-3}}{10^{-2}} = 10^{-1}$. Das Rechnen mit Zehnerpotenzen ist der sicherste Weg, wenn mit vielen Nullen hinter dem Komma gerechnet wird, bzw. mit sehr großen Zahlenwerten. Dann nämlich spart man Schreibarbeit, z. B. $0{,}0000007 = 7 \cdot 10^{-7}$, und die Schreibweise ist übersichtlicher.

Die Praktiker, welche den Rechenstab besonders auch zu Serienaufgaben gern benutzen, sind sich meistens über die Stellen des Ergebnisses schon durch die Gegebenheiten der vorliegenden Aufgaben im voraus klar, so daß ihnen Überschlagsrechnungen nur Bestätigungen ihrer vermuteten Schlußwerte sein können. Sie tun aber gut, hinterher noch die ganze Aufgabe zu überschlagen. Der Rechenstab nimmt ihnen die lästige Zahlenrechnung ab und verbürgt ihnen durchweg soviele Ziffern, wie sie benötigen.

Auflagerkräfte

Prof. Franz Lehner

In den Abhandlungen der Mechanik paralleler Kräfte ist ein wesentlicher Teil dem Problem der an zwei Punkten unterstützten Träger gewidmet. Dies sind z. B. Brückenträger, Deckenträger, Maschinenwellen und tragende Maschinenbauteile. Die Lasten und ursächlichen Kräfte wirken dabei auf beide Lager und diese reagieren mit gleichgroßen Gegenkräften. Meist sind dabei mehrere Teilkräfte und Teillasten wirksam, wobei die prinzipielle Beziehung gilt: Die Summe der ursächlichen Kräfte F ist gleich der Summe der beiden Auflagerkräfte A und B.

Aus den einzelnen Teilkräften und Teillasten errechnen sich die Anteile der Auflagerkräfte nach den Formeln:

$$A = \frac{F\,b}{l}\,;\ B = \frac{F\,a}{l}$$

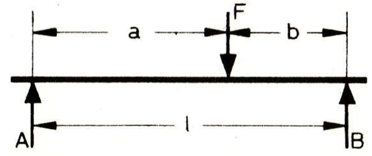


Abb. 1

Für jede einzelne Ursache muß mindestens eine Berechnung mit dem Rechenstab durchgeführt werden, die zweite Auflagerkraft kann mit der Beziehung $F = A + B$ auch durch Differenzbildung gefunden werden.

Die Formeln für A und B können wir als direkte Proportionskette schreiben:

$$\frac{F}{l} = \frac{B}{a} = \frac{A}{b}$$

Wir fassen den Bruchstrich als Trennungsfuge zwischen den Skalen C/D oder DF/CF auf und verwenden die in Abb. 2 für die Skalen C/D oder die in Abb. 3 für die Skalen DF/CF gezeigte Stabeinstellung.

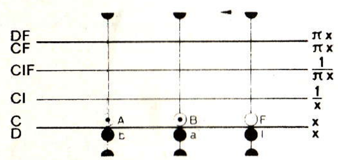


Abb. 2

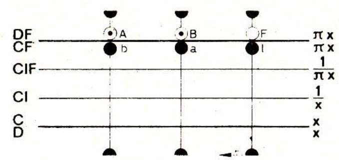


Abb. 3

Bei mehreren Teillasten oder Teilkräften müssen wir jede Kraft F über der Länge l einstellen und erhalten so die Anteile der beiden Auflagerkräfte, die abschließend zu addieren sind. In den Lehrbüchern findet sich hierfür oft eine Summenformel. Wie aber in mehreren Untersuchungen festgestellt wurde, ist das Rechentempo und vor allem die Rechensicherheit mit obiger Proportionskette wesentlich besser. Die Summenformel $F = A + B$ verwendet man zweckmäßig als gute Kontrolle.

Selbst an diesem einfachen Problem zeigt sich, daß das Arbeiten mit Proportionen den Methoden des gewohnten Ziffernrechen- und Formelrechenverfahrens überlegen ist. Der Praktiker hat hierbei ferner den Vorteil, daß die Stabeinstellung nicht nur die Antwort auf eine einzige Rechnung im herkömmlichen Sinne ist, sondern daß er damit eine Tabelle aller möglichen Werte vor sich hat. In der Niederschrift solcher Berechnungen muß man allerdings auf eine saubere und übersichtliche Protokollführung achten.

1. Diskussion einer Einzellast

Der Abstand der Auflager beträgt $l = 2$ m und die Einzellast $F = 3$ Mp. Die im Auflager B wirkenden Kräfte sind zu berechnen, wenn die Einzellast F nacheinander mit den Abständen $a_1 = 0{,}8$ m; $a_2 = 1{,}4$ m; $a_3 = 1{,}6$ m und $a_4 = 1{,}8$ m angreift.

Aus der Proportionskette

$$\frac{F}{l} = \frac{B_1}{a_1} = \frac{B_2}{a_2} = \frac{B_3}{a_3} = \frac{B_4}{a_4}$$

folgt die in Abb. 4 gezeigte Stabeinstellung.

Ergebnisse: $B_1 = 1{,}2$ Mp; $B_2 = 2{,}1$ Mp;
$B_3 = 2{,}4$ Mp; $B_4 = 2{,}7$ Mp.

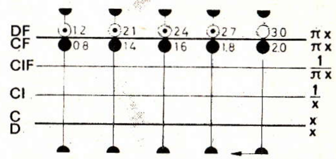


Abb. 4

2. Fahrbahnträger

Das Gewicht des Laufkranes samt Last verteilt sich auf beide Achsen gleichteilig, das heißt, die Räder wirken auf den Fahrbahnträger mit gleicher Kraft. Wir haben somit zwei gleichgroße Kräfte. Die Berechnung der Auflagerkräfte kann daher in einer einzigen Stabeinstellung erfolgen. Abb. 5 zeigt die Prinzipskizze, der die gegebenen Größen entnommen werden können.

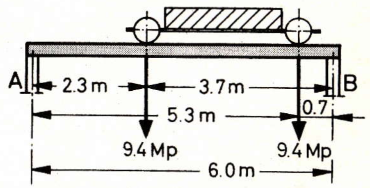


Abb. 5

Mit der in Beispiel 1 erläuterten Proportionskette erhalten wir die in Abb. 6 dargestellten Stabeinstellungen.

$$\frac{9{,}4}{6{,}0} = \frac{5{,}8}{3{,}7} = \frac{1{,}1}{0{,}7} = \frac{3{,}6}{2{,}3} = \frac{8{,}3}{5{,}3}$$

Wir entnehmen die Ergebnisse und addieren sie zu den Auflagerkräften

$A = 5{,}8 + 1{,}1 = 6{,}9$ Mp
$B = 3{,}6 + 8{,}3 = 11{,}9$ Mp.

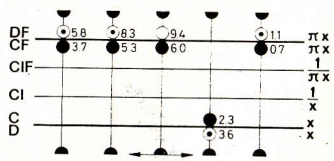


Abb. 6

Nun können wir noch die Kontrollrechnung durchführen:

$$F = 6{,}9 + 11{,}9 = 18{,}8 \text{ Mp}$$

3. Transmissionswelle

Für die in Abb. 7 skizzierte Anordnung wird der Leser nun die zur Berechnung der Auflagerkräfte A und B erforderlichen Stabeinstellungen leicht selbst finden. Die Tabelle enthält das Rechenprotokoll.

F	A	B
300	205	95
500	258	242
400	133	267
1200 =	596 +	604

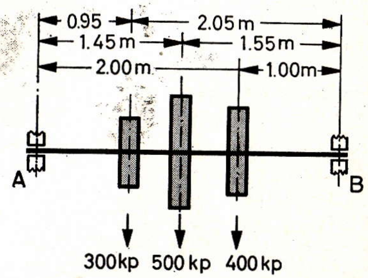


Abb. 7

Der ARISTO-StudioLog für erfahrene Stabrechner

Dipl.-Ing. Rolf Jäger

Der Rechenstab ARISTO-Studio ist in den letzten Jahren immer wieder verbessert worden, ohne an seiner Skalenanordnung etwas zu verändern. Sein Teilungsbild ist so zweckmäßig für alle Ingenieurberechnungen, daß er in verhältnismäßig kurzer Zeit der meistbenutzte Rechenstab geworden ist. Eine Umfrage an den Universitäten, Technischen Hochschulen und Ingenieurschulen ergab im Jahre 1957 eine Bestätigung für die Richtigkeit der Skalenanordnung, so daß sich alle Verbesserungen auf die Bezifferung, die Strichlängen und die Form konzentrierten. Neue Verbindungsstege mit Gummiauflagen für beide Seiten, die Gestaltung des Läufers und die praktische, dauerhafte Verpackung brachten weitere Vorteile.

Aber die Entwicklung der Rechenstäbe ging weiter. Wünsche der aktiven Rechenstabbenutzer wurden im Laufe der Jahre registriert und neue Rechenverfahren ausprobiert. Das vollständige System der Grundskalen, versetzten Skalen und Kehrwertskalen führte in letzter Konsequenz dazu, jeder Zungenrandskala die entsprechende Kehrwertskala zuzuordnen. Die treibende Kraft bei allen Überlegungen war immer wieder die Absicht, Einstellungen zu sparen, damit Zeit zu gewinnen und die Genauigkeit zu steigern. Die Anzahl der Einstellungen darf höchstens gleich der Anzahl der Faktoren sein, kann aber durch Ausnutzung der versetzten Skalen und Läufermarken sogar verringert werden.

Eine Verbesserung des ARISTO-Studio durch Ergänzung von Skalen in einem Teil der Skalenanordnung würde Verschlechterungen anderswo erzwingen. Um berechtigte Wünsche erfüllen zu können, blieb nur der eine Weg, den Rechenstab zu verbreitern.

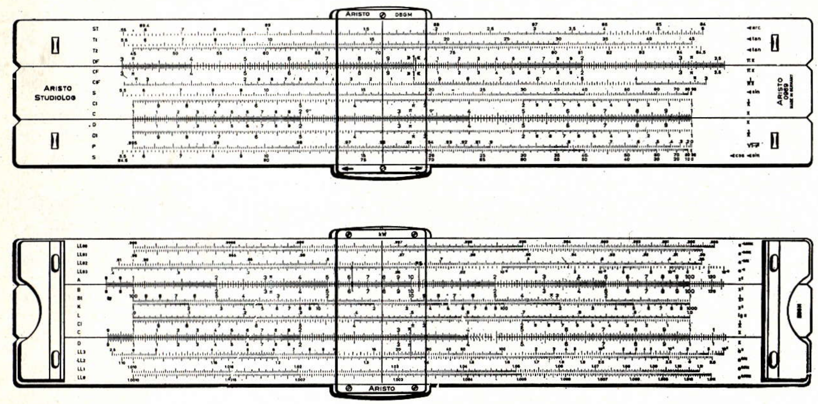


Abb. 1

Der neue Rechenstab ARISTO-StudioLog ist ein Schritt in die Zukunft. Unter Abwägung der vielen Möglichkeiten, die ein breiterer Körper bietet, sind die 29 Skalen so angeordnet, daß ein ruhiges und übersichtliches Teilungsbild entsteht. Die Skalenanordnung bietet ein Maximum an Bequemlichkeit für die zahlreichen Rechenmöglichkeiten und der breite Körper erweist sich beim Rechnen als außerordentlich handlich.

Folgende Ergänzungen kennzeichnen den Wert der Weiterentwicklung:

1. Die beim ARISTO-MultiLog bewährten acht Exponentialskalen sind übersichtlich auf einer Seite angeordnet.

2. Die Quadratskalen A/B sind durch eine Kehrwertskala BI ergänzt, damit anschließend an eine Quadrierung bequem weitermultipliziert werden kann. Diese Skala hat sich beim ARISTO-Darmstadt und ARISTO-TriLog bereits als praktisch erwiesen.

3. Die Skala ST bildet mit den Skalen T1 und T2 eine dreiteilige Tangensskala für Winkel von 0,55° bis 84,5°, deren Funktionswerte in Skala D stehen. Die Kotangenswerte werden als Kehrwerte des Tangens in Skala DI abgelesen.

4. Da die Skala ST als Sinusskala für kleine Winkel gilt, hat sie analog zur Sinusskala auf dem Körper eine rote Kosinus-Bezifferung erhalten.

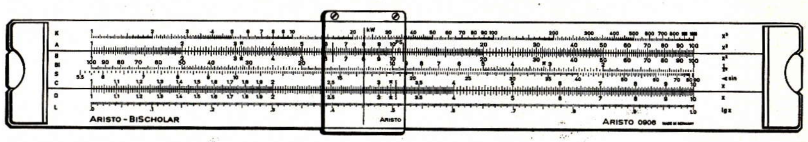
5. Die zusätzliche Sinusskala auf der Zunge ist eine praktische Ergänzung für spezielle Aufgaben der ebenen und sphärischen Trigonometrie.

6. Die Wiederholung der Kehrwertskala CI auf beiden Seiten der Zunge ist eine angenehme Bequemlichkeit. Die Vorteile der Zuordnung von CI und L für Logarithmen von Kehrwerten ist im Heft 4 dieser ARISTO-Mitteilungen auf Seite 7 beschrieben.

So sind beim ARISTO-StudioLog die Vorteile des ARISTO-Studio bewahrt und allerlei Verbesserungen hinzugefügt, die dem versierten Stabrechner weitere Rechenhilfen und Annehmlichkeiten bieten.

Neben dieser kurzen Vorstellung des Rechenstabes sind in den vorhergehenden Texten bereits Beispiele für das Rechnen mit dem ARISTO-StudioLog eingearbeitet. Auch in Zukunft werden die Vorteile dieses Rechenstabes herausgestellt werden, damit die Leser dieser Zeitschrift sich ein Urteil bilden können, wie weit diese Rechenvorteile für sie wichtig sind.

In Zukunft wird bereits in der Schule mit der Vorbereitung auf den ARISTO-StudioLog begonnen, denn für die Mittelstufe der Gymnasien und Realschulen sowie für die Berufs- und Gewerbeschulen ist der Schulrechenstab ARISTO-BiScholar entwickelt worden.



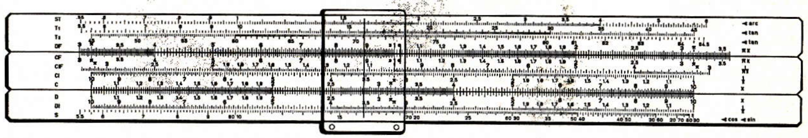


Abb. 2

Sein Teilungsbild weist schon sehr viel Ähnlichkeit mit dem ARISTO-Studio und besonders mit dem ARISTO-StudioLog auf. Nur fehlen dem ARISTO-BiScholar die LL-Skalen.

Der ARISTO-Dreikantmaßstab mit Griffleiste

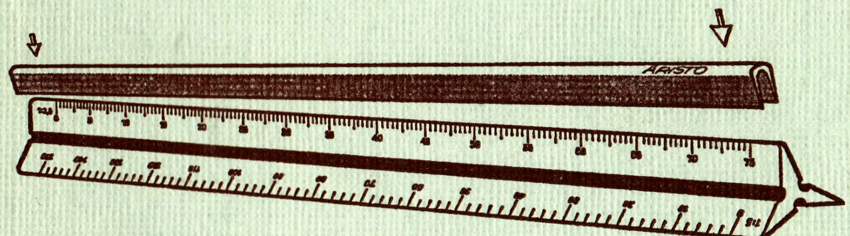
Dipl.-Ing. Rolf Jäger

Das Dilemma mit den Dreikantmaßstäben ist hinreichend bekannt. Man möchte möglichst viele Reduktionen griffbereit bei sich haben. Dieses Problem ist mit der Dreikantform gelöst. Aber bei der Arbeit geht mit Drehen und Wenden des Maßstabes das Suchen nach der gewünschten Reduktion los und immer wieder liegt die falsche Reduktion „oben", weil auch die Kennzeichnung durch Farbstreifen zwei Möglichkeiten zuläßt.

Beim Abtragen von Maßen ist eine scharfe Facette erwünscht, aber die gerade oben liegende Kante drückt sich unangenehm in die Hände ein. Es sind schon viel Versuche unternommen worden, die Dreikantmaßstäbe durch eine andere Konstruktion zu ersetzen, oder durch aufsteckbare Reiter das Finden der Reduktion zu vereinfachen; die Erfolge blieben aus.

Dieses Problem ist jetzt erfolgreich gelöst. ARISTO-Dreikantmaßstäbe haben eine durchgehende Griffleiste erhalten, die „mit einem Griff" auf die jeweils oben liegende Kante aufgesteckt wird. Das hat mehrere Vorteile:

Die richtige Lage des Maßstabes ist durch die Griffleiste gekennzeichnet. Eine der beiden aufliegenden Reduktionen ist die richtige, die helle und dunkle Einfärbung der Griffleiste erleichtert das Erkennen. Die sanfte Wölbung der Griffleiste verbessert grifftechnisch die Handhabung und nimmt der oberen Kante die Schärfe. Die Hände können deshalb bequem auf der Rundung aufliegen. Es lohnt sich, das einmal zu probieren! Da die Griffleiste auf dem Maßstab aufgesteckt im transparenten Steckétui mitgeliefert wird, ist sie ständig zur Hand.



ARISTO-Dreikantmaßstab mit aufsteckbarer Griffleiste

ARISTO