45-39-71

10 коп.

Владимир

50шт 2,95

M173

Л. З. Румшиский

Счётная линейка

Л. З. РУМШИСКИЙ

СЧЕТНАЯ ЛИНЕЙКА

ИЗДАНИЕ ЧЕТВЕРТОЕ
СТЕРЕОТИПНОЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1969

518
Р 86
УДК 681:143:518.5

АННОТАЦИЯ

В книге дается краткое описание счетной линейки, излагаются общие принципы решения задач на ней, методы выбора наилучших схем расчета, а также способ определения порядка результата вычислений.

Книга может служить учебным пособием для студентов техникумов и втузов по изучению счетной линейки.

Последние главы книги могут оказать пользу инженерам и техникам при проведении специальных расчетов, в частности, с комплексными числами.

В приложениях дается теоретическое обоснование основных принципов работы на счетной линейке, устанавливается точность вычислений на ней и даются основные сведения о круговой логарифмической линейке КЛ-1.

Настоящее четвертое издание печатается с матриц третьего издания.

Лев Зимонович Румшиский
Счетная линейка
М., 1969 г., 64 стр. с илл.
Редактор *А. З. Рывкин*
Техн. редактор *А. А. Благовещенская* Корректор *О. А. Бутусова*

Печать с матриц. Подписано к печати 30-VII-1969 г. Бумага 84×108¹/₃₂. Физ. печ. л. 2. Усл. печ. л. 3,36. Уч.-изд. л. 2,86. Допечатка тиража 200000 экз. Т-16144. Цена книги 10 коп. Заказ № 2661.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Отпечатано с матриц в типографии издательства «Коммунист», г. Саратов.

2-2-3
154-69

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА 3

РЕШЕНИЕ ПРОПОРЦИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

ГЛАВА 4

СПЕЦИАЛЬНЫЕ РАСЧЕТЫ НА ЛИНЕЙКЕ

ВВЕДЕНИЕ

Счетная линейка предназначена для быстрого выполнения разнообразных математических действий — от умножения и деления до вычислений с тригонометрическими, показательными и другими элементарными функциями.

Достоинства счетной линейки особенно сказываются при решении таких технических задач, в которых с относительно небольшой точностью надо просчитать большое количество однотипных вариантов, например, произвести расчеты по определенной формуле при разных значениях исходных данных. В этих случаях удачный выбор порядка вычислений может дать значительную экономию времени.

Чтобы выбрать оптимальный алгоритм решения задачи на счетной линейке, надо знать ее возможности, в частности, надо знать, какие задачи решаются с помощью одной установки движка. Этими соображениями вызвано систематическое рассмотрение в настоящей книге *счетной линейки как инструмента пропорций и функциональных преобразований.* Теоретические вопросы обоснования правила пропорций и построения шкал счетной линейки вынесены в приложения.

При вычислениях с многозначными числами надо уметь определять порядок числа, цифровой состав которого получается на линейке. В настоящей книге излагается *метод нормализации чисел для определения порядка результата, а также применение для этой цели плавающей запятой.* Этот метод удобен при работе на любых вычислительных машинах без автоматического управления.

1.2. Правило пропорций

Основное свойство счетной линейки заключается в следующем:

*При любой фиксированной установке движка все числа шкалы **A** пропорциональны расположенным против них числам шкалы **B*** (правило пропорций)*).

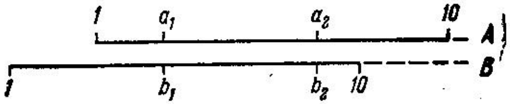

Рис. 3.

Обозначим через a_1 и b_1, a_2 и b_2 любые пары чисел, которые окажутся друг против друга на шкалах A и B при некотором положении движка (рис. 3). Тогда правило пропорций можно записать в виде

$$\boxed{\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}} \qquad (1.1)$$

Пример. Установим движок так, чтобы число 5 шкалы A движка пришлось против числа 4 шкалы B корпуса

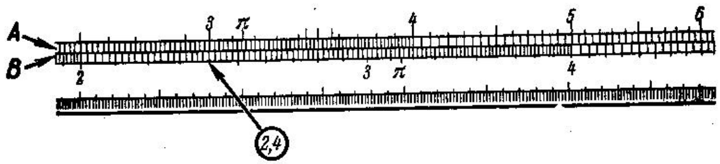

Рис 4

(рис. 4). Тогда на шкалах A и B можно прочесть такую пропорцию:

$$\frac{3}{2{,}4}=\frac{4}{3{,}2}=\frac{5}{4}=\frac{6}{4{,}8}.$$

Здесь числители выписаны с верхней из рассматриваемых шкал, а знаменатели — с нижней. Такой порядок записи удобен для чтения пропорций непосредственно со счетной

*) Объяснение этого свойства дано в Приложении 1; убедиться в его справедливости можно непосредственно

линейки (ребро движка как бы заменяет черту в записи отношения). Поэтому в дальнейшем мы будем, как правило, придерживаться именно такого порядка записи.

Конечно, на практике можно менять этот порядок записи, «перевертывать» пропорцию, но до овладения твердыми навыками работы на счетной линейке рекомендуется избегать этого.

1.3. Решение пропорций

Основные шкалы счетной линейки позволяют решать пропорции, т. е. по трем данным членам пропорции находить неизвестный четвертый член. Пусть в пропорции (1.1) заданы три члена a_1, b_1 и a_2, причем эти заданные числа заключены между числами 1 и 10; требуется найти четвертый член b_2. Решение этой задачи на основных шкалах счетной линейки осуществляется с помощью правила пропорций. Надо установить движок так, чтобы число a_1 шкалы A оказалось точно против числа b_1 шкалы B. Тогда против числа a_2 шкалы A на шкале B будет находиться искомое число b_2.

Рассмотрим подробнее этапы решения задачи, расчленив весь процесс на отдельные операции (команды):

1) визирной линией бегунка отметить на шкале B число b_1;
2) установить движок так, чтобы число a_1 шкалы A оказалось под визирной линией;
3) переместить бегунок так, чтобы визирная линия отметила число a_2 шкалы A;
4) под визирной линией на шкале B прочесть искомое число b_2.

Пример 1. Найти x из пропорции

$$\frac{5}{4}=\frac{3}{x}.$$

Решение. Установим движок так, чтобы число 5 шкалы A стало против числа 4 шкалы B (см. рис. 4); тогда против числа 3 шкалы A прочтем на шкале B искомое значение

$$x=2{,}4.$$

При решении пропорции может случиться, что операции 3) и 4) невыполнимы, так как число a_2 шкалы A выйдет за границы шкалы B и, значит, против него не окажется никакого числа шкалы B. Это означает, очевидно, что искомый член пропорции меньше 1 или больше 10. В таком случае для решения задачи применяется **переброска движка,** состоящая из двух следующих операций, выполняемых между операциями 2) и 3):

2_{I}) отметить визирной линией положение того конца шкалы A, который не выходит за границы шкалы B;

2_{II}) передвинуть движок так, чтобы под визирной линией оказался второй конец шкалы A (см. ниже. рис. 5 и 6).

После переброски движка против числа a_2 шкалы A на шкале B будет стоять не искомое число b_2, а число, в 10 раз большее, если движок переброшен вправо, или в 10 раз меньшее, если движок переброшен влево.

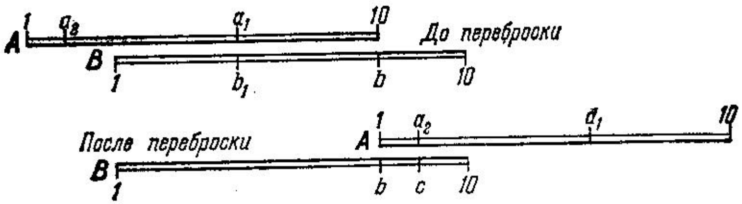

Рис. 5.

Для доказательства рассмотрим схему переброски движка вправо, изображенную на рис. 5. Поскольку правило пропорций должно иметь место как до переброски движка, так и после нее, то должны быть справедливы следующие две пропорции (обозначения см. на рис. 5):

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{10}{b}; \qquad \frac{1}{b}=\frac{a_2}{c}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{a_1}{b_1}=10\frac{a_2}{c}=\frac{a_2}{0{,}1c}. \tag{1.2}$$

Сравнивая пропорции (1.2) и (1.1), заключаем, что $b_2=0{,}1c$ или $c=10b_2$.

Аналогично доказывается утверждение относительно переброски движка влево.

Пример 2. Найти x из пропорции

$$\frac{5}{4}=\frac{1{,}1}{x}. \tag{1.3}$$

Решение. Здесь начальная установка движка та же, что и в примере 1. Однако число 1,1 шкалы A выходит за левый конец шкалы B. Поэтому для решения задачи требуется переброска движка вправо (рис. 6). После переброски

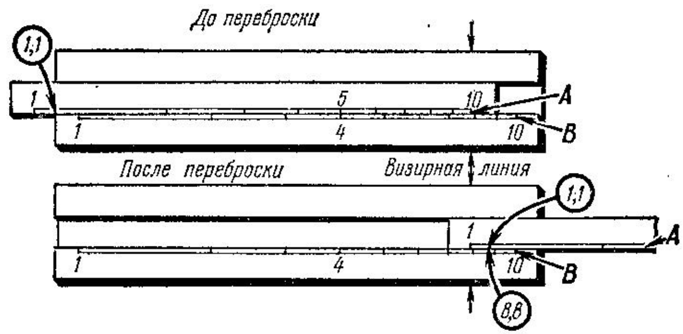

Рис. 6.

движка против числа 1,1 шкалы A на шкале B оказывается число $10x=8{,}8$; следовательно, $x=0{,}88$.

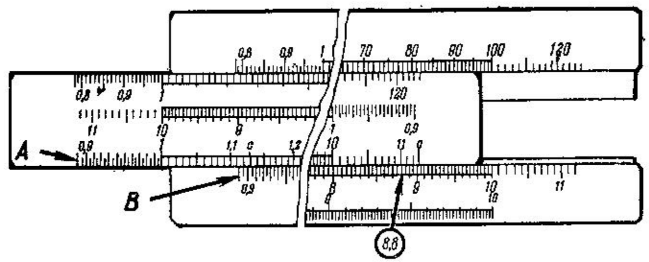

Рис. 7.

Примечание. На некоторых линейках для уменьшения количества перебросок движка шкалы A и B продлены влево до 0,88 и вправо до 11,2 (рис. 7). Пропорцию (1.3) на таких линейках можно решать на шкалах A и B без переброски движка.

Решение пропорций на логарифмическом диске. Выпускаемый московским заводом «Калибр» логарифмический диск «Спутник» позволяет полностью избежать перебросок движка при решении пропорций. Основная шкала **A** логарифмического диска нанесена на неподвижном внешнем циферблате, шкала **B** — на подвижном внутренем циферблате (рис. 8). Благодаря круговому расположению шкал никакой член пропорции не может выйти за границу шкалы, и поэтому все действия на этом диске производятся без переброски движка; в остальном они выполняются так же, как и на обычной линейке. Преимущества логарифмического диска перед счетной линейкой особенно проявляются в тех задачах, где расчетная формула содержит большое количество операций умножения и деления (см. стр. 19). Но надо заметить, что точность установки чисел на диске «Спутник» меньше, чем на нормальной счетной линейке.

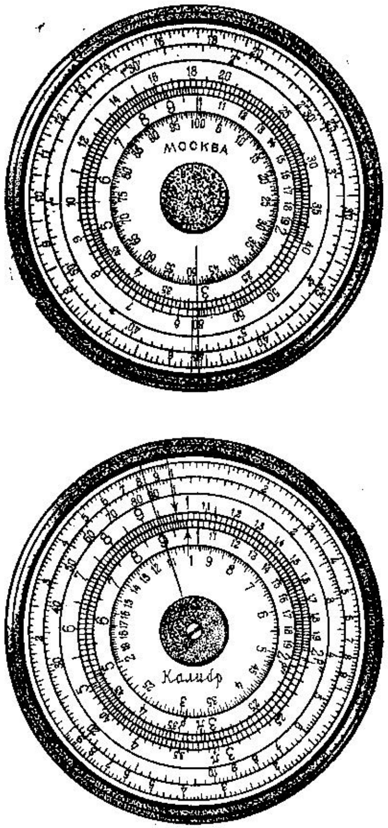

Рис. 8.

1.4. Нормализация чисел. Определение порядка результата вычислений

До сих пор мы считали, что в пропорции $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{x}$ исходные данные a_1, b_1, a_2 заключены между 1 и 10. Определение порядка результата в этом случае можно производить по указанным выше правилам, что не вызывает затруднений. В общем же случае для быстрого и точного определения порядка результата следует предварительно нормализовать исходные данные, т. е. представить их в подходящем виде.

Условимся говорить, что *число a нормализовано*, если оно записано в виде

$$a = a_0 \cdot 10^n, \qquad (1.4)$$

где n — целое, а множитель a_0 заключен между 1 и 10 $(1 \leqslant a_0 < 10)$. Будем называть a_0 *основой*, n — *порядком числа* a. Отметим, что целая часть основы есть одно из чисел 1, 2, ..., 9.

Примеры:

$$a = 3580 = 3{,}580 \cdot 10^3 \qquad (a_0 = 3{,}580, \quad n_a = 3);$$
$$b = 0{,}0432 = 4{,}32 \cdot 10^{-2} \qquad (b_0 = 4{,}32, \quad n_b = -2);$$
$$c = 7{,}33 = 7{,}33 \cdot 10^0 \qquad (c_0 = 7{,}33, \quad n_c = 0).$$

Рассмотрим умножение и деление чисел, представленных в нормализованном виде. Из формул

$$ab = (a_0 \cdot 10^n) \cdot (b_0 \cdot 10^m) = (a_0 \cdot b_0) \cdot 10^{n+m},$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a_0 \cdot 10^n}{b_0 \cdot 10^m} = \left(\frac{a_0}{b_0}\right) \cdot 10^{n-m}$$

видно, что умножение и деление нормализованных чисел сводится к умножению и делению их основ.

То же самое относится и к решению пропорции

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{x},$$

так как вычисление выражения $x = \frac{b_1 a_2}{a_1}$ сводится к умножению b_1 на a_2 и делению полученного произведения на a_1.

Рекомендуем обратить внимание на то, что определение порядка результата (x) производится по готовой формуле решения, в то время как решение пропорции на счетной линейке не требует выписывания этой формулы.

Пример. Вычислить

$$\frac{ab}{c}=\frac{3580\cdot 0{,}0432}{7{,}33}.$$

Решение распадается на следующие этапы:

1) Производим нормализацию чисел a, b, c и записываем рассматриваемое выражение в виде

$$\frac{ab}{c}=\frac{3{,}58\cdot 4{,}32}{7{,}33}\cdot 10^{3+(-2)-0}=\frac{a_0b_0}{c_0}\cdot 10^1.$$

2) Прикидываем в уме

$$\frac{a_0b_0}{c_0}\approx\frac{3\cdot 4}{7}\approx 2.$$

3) На счетной линейке выполняем необходимые вычисления, т. е. решаем пропорцию $\frac{c_0}{b_0}=\frac{a_0}{x}$, и записываем результат с учетом произведенной «прикидки»: $\frac{a_0b_0}{c_0}=2{,}11$.

4) Выписываем окончательный результат:

$$\frac{ab}{c}=2{,}11\cdot 10^1=21{,}1.$$

Применение плавающей запятой. На практике при нормализации исходных данных нет надобности выписывать множитель 10^n. Достаточно лишь воспользоваться так называемой плавающей запятой. *Плавающая запятая отделяет первый знак числа* (первую значащую цифру) *и ставится сверху.*

Например,

$$a=3580=3'580;$$
$$b=0{,}0432=0{,}04'32.$$

При этом порядок, т. е. число n, определяется количеством разрядов, отделяющих истинную запятую от плавающей; если плавающая запятая находится слева от истинной, то n положительно, если справа — отрицательно.

Рассмотренный выше пример вычисления записывается коротко следующим образом:

$$\frac{ab}{c}=\frac{3'580\cdot 0{,}04'32}{7{,}33}=2{,}11\cdot 10^{3+(-2)-0}=21{,}1.$$

Применять плавающую запятую целесообразно только при записи исходных данных, т. е. тех чисел, над которыми производятся действия в расчетной формуле. Полученный результат следует выписывать с множителем 10^n, т. е. уже без плавающей запятой. При этом показатель n подсчитывается по числу разрядов, на которые переносится плавающая запятая относительно истинной запятой: перенос плавающей запятой на один разряд влево в числителе увеличивает n на 1, а перенос ее на один разряд влево в знаменателе уменьшает n на 1.

Приведение чисел к нормализованному виду с помощью плавающей запятой особенно важно при выполнении большого количества действий.

Пример.

$$\frac{0{,}00751\cdot 23{,}8\cdot 0{,}0157}{243\cdot 0{,}890\cdot 36{,}4}=\frac{0{,}007'51\cdot 2'3{,}8\cdot 0{,}01'57}{2'43\cdot 0{,}8'90\cdot 3'6{,}4}=$$
$$=0{,}357\cdot 10^{-3+1-2-2+1-1}=0{,}357\cdot 10^{-6}$$

Здесь порядок результата вычислений с основами определен следующей прикидкой в уме:

$$\frac{7\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 8\cdot 3}=\frac{7}{24}\approx 0{,}3.$$

Схема выполнения указанных действий будет рассмотрена на стр. 19.

Предупреждение. *Прикидывая в уме порядок результата вычислений с основами, мы лишь приближенно оцениваем величину результата, но не получаем его первого знака.*

Например,

$$\frac{6{,}49\cdot 4{,}71}{3{,}02}=10{,}1,\ \text{хотя}\ \frac{6\cdot 4}{3}=8.$$

Точно так же

$$\frac{3{,}02}{6{,}49\cdot 4{,}71}=0{,}0988,\ \text{хотя}\ \frac{3}{6\cdot 4}=\frac{1}{8}\approx 0{,}1.$$

Примечание. Иногда прикидку в уме можно упростить, округляя некоторые основы в бо́льшую сторону. Например,

$$\frac{9{,}68\cdot 8{,}58}{4{,}47}\approx\frac{10\cdot 8}{4}=20$$

(результат вычислений с тремя знаками 18,9).

1.5. Умножение и деление

При описании методов умножения и деления на счетной линейке удобно рассматривать эти операции как частные случаи решения пропорций. Действительно, решение пропорции $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{x}$ выражается формулой $x=\frac{b_1 a_2}{a_1}$, которая при $a_1=1$ дает произведение $(b_1 a_2)$, при $b_1=1$ или $a_2=1$ дает частное $\left(\frac{a_2}{a_1}\text{ или }\frac{b_1}{a_1}\right)$. Рассмотрим здесь наиболее употребительные схемы умножения и деления, причем будем считать, что исходные данные уже нормализованы. Другими словами, мы будем описывать умножение и деление чисел, заключенных между 1 и 10.

Вычисление произведения

$$\boxed{ab=x}$$

может быть сведено к решению пропорций разными способами, например, так:

$$\frac{b}{1}=\frac{x}{a}; \quad \frac{1}{b}=\frac{a}{x}. \tag{1.5}$$

Рассмотрим схему вычислений, соответствующую последней из написанных выше пропорций, что при нашем соглашении о реализации пропорций на счетной линейке (стр. 9)

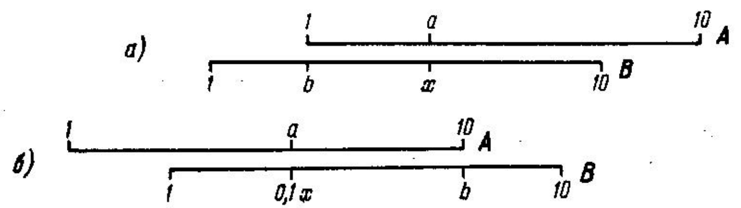

Рис. 9.

означает получение результата на шкале B корпуса. Схема установки движка приведена на рис. 9, *а*. Порядок выполнения операций здесь таков: против числа b шкалы B устанавливаем число 1 шкалы A, произведение x читаем на шкале B против числа a шкалы A.

Разумеется, порядок сомножителей a и b в произведении не играет никакой роли, выбор обозначений здесь сделан лишь для удобства обращения к шкалам A и B соответственно. На практике при умножении конкретных чисел нужна только **схема умножения:**

> Против одного из сомножителей, отмеченного на шкале B корпуса, установить 1 шкалы A движка; перевести визир на второй множитель по шкале A; визир укажет произведение на шкале B корпуса.

Если произведение заданных сомножителей (которые мы предположили заключенными между 1 и 10) окажется больше 10, то для решения пропорции (1.5) понадобится переброска движка, означающая просто, что против числа b шкалы B надо установить не число 1, а число 10 шкалы A, т. е. не левый, а правый конец этой шкалы (рис. 9, *б*). При этом против числа a шкалы A мы прочтем не искомое произведение x, а $0{,}1x$, так как движок перебрасывается влево и, следовательно, пропорция $\frac{1}{b}=\frac{a}{x}$ заменяется на $\frac{10}{b}=\frac{a}{0{,}1x}$. Другими словами, произведение чисел a и b при умножении с помощью правого конца шкалы A будет в 10 раз больше числа, прочитываемого на шкале B по схеме рис. 9, *б*.

Пример 1. Вычислить произведение $x=2{,}12\cdot 3{,}48$.

Так как $2\cdot 3=6<10$, то против числа 2,12 шкалы B устанавливаем левый конец (1) шкалы A; против числа 3,48 шкалы A читаем на шкале B результат $x=7{,}38$.

Пример 2. Вычислить произведение $x=2{,}12\cdot 6{,}60$.

Так как $2\cdot 6=12>10$, то против числа 2,12 шкалы B устанавливаем правый конец (10) шкалы A; против числа 6,60 шкалы A читаем на шкале B результат (с учетом порядка): $x=14{,}0$.

Примечание. Так как порядок произведения устанавливается без труда с помощью плавающей запятой, то во время работы на линейке о порядке результата можно не думать.

Упражнение. Разберите схему установки и порядок выполнения операций при умножении чисел $ab=x$ путем решения пропорции $\frac{a}{1}=\frac{x}{b}$ с получением результата на шкале A движка.

Вычисление частного

$$\boxed{\frac{b}{a}=x}$$

можно свести к решению одной из двух пропорций

$$\frac{a}{b}=\frac{1}{x}, \qquad \frac{a}{1}=\frac{b}{x},$$

которые приводят к *двум различным* схемам деления.

Первая схема деления (рис. 10, I).

> Против делимого (b), отмеченного визиром на шкале $\boldsymbol{B}$ корпуса, установить делитель (a) по шкале $\boldsymbol{A}$ движка. Частное (x) будет указано на шкале $\boldsymbol{B}$ тем концом шкалы $\boldsymbol{A}$, который не выйдет за границы корпуса.

Более точно, если результат окажется против 1 шкалы $\boldsymbol{A}$, то он даст искомое частное x (см. рис. 10, I); если же 1

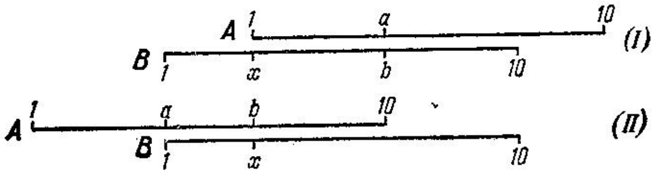

Рис. 10.

шкалы $\boldsymbol{A}$ выйдет за границу шкалы $\boldsymbol{B}$, то против 10 шкалы $\boldsymbol{A}$ следует читать результат $10x$ $\left(\text{так как пропорция } \frac{a}{b}=\frac{1}{x}\right.$ равносильна пропорции $\left.\frac{a}{b}=\frac{10}{10x}\right)$. Таким образом, *первая схема деления не требует переброски движка.*

Вторая схема деления (рис. 10, II).

> Против 1 шкалы $\boldsymbol{B}$ корпуса установить делитель (a) на шкале $\boldsymbol{A}$ движка; перевести визир на делимое (b) по шкале $\boldsymbol{A}$. Визир укажет частное (x) на шкале $\boldsymbol{B}$.

При этом, если делимое b выйдет за границу шкалы $\boldsymbol{B}$, понадобится переброска движка, означающая здесь просто

установку делителя a не против 1, а против 10 шкалы $\boldsymbol{B}$ (и в этом случае снова получаем не x, а $10x$). Вторая схема деления применяется главным образом в тех задачах, где делимое и делитель требуется установить *на одной и той же шкале*; задачи такого рода будут рассмотрены в главах 3 и 4.

Вычисление выражений вида

$$\boxed{x=b\,\frac{a_1a_2\ldots a_n}{c_1c_2\ldots c_n}.}$$

В простейшем случае $n=1$ задача вычисления $x=b\,\frac{a_1}{c_1}$ сводится к решению пропорции $\frac{c_1}{b}=\frac{a_1}{x}$ (п. 1.3).

В общем случае, обозначая

$$b\,\frac{a_1}{c_1}=x_1, \quad x_1\,\frac{a_2}{c_2}=x_2, \;\ldots,\; x_{n-1}\,\frac{a_n}{c_n}=x_n=x,$$

получаем ряд пропорций

$$\frac{c_1}{b}=\frac{a_1}{x_1}; \quad \frac{c_2}{x_1}=\frac{a_2}{x_2}, \;\ldots,\; \frac{c_n}{x_{n-1}}=\frac{a_n}{x_n},$$

которые решаем последовательно (рис. 11). При этом нет надобности читать промежуточные результаты $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$;

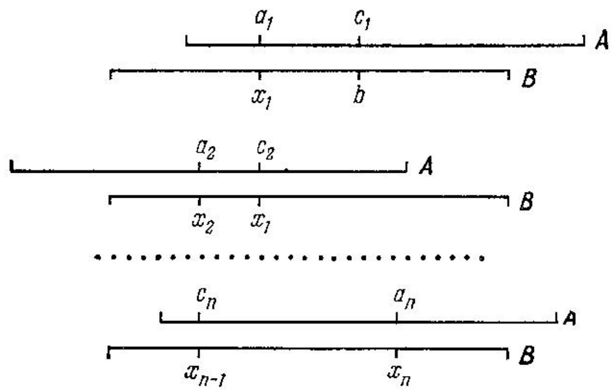

Рис. 11

достаточно отметить положение x_k визирной линией, подвести под нее c_{k+1} и затем перевести визирную линию на a_{k+1}, чтобы получить x_{k+1} ($k=1, 2, \ldots, n-1$).

В качестве упражнения рекомендуем проделать вычисления к примеру на стр. 15.

1.6. Расчет таблицы пропорциональной зависимости. Специальные значки

Если значения $y_1, y_2, y_3, \ldots$ величины y пропорциональны соответствующим значениям $x_1, x_2, x_3, \ldots$ величины x, т. е. связаны линейной зависимостью вида

$$y_k = a x_k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots), \tag{1.6}$$

то вычисление всех значений y_k по заданным значениям x_k (или наоборот) может быть выполнено с помощью одной установки движка (не считая возможной его переброски).

С этой целью мы записываем соотношения (1.6) в виде пропорций

$$\frac{a}{1} = \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \ldots, \tag{1.7}$$

которые решаются все сразу по схеме, изображенной на рис. 12: установив число a шкалы A против числа 1 шкалы B, мы получаем на шкалах A и B таблицу пропорциональной зависимости $y_k = a x_k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$.

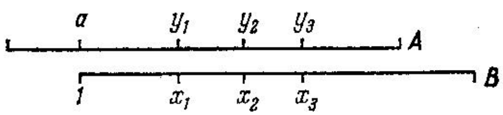

Рис. 12.

Достаточно теперь лишь передвигать визирную линию на числа $x_1, x_2, x_3, \ldots$ и прочитывать против них соответствующие им числа $y_1, y_2, y_3, \ldots$. Конечно, все числа $x_1, x_2, x_3, \ldots$, а также коэффициент пропорциональности a должны быть заранее нормализованы. Заметим еще, что если в формуле (1.6) значения аргумента x_k меняются монотонно и не очень быстро, то порядок соответствующих значений y_k достаточно определить один раз.

Описанный здесь метод применяется, в частности, при пересчете различных величин из одной системы измерений в другую и при вычислении процентов (отыскании одного и того же процента от заданного ряда значений некоторой величины или различных долей от одной и той же величины).

Примечание. Если коэффициент пропорциональности a не задан, а задана какая-либо пара соответствующих значений x_1 и y_1, то схема решения задачи остается той же, но начинать надо с установки друг против друга заданных значений x_1 и y_1.

Специальные значки. Для некоторых часто встречающихся пересчетов величин из одной системы мер в другую на счетных линейках нанесены готовые коэффициенты пропорциональности в виде специальных значков.

Для пересчета углов из радианной меры в градусную (в минуты или секунды) **и обратно** служат значки

$$\rho' = \frac{360 \cdot 60}{2\pi} = 3{,}438 \cdot 10^3 \qquad (\text{на шкале } A),$$

$$\rho'' = \frac{360 \cdot 60 \cdot 60}{2\pi} = 2{,}063 \cdot 10^5 \ (\text{на шкалах } A \text{ и } B),$$

дающие величину радиана соответственно в минутах и секундах; если α — радианная мера угла, α' и α'' — меры того же угла в минутах и секундах соответственно, то эти меры связаны соотношениями $\alpha' = \rho'\alpha$ и $\alpha'' = \rho''\alpha$.

Если установить значок ρ' против 1 шкалы B, то на шкале A прочтем углы в минутах, на шкале B — те же углы в радианах. Например, отметив на шкале A угол $\alpha' = 50'$, прочтем против него на шкале B тот же угол в радианах

$$\alpha = \frac{5'0}{3'438} = 1{,}454 \cdot 10^{-2} = 0{,}01454.$$

Здесь для определения порядка результата мы пишем угол α в виде отношения α'/ρ' и применяем плавающую запятую.

На некоторых счетных линейках имеются значки:

$$\rho^\circ = \frac{360^\circ}{2\pi} = 57^\circ{,}30; \quad \rho_{''} = \frac{400 \cdot 100 \cdot 100}{2\pi} = 6{,}366 \cdot 10^5,$$

дающие величину радиана в градусах и в сотых долях сантиграда (сантиград — сотая доля одной сотой части прямого угла). Применение этих значков ничем не отличается от применения ρ' и ρ''.

На всех линейках имеются значки

$$\pi = 3{,}142; \quad M = \frac{100}{\pi} = 31{,}83;$$

$$C = \sqrt{\frac{4}{\pi}} = 1{,}128, \qquad C_1 = \sqrt{10 \cdot \frac{4}{\pi}} = 3{,}568.$$

Применение значков π и M не нуждается в пояснении, применение значков C и C_1 описано далее на стр. 43.

Описание значков на линейках специального назначения (например, электротехнических) дается в соответствующих инструкциях или на оборотной стороне корпуса линейки.

1.7. Линейная интерполяция

При пользовании таблицами различных функций часто возникает задача отыскания значения функции для промежуточных значений аргумента (не приведенных в таблице). В простейших случаях эта задача может быть решена путем линейной интерполяции.

Линейная интерполяция опирается на предположение, что в промежутке между двумя соседними табличными значениями аргумента рассматриваемую функцию можно приближенно считать линейной, т. е. что в этом промежутке *изменение функции пропорционально изменению аргумента* (рис. 13).

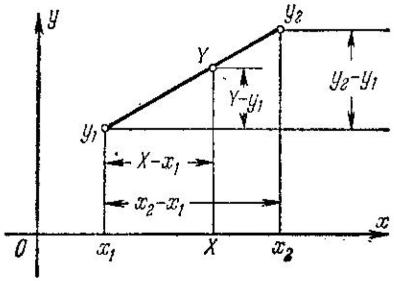

Рис. 13.

Введем следующие обозначения:
x_1 и x_2 — два соседних табличных значения аргумента,
y_1 и y_2 — соответствующие им значения функции,
X — промежуточное значение аргумента ($x_1 < X < x_2$),
Y — соответствующее значение функции.

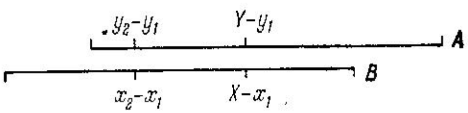

Рис. 14.

Тогда высказанное предположение выражается пропорцией

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{Y-y_1}{X-x_1}, \qquad (1.8)$$

которую удобно решать на счетной линейке по схеме, изображенной на рис. 14. Найдя на линейке приращение $Yy-_1$, мы без труда находим затем искомое значение Y.

Применение счетной линейки для линейной интерполяции особенно эффективно в тех случаях, когда требуется найти сразу несколько промежуточных значений функции. Для этого достаточна *одна установка движка*: перемещая визир на разные значения $X-x_1$, мы находим *все поправки* $Y-y_1$.

Пример. Пользуясь следующей таблицей логарифмов

x	$\lg x$	Разности
6,0	0,7782	
		0,0142
6,2	0,7924	
		0,0138
6,4	0,8062	

вычислить логарифмы чисел от 6,2 до 6,4 через 0,05

Решение. Здесь

$$x_1=6{,}2,\quad x_2=6{,}4,\quad \text{разность } x_2-x_1=0{,}2;$$
$$y_1=0{,}7924,\quad y_2=0{,}8062,\quad \text{разность } y_2-y_1=0{,}0138.$$

Для разностей

$$X-x_1=0{,}05;\quad 0{,}10;\quad 0{,}15$$

с помощью счетной линейки вычисляем поправки

$$Y-y_1=0{,}0035;\ 0{,}0069;\ 0{,}0104$$

Прибавляя их к начальному значению y_1, находим

$$\lg 6{,}25=0{,}7959;\ \lg 6{,}30=0{,}7993;\ \lg 6{,}35=0{,}8028.$$

Обратная линейная интерполяция заключается в отыскании значения аргумента X по заданному значению функции Y с помощью той же пропорции (1.8); для этой цели применима та же схема рис. 14, но теперь уже визир перемещают на значение $Y-y_1$ и находят поправку к аргументу $X-x_1$.

Пример. С помощью приведенной выше таблицы вычислить $X=10^{0,8}$, т. е. найти такое значение X, при котором $Y=\lg X=0{,}8$.

Решение. Здесь

$$Y=0{,}8;\quad y_1=0{,}7924;\quad y_2=0{,}8062;\quad y_2-y_1=0{,}0138;$$
$$x_1=6{,}2;\quad x_2=6{,}4;\quad x_2-x_1=0{,}2.$$

На счетной линейке для разности $Y-y_1=0{,}0076$ находим

$$X-x_1=\frac{x_2-x_1}{y_2-y_1}(Y-y_1)=0{,}110,$$

откуда $X=6{,}2+0{,}110=6{,}310$

ГЛАВА 2

СОПОСТАВЛЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ШКАЛ. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Кроме основных шкал ***A*** и ***B***, на счетной линейке находятся и другие функциональные шкалы, как на лицевой стороне (рис. 15), так и на оборотной (см. рис. 16, стр. 31).

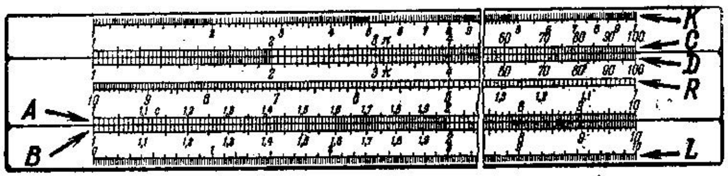

Рис. 15.

Путем сопоставления различных функциональных шкал счетной линейки можно находить значения различных функций. Если на одной из шкал нанесены значения величины u, а на другой — значения величины v, то соответствие между точками этих шкал определяет функциональную зависимость между u и v.

На счетной линейке соответствие точек осуществляется с помощью визирной линии бегунка, поэтому соответствующие точки на разных шкалах наносятся точно друг против друга.

В настоящей главе мы рассмотрим только те операции, которые могут быть выполнены путем непосредственного сопоставления шкал счетной линейки без их смещения.

2.1. Функциональные шкалы корпуса линейки

Для удобства описания шкал и выяснения смысла их установившихся названий мы условимся считать основную шкалу ***B*** шкалой аргумента.

Значения аргумента будем записывать в нормализованном виде

$$x = x_0 \cdot 10^n \qquad (1 \leqslant x_0 < 10, \ n \text{ — целое});$$

будем считать, что *на шкале аргумента устанавливается только основа* x_0, порядок n будем учитывать отдельно.

Против каждого числа x_0 шкалы ***B*** находятся значения следующих функций (см. рис. 15):

$$u = x_0^2 \text{ (шкала } \boldsymbol{C}),$$

$$v = x_0^3 \text{ (шкала } \boldsymbol{K}),$$

$$y = \lg x_0 \text{ (шкала } \boldsymbol{L}).$$

В соответствии с этим шкалы ***C***, ***K*** и ***L*** называются *шкалой квадратов, шкалой кубов и шкалой логарифмов* *).

Так как x_0 заключено между 1 и 10, то

u	»	»	1 и 100,
v	»	»	1 и 1000,
y	»	»	0 и 1.

Из названных шкал только шкала логарифмов является равномерной, остальные шкалы неравномерны. Поэтому прежде чем начать вычисления, надо внимательно ознакомиться с ценой деления каждой шкалы на разных участках. Например, на шкале ***C*** короткие штрихи, находящиеся между горизонтальными линиями, нанесены:

на участке	от 1 до 2	—	через	0,02;
»	»	» 2 до 5	— »	0,05;
»	»	» 5 до 10	— »	0,10;
»	»	» 10 до 20	— »	0,2;
»	»	» 20 до 50	— »	0,5;
»	»	» 50 до 100	— »	1,0.

*) Объяснение принципа устройства указанных шкал см. в Приложении 1 (стр. 57 и стр. 60).

2.2. Квадраты чисел и квадратные корни

Для отыскания квадратов и квадратных корней надо сопоставить шкалы **B** и **C**. Непосредственное сопоставление шкал **B** и **C** позволяет находить квадраты чисел от 1 до 10 и квадратные корни из чисел от 1 до 100, для остальных чисел требуется предварительная нормализация. Поэтому формулируемые ниже правила мы разбиваем на две части.

Схема отыскания квадратов чисел.

1. Установить визир против числа $x_0\ (1 \leqslant x_0 < 10)$ на шкале **B**. Визир укажет на шкале **C** квадрат этого числа

$$u = x_0^2 \quad (1 \leqslant u < 100).$$

Например, на рис. 2 (см. стр. 7) визирная линия, установленная против числа 7,07 на шкале **B**, позволяет найти квадрат этого числа $7{,}07^2 = 50{,}0$ на шкале **C**.

2. При возведении в квадрат любого числа x его надо сначала нормализовать, т. е. записать в виде

$$x = x_0 \cdot 10^n \qquad (1 \leqslant x_0 < 10,\ n \text{— целое}),$$

затем на шкале **C** найти значение $u = x_0^2$, после чего записать

$$x^2 = x_0^2 \cdot 10^{2n} = u \cdot 10^{2n}.$$

Запись множителя 10^n *в исходном числе* x *удобно заменить плавающей запятой* (см. п. 1.4).

Примеры:

$$0{,}0286^2 = 0{,}02'86^2 = 8{,}18 \cdot 10^{-4},$$
$$38{,}5^2 = 3'8{,}5^2 = 14{,}8 \cdot 10^2.$$

Примечание 1. Отыскание квадратов, так же как и отыскание квадратных корней, можно производить путем сопоставления шкал **A** и **D** движка, которые совершенно подобны соответственно шкалам **B** и **C** корпуса.

Примечание 2. На некоторых счетных линейках отрезки [1, 10] и [10, 100] шкал **C** и **D** отмечены одними и теми же числами от 1 до 10. Это сделано только для экономии места, читать числа удобнее в их правильном разряде.

Схема извлечения квадратных корней.

1. Для чисел u от 1 до 100. Установить визир против числа $u\ (1 \leqslant u < 100)$ на шкале **C**. Визир укажет на шкале **B** квадратный корень

$$x_0 = \sqrt{u} \qquad (1 \leqslant x_0 < 10).$$

2. Для извлечения квадратного корня из любого числа U его надо сначала представить в виде

$$U = u \cdot 10^{2n}, \tag{2.1}$$

где $1 \leqslant u < 100$, n — целое. Выделив множитель u, надо установить его на шкале **C** и против него на шкале **B** прочесть число $x_0 = \sqrt{u}$; тогда

$$\sqrt{U} = \sqrt{u} \cdot 10^n = x_0 \cdot 10^n.$$

Представление числа U в виде (2.1) упрощает не только отыскание корня, но и определение его порядка, ибо корень при этом получается нормализованным.

Вместо записи (2.1) удобно применять плавающую запятую, которая должна здесь отстоять от истинной запятой на число разрядов, кратное двум.

Примеры:

$$\sqrt{0{,}000818} = \sqrt{0{,}0008'18} = 2{,}86 \cdot 10^{-2}$$

(на первом отрезке шкалы **C**);

$$\sqrt{1480} = \sqrt{14'80} = 3{,}85 \cdot 10^1$$

(на втором отрезке шкалы **C**);

$$\sqrt{0{,}1480} = \sqrt{0{,}14'80} = 3{,}85 \cdot 10^{-1}$$

(на втором отрезке шкалы **C**).

2.3. Кубы чисел и кубические корни

Для отыскания кубов чисел и кубических корней надо сопоставить шкалы **B** и **K**. При этом следует обратить внимание на то, что на многих счетных линейках шкала кубов **K** разбита на три отрезка [1, 10], [10,100], [100, 1000], которые отмечены одними и теми же числами от 1 до 10.

Схема отыскания кубов чисел.

> 1. Установить визир против числа x_0 $(1 \leqslant x_0 < 10)$ на шкале $\boldsymbol{B}$. Визир укажет на шкале $\boldsymbol{K}$ куб этого числа
> $$v = x_0^3 \quad (1 \leqslant v < 1000).$$
> Целая часть числа v будет содержать один, два или три знака (цифры) в зависимости от того, находится ли число v на первом, втором или третьем отрезке шкалы $\boldsymbol{K}$.
> 2. При возведении в куб любого числа x получаем
> $$x^3 = x_0^3 \cdot 10^{3n} = v \cdot 10^{3n}.$$

Запись множителя 10^n *в исходном числе* x *удобно заменить плавающей запятой* (см. п. 1.4).

Примеры:

$$0{,}214^3 = 0{,}2'14^3 = 9{,}80 \cdot 10^{-3}; \quad 35{,}1^3 = 3'5{,}1^3 = 43{,}2 \cdot 10^3.$$

Схема извлечения кубических корней.

> 1. Для чисел v от 1 до 1000. Установить визир против числа v $(1 \leqslant v < 1000)$ на шкале $\boldsymbol{K}$. Визир укажет на шкале $\boldsymbol{B}$ кубический корень $x_0 = \sqrt[3]{v}$ $(1 \leqslant x_0 < 10)$.
> 2. Для извлечения кубического корня из любого числа V его надо сначала представить в виде
> $$V = v \cdot 10^{3n}, \qquad (2.2)$$
> где $1 \leqslant v < 1000$, n — целое. Выделив множитель v, надо установить его на шкале $\boldsymbol{K}$ и против него на шкале $\boldsymbol{B}$ прочесть число $x_0 = \sqrt[3]{v}$; тогда
> $$\sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{v} \cdot 10^n = x_0 \cdot 10^n.$$

Вместо записи (2.2) удобно применять плавающую запятую, которая должна здесь отстоять от истинной запятой на число разрядов, кратное трем.

Примеры:

$$\sqrt[3]{0{,}0098} = \sqrt[3]{0{,}009'8} = 2{,}14 \cdot 10^{-1}$$
(на первом отрезке шкалы $\boldsymbol{K}$);
$$\sqrt[3]{43200} = \sqrt[3]{43'200} = 3{,}51 \cdot 10^1$$
(на втором отрезке шкалы $\boldsymbol{K}$).

2.4. Логарифмы и степени 10

Для логарифмирования и потенцирования надо сопоставить шкалы $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{L}$.

Если число x нормализовано, то из формулы
$$\lg x = \lg (x_0 \cdot 10^n) = n + \lg x_0 \quad (n \text{ — целое, } 1 \leqslant x_0 < 10)$$
следует, что характеристикой десятичного логарифма числа x служит его порядок n. Отсюда получаем простое

Правило логарифмирования.

> Нормализовать число $x = x_0 \cdot 10^n$. Установить визир против числа x_0 $(1 \leqslant x_0 < 10)$ на шкале $\boldsymbol{B}$. Визир укажет на шкале $\boldsymbol{L}$ число $y = \lg x_0$ $(0 \leqslant y < 1)$. Тогда
> $$\lg x = n + y.$$

Таким образом, *шкала* $\boldsymbol{L}$ *дает мантиссы десятичных логарифмов любых чисел.* На этой шкале знаками 1, 2, ..., 10 отмечены десятые доли: читать следует 0,1; 0,2; ... ; 1,0 (см. рис. 15).

Так как цена деления шкалы $\boldsymbol{L}$ составляет 0,002, то на счетной линейке можно находить мантиссы только с тремя десятичными знаками, что соответствует трехзначным таблицам десятичных логарифмов.

Вместо записи множителя 10^n *в исходном числе удобно применять плавающую запятую* (см. п. 1.4).

Примеры:

$$\lg 2 = 0{,}301; \quad \lg 2'000 = 3 + 0{,}301 = 3{,}301;$$
$$\lg 0{,}2' = -1 + 0{,}301 = \bar{1}{,}301.$$

Правило потенцирования.

> Для отыскания числа x по его логарифму $\lg x$ надо отделить характеристику n:
> $$\lg x = n + y \quad (n \text{ — целое, } 0 \leqslant y < 1);$$
> затем на шкале $\boldsymbol{B}$ найти число, соответствующее мантиссе y:
> $$x_0 = 10^y;$$
> число x получается при этом в нормализованном виде
> $$x = 10^{n+y} = x_0 \cdot 10^n.$$

2.5. Шкалы лицевой стороны движка. Обратные величины

На лицевой стороне движка, кроме основной шкалы A, имеется шкала квадратов D, устройство и назначение которой те же, что и шкалы C корпуса, а также *шкала* R *обратных величин* (см. рис. 15). Против каждого числа x_0 $(1 \leqslant x_0 < 10)$ шкалы A на шкале R находится число

$$w = \frac{10}{x_0} \qquad (1 < w \leqslant 10).$$

Деления шкалы R в точности соответствуют делениям шкалы A, но нанесены они в обратном порядке, справа налево (см. рис. 15), так что число 1 шкалы R находится справа (против числа 10 шкалы A), а число 10 — слева (против числа 1 шкалы A). Это обстоятельство следует особо учитывать при отсчете десятых и сотых долей. Например, на рис. 2 (см. стр. 7) визирная линия показывает на шкале R число 1,414 (на рис. 2 шкала R не отмечена).

Схема отыскания обратных величин.

Представить число x в нормализованном виде $x = x_0 \cdot 10^n$. Установить визир против числа x_0 на шкале A. Визир укажет на шкале R число $w = \frac{10}{x_0}$. Тогда

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x_0} \cdot 10^{-n} = w \cdot 10^{-n-1}.$$

2.6. Тригонометрические шкалы. Значения тригонометрических функций и им обратных

На оборотной стороне движка расположены шкалы, отмеченные буквами S, T и $S\&T$ (на рис. 16 эти шкалы изображены при перевернутом движке). На некоторых линейках эти шкалы обозначены соответственно «Sin», «Tg», «Sin/Tg». Шкалы S, T и $S\&T$ будем называть *тригонометрическими*.

Против каждого числа x_0 шкалы A на тригонометрических шкалах находятся значения следующих функций:

$\alpha = \arcsin (x_0 \cdot 10^{-1})$ на шкале S,

$\beta = \operatorname{arctg} (x_0 \cdot 10^{-1})$ на шкале T,

$\gamma = \arcsin (x_0 \cdot 10^{-2}) \approx \operatorname{arctg} (x_0 \cdot 10^{-2})$ на шкале $S\&T$.

Другими словами, шкалы S и T дают значения обратных тригонометрических функций $\arcsin x$ и $\operatorname{arctg} x$ для значений x в интервале $0{,}1 \leqslant x < 1$. Шкала $S\&T$ дает совмещенные значения $\arcsin x$ и $\operatorname{arctg} x$ для значений x в интервале $0{,}01 \leqslant x < 0{,}1$; различие между значениями $\arcsin x$ и $\operatorname{arctg} x$ для таких x меньше погрешности счетной линейки.

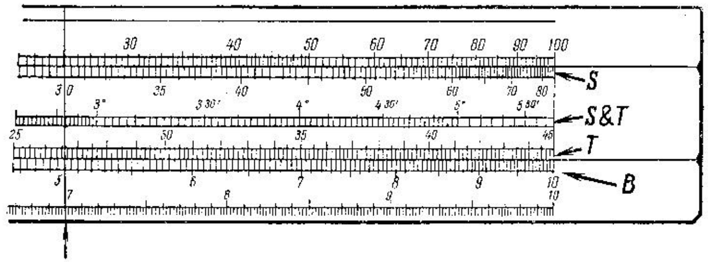

Рис. 16

Значения $\arcsin x$ и $\operatorname{arctg} x$ на всех трех шкалах нанесены в *градусной мере* (в градусах и минутах). Это следует иметь в виду при определении цены деления шкалы.

Шкала S содержит углы α от 5°44′ до 90° с резко меняющейся ценой деления:

на участке от 5°45′ до 10° — через 5′ (длинные штрихи через 10′)
» » » 10° » 20° — » 10′ (» » » 30′),
» » » 20° » 40° — » 20′ (» » » 1°),
» » » 40° » 60° — » 30′ (» » » 1°),
» » » 60° » 80° — » 1° (» » » 5°),
» » » 80° » 90° — всего три штриха — 82°, 84° и 86°

Шкала T содержит углы β от 5°44′ до 45° со следующей ценой деления:

на участке от 5°45′ до 20° через 5′ (длинные штрихи через 10′),
» » » 20° до 45° через 10′ (длинные штрихи через 30′).

Шкала $S\&T$ содержит углы γ от 0°34′ до 5°44′ со следующей ценой деления:

на участке от 0°35′ до 3° через 1′ (длинные штрихи через 5′),
» » » 3° до 5° » 2′ (» » » 10′),
» » » 5° до 5°40′ » 5′ (» » » 10′)

Для отыскания значений тригонометрических функций синус и тангенс, а также им обратных, надо сопоставить шкалу A

с подходящей тригонометрической шкалой. На обычных линейках, где тригонометрические шкалы и шкала A находятся по разные стороны движка, а визирная линия имеется только на лицевой стороне, вместо шкалы A применяют идентичную ей шкалу B в позиции, изображенной на рис. 16.

Первая схема отыскания угла по его синусу или тангенсу.

Вынуть движок и вставить его оборотной стороной, совместив начало тригонометрических шкал и начало шкалы B.

Нормализовать число $x = x_0 \cdot 10^n$ ($n \leqslant -1$, т. е. $0 < x < 1$) и установить визир против числа x_0 на шкале B. Визир укажет следующие углы в градусной мере:

на шкале S	угол	$\alpha = \arcsin x$,	если $n = -1$,
» T	»	$\beta = \operatorname{arctg} x$,	» $n = -1$,
» $S\&T$	»	$\gamma = \arcsin x = \operatorname{arctg} x$,	» $n = -2$,
или	»	$\gamma \cdot 10^{-n-2}$,	» $n \leqslant -3$.

Так например, на рис. 16 визирная линия указывает:

$\arcsin 0{,}5 = \arcsin 5 \cdot 10^{-1} = 30°$ (на шкале S),
$\arcsin 0{,}05 = \arcsin 5 \cdot 10^{-2} = 2°52'$ (» $S\&T$),
$\operatorname{arctg} 0{,}05 = \operatorname{arctg} 5 \cdot 10^{-2} = 2°52'$ (» $S\&T$),
$\operatorname{arctg} 0{,}5 = \operatorname{arctg} 5 \cdot 10^{-1} = 26°33'$ (» T),
($\arcsin 0{,}005 = \arcsin 5 \cdot 10^{-3} = 2°52' \cdot 10^{-1} = 17{,}2'$).

Первая схема отыскания синусов и тангенсов углов.

Вынуть движок и вставить его оборотной стороной, совместив начало тригонометрических шкал и начало шкалы B.

Для отыскания $\sin\alpha$ при $5°44' < \alpha < 90°$ установить визир против угла α на шкале S; визир укажет число x_0 на шкале B, тогда $x = \sin\alpha = x_0 \cdot 10^{-1}$.

Для отыскания $\operatorname{tg}\beta$ при $5°44' < \beta < 45°$ установить визир против угла β на шкале T; визир укажет число x_0 на шкале B, тогда $x = \operatorname{tg}\beta = x_0 \cdot 10^{-1}$.

Для отыскания $\sin\gamma$ или $\operatorname{tg}\gamma$ при $0° < \gamma < 5°44'$ умножить угол γ на такой множитель 10^m (m целое $\geqslant 0$), чтобы угол $\gamma \cdot 10^m$ оказался в пределах от $0°34'$ до $5°44' = 344'$, и установить визир против угла $\gamma \cdot 10^m$ на шкале $S\&T$; визир укажет число x_0 на шкале B, тогда

$$x = \sin\gamma = \operatorname{tg}\gamma = x_0 \cdot 10^{-m-2}.$$

Примечание 1. Для малых углов $\gamma < 5°44'$ следует считать (с точностью расчетов на линейке):

$$\sin\gamma = \operatorname{tg}\gamma = \gamma \text{ в радианах (!)}$$

и аналогично для $x < 0{,}1$:

$$\arcsin x = \operatorname{arctg} x = x \text{ (в радианах).}$$

Поэтому для указанных значений аргумента отыскание синуса или тангенса по углу (и обратно) сводится просто к **пересчету угла из градусной меры в радианную (и обратно)**. Сопоставление шкалы $S\&T$ со шкалой A (или B на рис. 16) как раз и осуществляет такой пересчет для углов γ от $0°34'$ до $5°44'$ (для x от 0,01 до 0,1). Применение той же шкалы $S\&T$ для меньших углов опирается на пропорциональность градусной и радианной мер угла (ср. п. 1.6).

Примечание 2. Отыскание тангенсов углов, заключенных между 45° и 90°, а также углов по их тангенсам, большим 1, описано далее на стр. 34. Отыскание синусов и тангенсов углов, больших 90°, производится по формулам приведения.

Примечание 3. На счетных линейках, имеющих двустороннюю визирную линию (как на лицевой так и на оборотной стороне линейки), указанные выше схемы не требуют перевертывания движка. В частности, на логарифмическом диске «Спутник» (см. стр. 12) визирные стрелки вращаются одновременно на лицевой и на оборотной сторонах диска, что позволяет сразу отыскивать синусы и тангенсы углов (и обратно).

Для непосредственного сопоставления шкалы A с тригонометрическими шкалами на оборотной стороне корпуса обычной линейки имеются специальные риски против концов шкалы B. Эти риски вместе с концами шкалы B служат в качестве *двусторонней визирной линии*.

Вторая схема отыскания угла по его синусу или тангенсу.

Нормализовать число $x = x_0 \cdot 10^n$ ($n \leqslant -1$) и установить движок так, чтобы против какого-либо конца шкалы B оказалось число x_0 на шкале A. Риски на оборотной стороне линейки укажут на тригонометрических шкалах углы так же, как и по первой схеме стр. 32.

Вторая схема отыскания синусов и тангенсов углов.

Выдвинуть движок так, чтобы под риской на нужной тригонометрической шкале оказался заданный угол. Конец шкалы B укажет на шкале A число x_0, тогда

$x = \sin\alpha = x_0 \cdot 10^{-1}$, если угол α — на шкале S ($5°44' < \alpha < 90°$),
$x = \operatorname{tg}\beta = x_0 \cdot 10^{-1}$, » » β — » » T ($5°44' < \beta < 45°$),
$x = \sin\gamma = \operatorname{tg}\gamma = x_0 \cdot 10^{-m-2}$, если угол $\gamma \cdot 10^m$ — на шкале $S\&T$ ($\gamma < 5°44'$, m целое $\geqslant 0$).

2.7. Дополнительные функциональные преобразования на неподвижных шкалах

Выше были рассмотрены те функциональные преобразования, которые получаются при сопоставлении основных шкал $\boldsymbol{A}$ или $\boldsymbol{B}$ с другими функциональными шкалами. Сопоставляя же между собой эти другие функциональные шкалы, мы получаем возможность находить значения ряда сложных функций. Например, если визир установлен против некоторого числа x на шкале $\boldsymbol{B}$, то он указывает на шкале $\boldsymbol{C}$ число $u=x^2$ и на шкале $\boldsymbol{K}$ число $v=x^3$; следовательно, между соответственными числами шкал $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{K}$ устанавливается зависимость

$$v=x^3=(\sqrt{u})^3 \text{ или } u=x^2=(\sqrt[3]{v})^2 .$$

В таблице на стр. 35 дается перечень функциональных преобразований такого рода, которые могут быть осуществлены на нормальной счетной линейке (в случае совместного использования шкал движка и корпуса предполагается, что концы этих шкал совмещены) *).

Последняя строка этой таблицы указывает способ отыскания тангенсов углов от 45° до 89°26′ с помощью формулы

$$\operatorname{tg}\delta=\operatorname{ctg}(90°-\delta)=\frac{1}{\operatorname{tg}(90°-\delta)} .$$

Установив угол $\beta=90°-\delta$ с помощью риски на шкале $\boldsymbol{T}$ (или $\boldsymbol{S\&T}$), мы найдем на шкале $\boldsymbol{R}$ против конца шкалы $\boldsymbol{B}$ значение

$$w=\frac{1}{\operatorname{tg}\beta}=\operatorname{tg}\delta.$$

При этом если $5°44' \leqslant \beta < 45°$ (β на шкале $\boldsymbol{T}$), то $w=w_0\cdot 10^0$, а если $0°34' \leqslant \beta < 5°44'$ (β на шкале $\boldsymbol{S\&T}$), то $w=w_0\cdot 10^1$.

Обратно, если $w=w_0\cdot 10^n>1$ (но <100), то для отыскания $\operatorname{arctg} w$ надо установить w_0 на шкале $\boldsymbol{R}$ против конца шкалы $\boldsymbol{B}$, затем прочесть угол $\beta=\operatorname{arctg}\frac{1}{w}$ на шкале $\boldsymbol{T}$ (при $n=0$) или на шкале $\boldsymbol{S\&T}$ (при $n=1$), после чего вычислить $\operatorname{arctg} w=90°-\beta$.

*) Здесь опущено только сопоставление шкалы $\boldsymbol{L}$ со шкалами степеней, так как оно не представляет интереса (в силу формулы $\lg(x^n)=n\lg x$). Не приведены здесь также дополнительные шкалы специальных линеек — они исследуются аналогично.

Таблица функциональных преобразований на линейке

Сопоставляемые шкалы (в скобках — обозначение величины)		Прямая функция	Обратная функция
$\boldsymbol{C}(u)$	$\boldsymbol{K}(v)$	$v=x^3=u^{3/2}$	$u=v^{2/3}$
$\boldsymbol{R}(w)$	$\boldsymbol{K}(v)$	$v=x^3=\frac{10^3}{w^3}$	$w=\frac{10}{\sqrt[3]{v}}$
$\boldsymbol{R}(w)$	$\boldsymbol{D}(u)$	$u=x^2=\frac{10^2}{w^2}$	$w=\frac{10}{\sqrt{u}}$
При перевернутом движке*)			
$\boldsymbol{S}(\alpha)$	$\boldsymbol{K}(v)$	$v=x^3=\sin^3\alpha\cdot 10^3$	$\alpha=\arcsin(\sqrt[3]{v}\cdot 0,1)$
$\boldsymbol{T}(\beta)$	$\boldsymbol{K}(v)$	$v=x^3=\operatorname{tg}^3\beta\cdot 10^3$	$\beta=\operatorname{arctg}(\sqrt[3]{v}\cdot 0,1)$
$\boldsymbol{S}(\alpha)$	$\boldsymbol{C}(u)$	$u=x^2=\sin^2\alpha\cdot 10^2$	$\alpha=\arcsin(\sqrt{u}\cdot 0,1)$
$\boldsymbol{T}(\beta)$	$\boldsymbol{C}(u)$	$u=x^2=\operatorname{tg}^2\beta\cdot 10^2$	$\beta=\operatorname{arctg}(\sqrt{u}\cdot 0,1)$
$\boldsymbol{S}(\alpha)$	$\boldsymbol{L}(y)$	$y=\lg x=\lg\sin\alpha+1$	$\alpha=\arcsin(10^{y-1})$
$\boldsymbol{T}(\beta)$	$\boldsymbol{L}(y)$	$y=\lg x=\lg\operatorname{tg}\beta+1$	$\beta=\operatorname{arctg}(10^{y-1})$
$\boldsymbol{T}(\beta)$	$\boldsymbol{S}(\alpha)$	$\alpha=\arcsin(\operatorname{tg}\beta)$	$\beta=\operatorname{arctg}(\sin\alpha)$
При помощи рисок на оборотной стороне корпуса			
$\boldsymbol{S}(\alpha)$	$\boldsymbol{R}(w)$	$w=\frac{10}{x}=\frac{1}{\sin\alpha}$	$\alpha=\arcsin\frac{1}{\omega}$
$\boldsymbol{T}(\beta)$	$\boldsymbol{R}(w)$	$w=\frac{1}{\operatorname{tg}\beta}=\operatorname{ctg}\beta$	$\beta=\operatorname{arcctg} w$

Применение шкалы $\boldsymbol{S\&T}$ вместо шкалы $\boldsymbol{S}$ или $\boldsymbol{T}$ приводит к тем же результатам, но с другим порядком величин.

*) На счетных линейках, имеющих двустороннюю визирную линию, приведенные в таблице функциональные преобразования выполняются без перевертывания движка. В частности, это верно для логарифмического диска «Спутник» (см. стр. 12)

ГЛАВА 3

РЕШЕНИЕ ПРОПОРЦИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Как следует из предыдущих глав, *счетная линейка позволяет решить только такую задачу, которую можно свести к решению пропорций и применению функциональных преобразований или к последовательности таких операций.* Благодаря расположению функциональных шкал параллельно основным шкалам счетной линейки на ней можно *комбинировать* решение пропорций с функциональными преобразованиями, что приводит к резкому возрастанию возможностей решения задач даже с помощью одной установки движка.

3.1. Предварительные замечания

Рассмотрим сначала один частный вопрос. Каким соотношением связаны четыре числа u, b_1, a_2, b_2, если они установлены так, как показано на рис. 17, т. е. если против чисел b_1 и b_2 шкалы $\boldsymbol{B}$ находятся соответственно число u шкалы $\boldsymbol{D}$ и число a_2 шкалы $\boldsymbol{A}$? Для решения этого вопроса обозначим через a_1 число, находящееся на шкале $\boldsymbol{A}$ против числа u шкалы $\boldsymbol{D}$ (рис. 17).

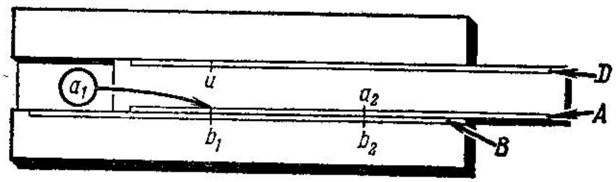

Рис. 17

Учитывая, что при этом будет $a_1=\sqrt{u}$ (см. стр. 27) и что на шкалах $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ образуется пропорция (1.1) (см. стр. 8), получаем интересующее нас соотношение

$$\frac{\sqrt{u}}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}. \qquad (3.1)$$

В отличие от случая пропорции (1.1) решения пропорции (3.1) относительно различных ее членов приводят к трем различным по структуре выражениям:

$$b_1=\frac{b_2}{a_2}\sqrt{u}, \quad b_2=\frac{b_1a_2}{\sqrt{u}}, \quad u=\left(\frac{a_2b_1}{b_2}\right)^2. \qquad (3.2)$$

Вычисление любого из этих выражений выполняется с помощью тех же операций, которые были описаны в п. 1.3, с заменой числа a_1 шкалы $\boldsymbol{A}$ на соответствующее ему число u шкалы $\boldsymbol{D}$; но теперь уже существенное значение имеет порядок операций. Например, чтобы вычислить выражение для b_1 по заданным a_2, b_2, u, надо против числа b_2 шкалы $\boldsymbol{B}$ установить число a_2 шкалы $\boldsymbol{A}$ и затем перевести визир на число u по шкале $\boldsymbol{D}$; тогда визир укажет число b_1 на шкале $\boldsymbol{B}$. *Такой порядок решения задачи особенно эффективен в тех случаях, когда ее надо решать для ряда различных значений* u.

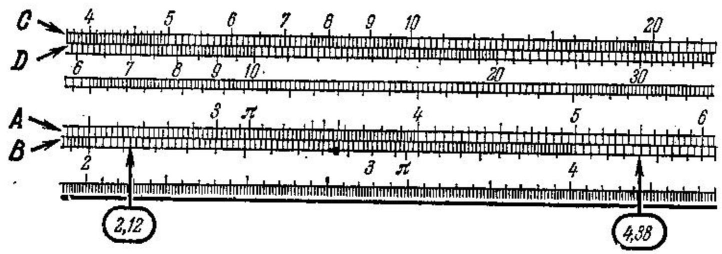

Рис. 18

Пример. Вычислить значения функции $z=\frac{4}{5}\sqrt{u}$ для значений аргумента $u=7$, 8, 9, 10, 20, 30.

Решение. Установим движок так, чтобы против числа $b_2=4$ шкалы $\boldsymbol{B}$ находилось число $a_2=5$ шкалы $\boldsymbol{A}$ (рис. 18). Перемещая только визирную линию последовательно на числа 7, 8, 9, 10, 20, 30 по шкале $\boldsymbol{D}$, мы прочтем против них на шкале $\boldsymbol{B}$ искомые значения функции $z=2,12$; 2,26; 2,40; 2,53; 3,58; 4,38.

3.2. Общий вид задач, для решения которых достаточно одной установки движка

Как и в главе 2, мы будем шкалу B считать шкалой аргумента x для всех шкал корпуса линейки, шкалу A — шкалой аргумента X для всех шкал движка. Одинаковым индексом будем отмечать точки, находящиеся друг против друга при фиксированной установке движка.

Выберем какие-либо две шкалы, которые по отношению к шкале B дают функции

$$y = f(x), \qquad z = f^*(x);$$

аналогично выберем две шкалы для функций

$$Y = F(X), \qquad Z = F^*(X)$$

на движке. Обратные функции обозначим соответственно g, g^*, G, G^*.

Рассмотрим установку движка на схеме рис. 19, где на выбранных шкалах установлены друг против друга числа Y_1

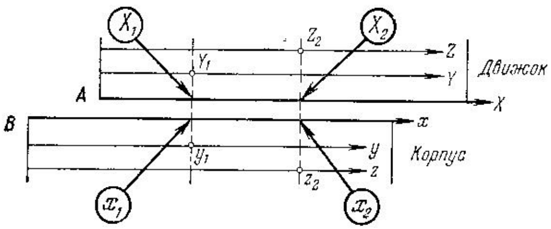

Рис. 19

и y_1, Z_2 и z_2. *(В кружках здесь и в дальнейшем указываются значения аргументов X и x на шкалах **A** и **B**, соответствующие установленным числам.)* На шкалах **A** и **B** имеем пропорцию

$$\frac{X_1}{x_1} = \frac{X_2}{x_2}. \tag{3.3}$$

Учитывая, что

$$X_1 = G(Y_1), \qquad X_2 = G^*(Z_2),$$
$$x_1 = g(y_1), \qquad x_2 = g^*(z_2),$$

перепишем пропорцию (3.3) в виде

$$\frac{G(Y_1)}{g(y_1)} = \frac{G^*(Z_2)}{g^*(z_2)}. \tag{3.4}$$

Пропорция (3.4) *определяет общий вид задач, для решения которых достаточна одна установка движка* (мы здесь не учитываем возможной переброски движка).

Если заданы три значения, например, Y_1, y_1 и Z_2, то установив их, как показано на рис. 19, мы найдем искомое четвертое значение

$$z_2 = f^*\left[\frac{G^*(Z_2)g(y_1)}{G(Y_1)}\right].$$

Сохраняя установку движка и перемещая бегунок с визирной линией, мы получаем возможность решать ряд пропорций типа (3.4). Например, если Y_1 и y_1 остаются неизменными, а Z_2 принимает ряд значений, то мы находим все соответствующие значения z_2 при одной и той же установке движка.

Подчеркнем, что в пропорцию (3.4) входят только значения функций, обратных к тем, которые представлены на шкалах линейки; например, можно составлять пропорции с корнями кубическими, но не с кубами, с синусами и тангенсами, но не с обратными тригонометрическими функциями.

Примечание. Так как на счетной линейке имеются две шкалы квадратов — на корпусе (**C**) и на движке (**D**), то можно составлять пропорции и с квадратами чисел. Действительно, каждой пропорции (1.1) на шкалах **A** и **B** соответствует пропорция $\frac{b_1^2}{a_1^2} = \frac{b_2^2}{a_2^2}$ на шкалах **C** и **D**. Отсюда следует, что при любой фиксированной установке движка все числа шкалы **D** пропорциональны расположенным против них числам шкалы **C**. Например, на рис. 18, на шкалах **C** и **D** можно прочесть пропорции

$$\frac{4}{6,25} = \frac{5}{7,81} = \frac{6}{9,38} = \frac{7}{10,9} = \frac{8}{12,5} = \frac{9}{14,1} = \frac{10}{15,6} = \frac{20}{31,2}.$$

Таким образом, пропорции можно решать не только на основных шкалах, но и на шкалах **C** и **D**. Однако точность установки и чтения чисел на шкалах **C** и **D** значительно меньше, чем на шкалах **A** и **B** (относительная погрешность установки чисел на шкалах **C** и **D** вдвое больше, чем на шкалах **A** и **B**). С другой стороны, как легко сообразить, на шкалах **C** и **D** можно решать пропорции без переброски движка. Поэтому шкалами **C** и **D** пользуются для решения пропорций только в тех расчетах, в которых основным требованием является не точность, а быстрота.

3.3. Выбор наилучшей схемы расчета

Если надо решить одну отдельно взятую задачу, то порядок выполнения элементарных операций для ее решения не имеет особого значения. Но если надо решить серию однотипных задач (отличающихся лишь числовыми значениями исходных данных), то целесообразно заранее выбрать такую схему расчета, при которой движок надо будет передвигать наименьшее количество раз. Так как на точную установку движка затрачивается больше времени, чем на точную установку визирной линии, и так как каждое перемещение движка вызывает дополнительную погрешность результата, то схема расчета с наименьшим количеством перемещений движка будет давать и наибольшую экономию времени и наилучшую точность результата (исключение следует сделать только для круговой линейки, рассматриваемой далее в Приложении 3).

Выбор наилучшей схемы расчета мы проиллюстрируем на примерах решения некоторых типовых задач. При этом будем опираться на следующие два основных положения из предыдущих глав.

1. Любые две пары чисел, находящиеся друг против друга на основных шкалах **A** (движка) и **B** (корпуса), при фиксированной установке движка образуют пропорцию.

2. Любая пара чисел, находящихся друг против друга на различных шкалах корпуса (или на различных шкалах движка), связана функциональной зависимостью.

З а д а ч а 1. Р а с ч е т т а б л и ц ы о б р а т н о й п р о п о р ц и о н а л ь н о й з а в и с и м о с т и:

$$\boxed{y_k=\frac{b}{x_k}} \qquad (k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \qquad (3.5)$$

Выше в п. 1.6 было показано, что расчет таблицы прямой пропорциональной зависимости может быть произведен на шкалах **A** и **B** при помощи о д н о й установки движка (см. рис. 12).

Сложнее обстоит дело с расчетом таблицы обратной пропорциональной зависимости, т. е. с д е л е н и е м одного и того же числа b на ряд заданных чисел $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots$ Каждое деление на шкалах **A** и **B** требует отдельной установки движка независимо от выбора схемы деления, так как в пропорциях $\frac{y_k}{1}=\frac{b}{x_k}$ и $\frac{y_k}{b}=\frac{1}{x_k}$ значения y_k не стоят против значений x_k и, значит, переход от одного значения аргумента x_k к другому не может быть выполнен только за счет передвижения визирной линии.

Для того чтобы произвести расчет таблицы обратной пропорциональной зависимости с помощью о д н о й установки движка, надо преобразовать формулу (3.5) в такую пропорцию, в которой значения y_k находятся против соответствующих значений x_k, так что перемещение визирной линии на счетной линейке будет все время выделять пары соответственных значений x_k, y_k:

$$\frac{y_k}{\frac{1}{x_k}}=\frac{b}{1}. \qquad (3.6)$$

Из этой пропорции видно, что для решения поставленной задачи, кроме основных шкал, понадобится еще шкала **R** обратных величин. Эта шкала имеется только на движке, причем если мы установим на шкале **R** число x_k, то на шкале **A** будет находиться число $\frac{10}{x_k}$ (см. п. 2.5). Домножив знаменатели в (3.6) на 10, мы еще «перевернем» эту пропорцию в соответствии с нашим соглашением на стр. 9 о том, чтобы числители пропорции устанавливались на

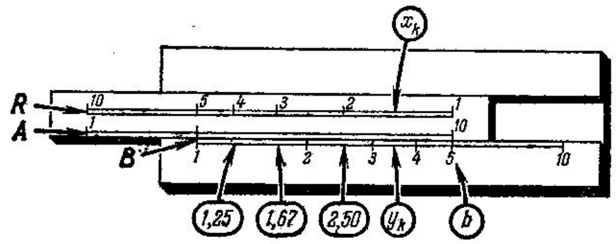

Рис. 20.

шкале **A** движка, а знаменатели — на шкале **B** корпуса. Запишем полученную пропорцию в развернутом виде

$$\frac{10}{b}=\frac{\frac{10}{x_1}}{y_1}=\frac{\frac{10}{x_2}}{y_2}=\frac{\frac{10}{x_3}}{y_3}=\ldots$$

Окончательно схема установки выглядит так (рис. 20): против числа b шкалы **B** устанавливаем конец 10 шкалы **A**; тогда против каждого числа x_k, отмечаемого визирной линией на шкале **R**, читаем соответствующее частное y_k на шкале **B** (на рис. 20 принято $b=5$; для значений $x=1,\ 2,\ 3,\ 4$ находим значения $y=5{,}00;\ 2{,}50;\ 1{,}67;\ 1{,}25$).

Задача 2. С помощью одной установки движка вычислить выражение

$$\boxed{v = a\frac{b^3}{c^3}\,.} \qquad (3.7)$$

Преобразуем заданную формулу к виду

$$\sqrt[3]{v} = \sqrt[3]{a}\ \frac{b}{c}\,.$$

Составим пропорцию так, чтобы оба кубических корня можно было установить на шкале $\boldsymbol{B}$ (которая служит шкалой корней кубических для шкалы $\boldsymbol{K}$):

$$\frac{c}{\sqrt[3]{a}} = \frac{b}{\sqrt[3]{v}}\,. \qquad (3.8)$$

Схема установки дана на рис. 21: против числа a шкалы $\boldsymbol{K}$ устанавливаем число c шкалы $\boldsymbol{A}$, против числа b шкалы $\boldsymbol{A}$ читаем результат v на шкале $\boldsymbol{K}$.

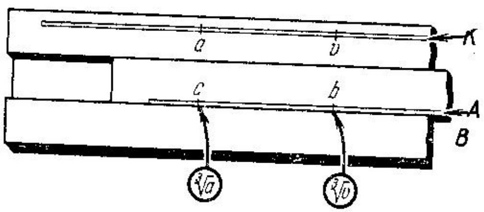

Рис 21.

Примечание. Рассмотренная задача может быть полезна при составлении таблицы функции (3.7), если требуется составить ее для сравнительно небольшого количества значений a, c и большого количества значений b (так как переход к различным значениям b осуществляется только перемещением визирной линии, в то время как переход к различным значениям c связан с перемещениями движка). Если же количество заданных значений c велико по сравнению с количеством значений b, то может оказаться более целесообразным решать задачу приведением к пропорции

$$\frac{\frac{10}{b}}{\sqrt[3]{a}} = \frac{\frac{10}{c}}{\sqrt[3]{v}} \qquad (3.9)$$

с использованием шкалы обратных величин. При этом установка будет такова: против числа a шкалы $\boldsymbol{K}$ устанавливаем число b шкалы $\boldsymbol{R}$, против числа c шкалы $\boldsymbol{R}$ читаем результат v на шкале $\boldsymbol{K}$.

Задача 3. Расчет таблицы зависимости между площадью круга и его диаметром:

$$\boxed{S = \frac{\pi d^2}{4}\,.}$$

Преобразуем эту формулу к такой пропорции, чтобы числа S и d можно было устанавливать друг против друга:

$$\frac{d}{\sqrt{S}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} = \frac{C}{1}\,, \qquad (3.10)$$

где $C = 1{,}128$ — специальный значок, имеющийся на шкалах $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ (см. стр. 21).

Схема расчета.

Установить значок C шкалы $\boldsymbol{A}$ против 1 шкалы $\boldsymbol{B}$. При любом положении бегунка визир укажет соответственные значения диаметра d на шкале $\boldsymbol{A}$ и площади S на шкале $\boldsymbol{C}$ (рис. 22).

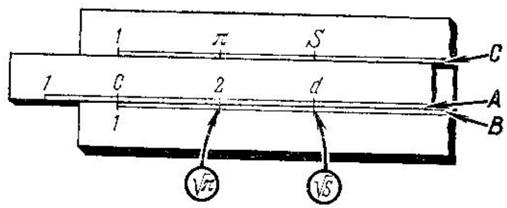

Рис. 22.

Примечание. Для одноразового отыскания площади круга S по диаметру d (и обратно) можно записать пропорцию (3.10) в виде

$$\frac{C}{d} = \frac{1}{\sqrt{S}}\ \left(\text{или } \frac{C_1}{d} = \frac{\sqrt{10}\,C}{d} = \frac{1}{\sqrt{0{,}1S}}\right), \qquad (3.11)$$

что приводит к другой схеме применения значка C (или значка C_1): установить значок C (или C_1) шкалы $\boldsymbol{A}$ против диаметра d на шкале $\boldsymbol{B}$ и прочесть площадь S (или $10S$) на шкале $\boldsymbol{C}$ против концевой единицы движка (против 1 шкалы $\boldsymbol{A}$).

Аналогично можно применять значок C шкалы $\boldsymbol{B}$. На некоторых линейках вместо специального значка C можно пользоваться вспомогательными визирными линиями на бегунке: расстояние между визирными линиями в точности равно расстоянию от 1 до C, что позволяет применять схему (3.11).

3.4. Схемы решения некоторых задач

В нижеследующих задачах требуется *указать схему вычисления* данного выражения с помощью *одной установки движка*.

З а д а ч а 1.

$$\boxed{u = a^4.}$$

Преобразуем формулу к виду $\sqrt{u} = a^2 = a \cdot a$ и составим пропорцию

$$\frac{1}{a} = \frac{a}{\sqrt{u}}.$$

Против числа a шкалы $\boldsymbol{B}$ устанавливаем число 1 шкалы $\boldsymbol{A}$, против числа a шкалы $\boldsymbol{A}$ читаем результат u на шкале $\boldsymbol{C}$ (см. рис. 23 при $b = 1$).

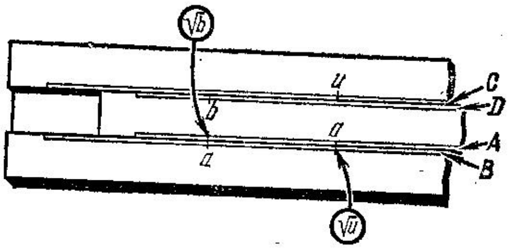

Рис. 23

З а д а ч а 2.

$$\boxed{u = \frac{a^4}{b}.}$$

Преобразуем формулу к виду $\sqrt{u} = \dfrac{a^2}{\sqrt{b}} = \dfrac{a \cdot a}{\sqrt{b}}$ и составим пропорцию

$$\frac{\sqrt{b}}{a} = \frac{a}{\sqrt{u}}.$$

Здесь надо использовать обе шкалы квадратов — и корпуса линейки и движка (рис. 23): против числа a шкалы $\boldsymbol{B}$ устанавливаем число b шкалы $\boldsymbol{D}$, против числа a шкалы $\boldsymbol{A}$ читаем результат u на шкале $\boldsymbol{C}$.

З а д а ч а 3. Вычислить произведение трех сомножителей

$$\boxed{x = abc.} \tag{3.12}$$

Обычный путь последовательного умножения потребовал бы д в у х перемещений движка. Можно, однако, ограничиться о д н и м его перемещением, переписав (3.12) в виде пропорции

$$\frac{\frac{10}{c}}{b} = \frac{a}{x \cdot 10^{-1}}, \tag{3.13}$$

для решения которой, кроме основных шкал $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, нужна еще шкала $\boldsymbol{R}$ обратных величин.

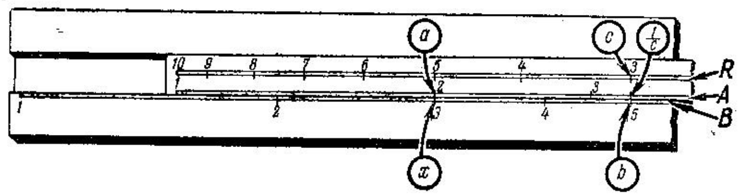

Рис. 24.

Схема установки движка дана на рис. 24: против числа b шкалы $\boldsymbol{B}$ устанавливаем число c шкалы $\boldsymbol{R}$, против числа a шкалы $\boldsymbol{A}$ читаем результат $x \cdot 10^{-1}$ на шкале $\boldsymbol{B}$ (на рис. 24: $a = 2$, $b = 5$, $c = 3$; линейка дает $x \cdot 10^{-1} = 3$, откуда $x = 30$).

Аналогично решается задача вычисления выражения

$$\boxed{x = \frac{a}{bc},}$$

которая приводится к пропорции

$$\frac{\frac{10}{c}}{10x} = \frac{b}{a} \tag{3.14}$$

того же вида, что и (3.13).

Примечание. Рассмотренные задачи, так же как и задача 1 на стр. 40, указывают интересные *возможности применения шкалы* ***R*** *обратных величин для умножения и деления*: произведение $x=bc$ и частное $x=\frac{a}{c}$ можно привести соответственно к пропорциям (3.13) при $a=1$ и (3.14) при $b=1$, которые решаются на шкалах ***B*** и ***R***.

Задача 4. Рассмотрим схемы вычисления величин, связанных зависимостью

$$\boxed{y = x \operatorname{tg} \varphi} \tag{3.15}$$

или зависимостью

$$y = x \sin \varphi. \tag{3.16}$$

Так как решение задачи (3.16) отличается от решения задачи (3.15) только применением шкалы ***S*** вместо шкалы ***T***, то мы ограничимся зависимостью (3.15).

а) Если значение угла φ фиксировано и надо вычислить несколько значений y при различных значениях x (или несколько значений x при различных значениях y), то удобно преобразовать формулу (3.15) к пропорции

$$\frac{y}{x} = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{1}$$

и решать задачу, пользуясь рисками при неперевернутом движке. Установив движок в такое положение, чтобы угол φ шкалы ***T*** оказался против риски на оборотной стороне корпуса, мы можем сопоставлять соответственные значения x шкалы ***B*** и y шкалы ***A*** с помощью одной лишь визирной линии.

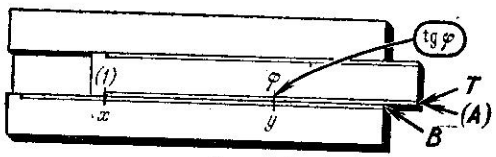

Рис 25.

б) Если значение x фиксировано и надо вычислить несколько значений y при различных значениях угла φ (или несколько значений угла φ при различных значениях y), то удобно преобразовать формулу (3.15) к пропорции

$$\frac{1}{x} = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{y}$$

и решать задачу при перевернутом движке по схеме, изображенной на рис. 25. Установив один из концов тригонометрической шкалы против значения x шкалы ***B***, мы можем сопоставлять соответственные значения угла φ шкалы ***T*** и y шкалы ***B*** с помощью одной лишь визирной линии.

Примечание. Здесь речь идет только о *принципиальной схеме расчета* и потому вопрос о порядке величин не затрагивается; при расчете может оказаться, что вместо шкалы ***T*** надо будет пользоваться шкалой ***S&T*** (см. об этом также п. 4.2).

Задача 5.

$$\boxed{u = a\,\frac{\operatorname{tg}^2 \beta}{\sin^2 \alpha}}.$$

Составим пропорцию

$$\frac{\sin \alpha}{\sqrt{a}} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sqrt{u}}. \tag{3.17}$$

Решение задачи при перевернутом движке (рис. 26): против числа a шкалы ***C*** устанавливаем угол α шкалы ***S***, против

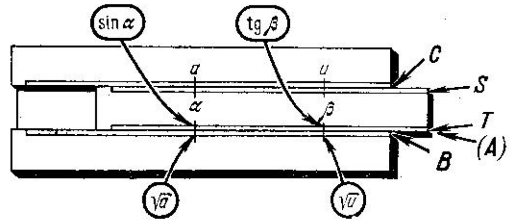

Рис. 26.

угла β шкалы ***T*** читаем результат u на шкале ***C*** (предполагается, что углы α, β находятся в нужных пределах).

Упражнение. Выбрать схемы решения следующих задач с помощью одной установки движка:

$$x = a\sqrt[3]{\frac{b}{c}}; \quad x = a\sqrt{\frac{b}{c}}; \quad x = a^{5/6}\ (= a^{1/2}\, a^{1/3}); \quad x = \frac{\sqrt[3]{a}}{b\sqrt{c}}; \quad x = a^6;$$

$$x = \left(\frac{ab}{c}\right)^3; \quad x = a\,\frac{b^3}{c^2}; \quad x = a\,\frac{\sin \alpha}{\sin \beta};$$

$$x = a^{2/3}\,\frac{\sin^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \beta}; \quad x = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sin \alpha}\right)^3.$$

Здесь x — неизвестное, остальные величины даны.

Расчетное задание. Составить таблицу функции $y = 0{,}604\,\frac{\operatorname{tg}^2(25^\circ - \beta)}{\sin^2(25^\circ + \beta)}$, где $\beta = \operatorname{arctg} x$, для $x = 0{,}05;\ 0{,}07;\ \ldots;\ 0{,}25$.

3.5. Возведение в любую положительную степень

Выделим часто встречающуюся задачу возведения положительного числа a в любую положительную степень b:

$$\boxed{t = a^b.} \qquad (3.18)$$

На обычной счетной линейке эту задачу нельзя решить с помощью одной установки движка. Логарифмируя выражение (3.18), мы можем лишь свести нашу задачу к умножению и логарифмическим преобразованиям:

$$\lg t = b \lg a.$$

Схема решения.

> С помощью шкалы L логарифмов отыскать $\lg a$ (см. п. 2.4), затем умножить его на b и по полученному $\lg t$ найти само число t по схеме потенцирования (п. 2.4).

На многих специальных линейках (в частности, на электротехнических) имеются дополнительные **шкалы E показательной функции**

$$t = e^x \quad (e = 2{,}718),$$

с помощью которых задачу (3.18) можно решить при одной установке движка; более того, *с помощью этих шкал можно при одной установке движка возводить одно и то же число a в различные степени b только перемещением визирной линии.*

Шка́лы E показательной функции $t = e^x$ располагаются обычно на корпусе линейки в несколько рядов для учета различных порядков величины $x = x_0 \cdot 10^n$. Обычно наносятся три шкалы для $n = 0, -1, -2$ (т. е. для $1 \leqslant x < 10$; $0{,}1 \leqslant x < 1$; $0{,}01 \leqslant x < 0{,}1$). Таким образом, шкалы показательной функции позволяют находить значения $t = e^x$ для $0{,}01 \leqslant x < 10$ и значения натурального логарифма $x = \ln t$ для $1{,}01 < t < 22\,000$ (конечно, цена деления здесь меняется довольно резко).

Так как при установке числа t на шкале E мы получаем на основной шкале B значение $x = \ln t$, то для решения рассматриваемой задачи надо взять *натуральные логарифмы* от обеих частей равенства (3.18):

$$\ln t = b \ln a$$

и составить пропорцию

$$\frac{1}{\ln a} = \frac{b}{\ln t}.$$

Схема установки дана на рис. 27: против числа a шкалы E устанавливаем 1 шкалы A, против числа b шкалы A читаем результат t на одной из шкал E.

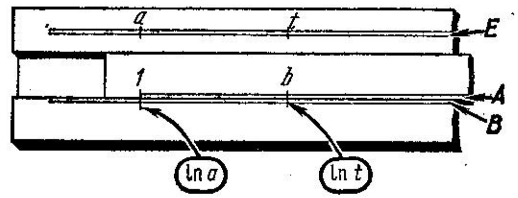

Рис. 27.

Здесь надо особенно внимательно следить за порядком числа $x = \ln t$, так как этот порядок определяет выбор той или иной из шкал E показательной функции.

Для примера вычислим $t = 2^{0,35}$. Так как число $a = 2$ устанавливается на средней шкале E, то порядок $\ln 2$ есть -1, т. е. $\ln 2 \approx 7 \cdot 10^{-1}$. Прикидываем порядок $\ln t$:

$$\ln t = b \ln a \approx 0{,}35 \cdot 7 \cdot 10^{-1} \approx 2 \cdot 10^{-1}.$$

Значит, результат t надо читать на средней шкале E:

$$t = 1{,}275.$$

Расчетное задание. Найти методом подбора корень уравнения

$$\lg x = 0{,}253 x^{1,13} - 0{,}5,$$

заключенный между 0 и 1, с точностью до 0,001.

ГЛАВА 4

СПЕЦИАЛЬНЫЕ РАСЧЕТЫ НА ЛИНЕЙКЕ

4.1. Некоторые случаи решения косоугольных треугольников

Известная из тригонометрии формула («теорема синусов»)

$$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\gamma}{c} \tag{4.1}$$

(рис. 28) дает готовые пропорции для счетной линейки. Эти пропорции реализуются по схеме рис. 29, которая в двух рассматриваемых ниже случаях дает *решение треугольников с помощью одной установки перевернутого движка.*

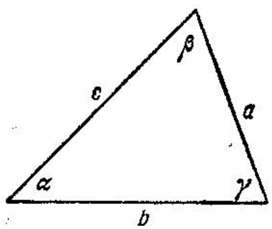

Рис. 28.

1. Заданы углы α, β и сторона *a*. Найти угол γ и стороны *b*, *c*. Угол γ находят без счетной линейки по формуле

$$\gamma=180^\circ-(\alpha+\beta).$$

Схема отыскания сторон *b* и *c*.

> 1. Установить против числа *a* шкалы ***B*** угол α на шкале ***S***.
> 2. Перевести визир на угол β по шкале ***S***; визир укажет число *b* на шкале ***B***.
> 3. Перевести визир на угол γ по шкале ***S***; визир укажет число *c* на шкале ***B***.

Порядок получаемых величин определяется по правилам, изложенным в главах 1 и 2.

Примечание. Описанная схема пригодна только тогда, когда все углы α, β, γ заключены между 5°44′ и 90°. Если какой-либо из этих углов меньше 5°44′, то для его установки вместо шкалы ***S*** применяется шкала ***S&T*** (см. стр. 32); если же какой-либо угол окажется больше 90°, то в схеме рис. 29 устанавливается его дополнение до 180°, так как $\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha$.

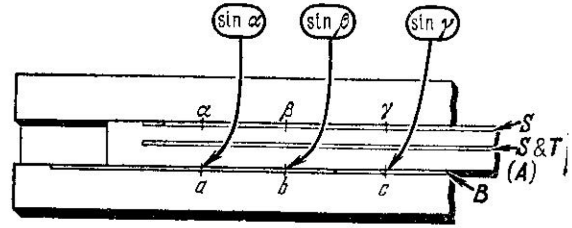

Рис. 29.

2. Заданы угол α и стороны *a*, *b*. Найти углы β, γ и сторону *c*.

Так как после отыскания угла β задача сводится к предыдущей, то схема решения получается из схемы стр. 50 заменой операции 2 на операцию

> 2′. Перевести визир на число *b* по шкале ***B***; визир укажет угол β на шкале ***S***.

В определении угла β возникают некоторые трудности, так как выбор шкалы для β зависит от порядка величины

$$\sin\beta=\frac{\sin\alpha}{a}b.$$

Порядок величины $\frac{\sin\alpha}{a}b$ можно оценить в процессе вычисления на счетной линейке. Если эта величина больше 1, задача вообще не имеет решения. Если она заключена между 0,1 и 1, то β надо читать на шкале ***S***, если же она меньше 0,1, то — на шкале ***S&T*** (см. стр. 32).

Заметим еще, что если $\frac{b}{a}>1$, а $\frac{\sin\alpha}{a}b<1$, то задача имеет два решения β_1 и $\beta_2=180^\circ-\beta_1$. На счетной линейке можно получить только меньшее из них.

Расчетное задание. В треугольнике *ABC* даны: сторона $AB=2{,}62$ и углы $\angle A=45^\circ49'$, $\angle B=61^\circ23'$. Вычислить: стороны *AC* и *BC*, биссектрису *CD* и высоту *CE*.

4.2. Решение прямоугольных треугольников

Для прямоугольного треугольника (рис. 30) особый интерес представляют две задачи: 1) отыскание катетов a и b по гипотенузе c и углу α; 2) отыскание гипотенузы c и угла α по катетам a и b. Рассмотрим решение этих задач с помощью пропорций

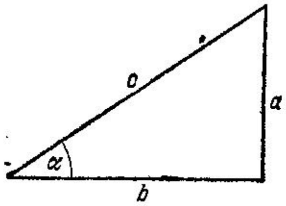

Рис. 30.

$$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{1}{c}, \qquad \frac{\operatorname{tg}\alpha}{a}=\frac{1}{b} \qquad (4.2)$$

при перевернутом движке (см. рис. 31).

Будем всегда обозначать катеты таким образом, чтобы выполнялось неравенство

$$\boxed{a<b}$$

и, значит,

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b}<1, \quad \text{т. е.} \quad \boxed{\alpha<45^\circ}$$

(при этом условии угол α можно устанавливать на шкале $\boldsymbol{T}$).

Отыскание катетов a и b по гипотенузе c и углу α.

1. Нормализовать число $c=c_0\cdot 10^n$ и против числа c_0 шкалы $\boldsymbol{B}$ установить конец тригонометрической шкалы.

Если угол $\alpha>5^\circ 44'$ (так что $\operatorname{tg}\alpha>\sin\alpha>0{,}1$), то

2. Перевести визир по шкале $\boldsymbol{S}$ на угол α; визир укажет на шкале $\boldsymbol{B}$ основу a_0 числа a, порядок числа a определить из неравенства $0{,}1\,c<a<c$.

3. Передвинуть движок, не смещая визирной линии, так, чтобы подвести под нее по шкале $\boldsymbol{T}$ угол α; конец тригонометрической шкалы укажет на шкале $\boldsymbol{B}$ основу b_0 числа b, порядок числа b определить из неравенства $a<b<c$.

Если угол $\alpha\leqslant 5^\circ 44'$ (так что $\operatorname{tg}\alpha=\sin\alpha=\alpha$ в радианах), то

2*. Перевести визир по шкале $\boldsymbol{S\&T}$ на угол $\alpha\cdot 10^m$, где m — такое целое число $\geqslant 0$, что $0^\circ 34'<\alpha\cdot 10^m\leqslant 5^\circ 44'$; визир укажет на шкале $\boldsymbol{B}$ основу a_0 числа a, порядок числа a определить из неравенства $c\cdot 10^{-m-2}<a\leqslant c\cdot 10^{-m-1}$.

3*. Положить $b=c$.

Определение порядка числа a при $\alpha\leqslant 5^\circ 44'$ основывается на том, что из $0^\circ 34'<\alpha\cdot 10^m\leqslant 5^\circ 44'$ следует: $0{,}01<\sin(\alpha\cdot 10^m)<0{,}1$ и, значит, $10^{-m-2}<\sin\alpha=\frac{a}{c}<10^{-m-1}$.

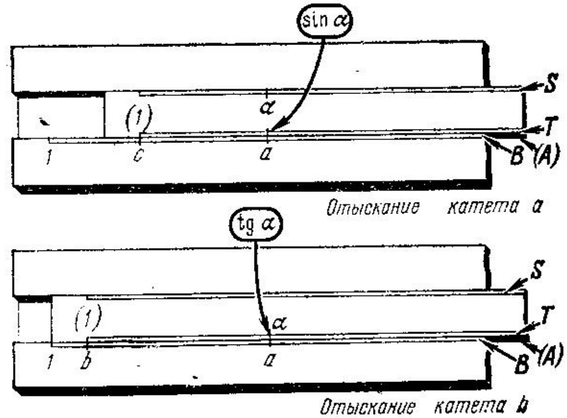

Рис. 31.

Отыскание гипотенузы c и угла α по катетам a и b (по схеме рис. 31 в обратном порядке).

1. Нормализовать числа $a=a_0\cdot 10^k$ и $b=b_0\cdot 10^l$. Против числа b_0 шкалы $\boldsymbol{B}$ установить конец тригонометрической шкалы. Перевести визир по шкале $\boldsymbol{B}$ на число a_0.

Если отношение $\frac{a}{b}>0{,}1$, то

2. Визир укажет на шкале $\boldsymbol{T}$ угол α.

3. Передвинуть движок, не смещая визирной линии, так, чтобы подвести под нее по шкале $\boldsymbol{S}$ угол α; конец тригонометрической шкалы укажет на шкале $\boldsymbol{B}$ основу c_0 числа c; порядок числа c определить из неравенства $b<c<2b$.

Если отношение $\frac{a}{b}\leqslant 0{,}1$, то

2*. Визир укажет на шкале $\boldsymbol{S\&T}$ угол $\alpha\cdot 10^m$, где m — такое целое число $\geqslant 0$, что $10^{-m-2}<\frac{a}{b}\leqslant 10^{-m-1}$.

3*. Положить $c=b$.

Примечание. Обе рассмотренные задачи можно решать без перевертывания движка с помощью рисок на оборотной стороне корпуса (см. стр. 33). Риски позволяют устанавливать (или отмечать) $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ на шкале A только против концов шкалы B; поэтому пропорции (4.2) надо заменить на

$$\frac{\sin\alpha}{1}=\frac{a}{c}, \qquad \frac{\operatorname{tg}\alpha}{1}=\frac{a}{b}. \tag{4.3}$$

При этом катет a отмечается (или устанавливается) на шкале A, а гипотенуза c и катет b — на шкале B. В остальном последовательность операций и определение порядков величин аналогичны приведенным выше для расчетов при перевернутом движке (ср. задачу 4 на стр. 46).

Пример. Дано $c=13$, $\alpha=22°37'$.

Подводим $\alpha=22°37'$ под риску у шкалы S, против $c=13$ шкалы B читаем $a=5$ на шкале A. Затем подводим $\alpha=22°37'$ под риску у шкалы T, против $a=5$ шкалы A читаем $b=12$ на шкале B.

4.3. Переход от декартовых координат к полярным и обратно. Вычисления с комплексными числами

Декартовы координаты (x, y) точки M (рис. 32) и ее полярные координаты (r, φ) связаны формулами

$$x=r\cos\varphi, \qquad y=r\sin\varphi.$$

Из этих формул вытекают пропорции вида (4.3)

$$\frac{\sin\varphi}{1}=\frac{y}{r}, \qquad \frac{\operatorname{tg}\varphi}{1}=\frac{y}{x}.$$

Но теперь уже x и y могут быть как положительными,

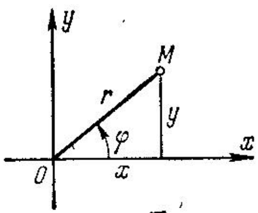

Рис. 32.

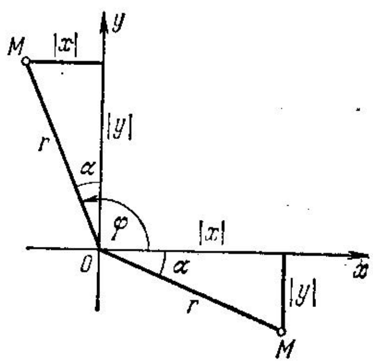

Рис. 33.

так и отрицательными, а угол φ изменяется от $-180°$ до $+180°$ (или, при другой нормировке, от $0°$ до $360°$).

При любом положении точки M можно построить прямоугольный треугольник с гипотенузой $c=r$ и катетами $|x|$, $|y|$ так, чтобы наименьший его угол имел вершину в начале координат (рис. 33). Если обозначить этот угол буквой α $(0<\alpha<45°)$, меньшее из чисел $|x|$, $|y|$ через a, а большее — через b, то мы приведем нашу задачу к задаче, рассмотренной в п. 4.2. При этом для каждой из восьми областей, занумерованных на рис. 34, зависимость между углами φ и α, а также между парами чисел (a, b) и (x, y) устанавливается следующей таблицей:

Область	Угол α	x	y
1 $(0°\leqslant\varphi<45°)$	φ	b	a
2 $(45°\leqslant\varphi<90°)$	$90°-\varphi$	a	b
3 $(90°\leqslant\varphi<135°)$	$\varphi-90°$	$-a$	b
4 $(135°\leqslant\varphi\leqslant180°)$	$180°-\varphi$	$-b$	a
5 $(-180°<\varphi<-135°)$	$\varphi+180°$	$-b$	$-a$
6 $(-135°\leqslant\varphi<-90°)$	$-\varphi-90°$	$-a$	$-b$
7 $(-90°\leqslant\varphi<-45°)$	$\varphi+90°$	a	$-b$
8 $(-45°\leqslant\varphi<0°)$	$-\varphi$	b	$-a$

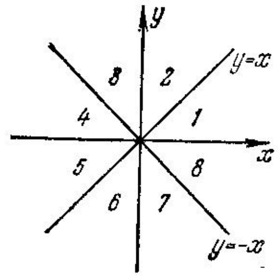

Рис. 34.

Если даны полярные координаты φ и r, то по таблице находим угол $\alpha\,(0°<\alpha<45°)$, затем по углу α и гипотенузе $c=r$ вычисляем на счетной линейке катеты a и b и, наконец, по той же таблице находим x и y. Если даны декартовы координаты x и y, то указанная процедура производится в обратном порядке.

Вычисления с комплексными числами. Переход от алгебраической формы комплексного числа

$$z=x+iy$$

к тригонометрической форме

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

есть переход от декартовых координат (x, y) к полярным координатам (r, φ).

Переход от одной формы комплексного числа к другой необходим при вычислениях с комплексными числами, так как сложение и вычитание удобнее выполнять в алгебраической форме

$$(z=z_1+z_2 \text{ означает } x=x_1+x_2,\ y=y_1+y_2),$$

а умножение и деление — в тригонометрической

$$(z=z_1z_2 \text{ означает } r=r_1r_2,\ \varphi=\varphi_1+\varphi_2).$$

Пример. Вычислить

$$z_0 = \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2},$$

где $z_1 = 15 + 3i$, $z_2 = -1 + 14i$.

Сначала вычисляем $z_3 = z_1 + z_2 = 14 + 17i$. Затем переводим все числа z_1, z_2, z_3 в тригонометрическую форму (с помощью счетной линейки):

z	x	y	a	b	α	r	φ
z_1	15	3	3	15	11°18′	15,3	11°18′
z_2	−1	14	1	14	4°6′	14,0	94°6′
z_3	14	17	14	17	39°30′	22,0	50°30′

Вычисляем $z_0 = \frac{z_1 z_2}{z_3}$:

$$r_0 = \frac{r_1 r_2}{r_3} = \frac{15{,}3 \cdot 14{,}0}{22{,}0} = 9{,}72,$$

$$\varphi_0 = \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 = 11°18' + 94°6' - 50°30' = 54°54'.$$

Переводим z_0 в алгебраическую форму:

$c = r_0 = 9{,}72$; $\alpha = 90° - \varphi_0 = 35°6'$; $a = 5{,}58$; $b = 7{,}95$.

По таблице на стр. 55:

$x = a = 5{,}58$; $y = b = 7{,}95$; $z_0 = 5{,}58 + 7{,}95i$.

Расчетное задание. Даны:

$z_1 = 23{,}5 + 1{,}8i$; $z_2 = 13{,}6 - 8{,}44i$,

$z_3 = 2{,}14 + 16{,}06i$; $z_4 = 4{,}06 - 8{,}15i$.

Вычислить

$$z_5 = \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2}; \quad z_6 = z_3 + z_5; \quad z_7 = \frac{z_4 z_6}{z_4 + z_6}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ШКАЛА И ЕЕ ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

Основные свойства счетной линейки и в первую очередь правило пропорций вытекают из того, что шкалы счетной линейки являются логарифмическими.

Шкала называется *логарифмической*, если на ней нанесены логарифмы чисел, а отметками шкалы являются сами числа. На

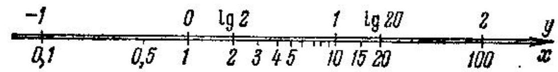

Рис. 35.

рис. 35 представлена *логарифмическая шкала* x рядом с *равномерной шкалой* y, на которой нанесены десятичные логарифмы чисел x:

$$y = \lg x$$

Равномерность шкалы y означает, что длина отрезка $[y_1, y_2]$ между любыми двумя точками y_1 и y_2 этой шкалы пропорциональна разности $y_2 - y_1$. В частности, последовательные целые точки $y = 0, 1, 2, \ldots$ находятся на равных расстояниях друг от друга. На шкале x против точек $y = 0, 1, 2, \ldots$ ставятся отметки $x = 1, 10, 100, \ldots$, так что логарифмическая шкала x оказывается уже *неравномерной*. Промежуточные отметки шкалы x могут быть нанесены с помощью таблицы десятичных логарифмов, например, отметки $x = 2$; 3; 4; 5 наносятся против значений $y = 0{,}301$; 0,478; 0,602; 0,699. Очевидно, что точки $x = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ будут при этом находиться на неравных расстояниях.

Логарифмическая шкала простирается неограниченно в обе стороны. Слева от точки $x = 1$ находятся положительные числа, меньшие 1, десятичные логарифмы которых отрицательны. (Мы здесь и в дальнейшем будем употреблять термины «точка x» и «число x» как равносильные, подобно тому как это делается при работе с числовой осью.)

Основные шкалы A и B счетной линейки представляют собой только один отрезок [1, 10] логарифмической шкалы. Шкалы C и

D представляют собой отрезок $[1, 100]$ логарифмической шкалы, а шкала K — отрезок $[1, 1000]$ той же шкалы.

Шкала L представляет собой равномерную шкалу, точки 0 и 1 которой находятся соответственно против чисел 1 и 10 шкалы B; из сказанного выше, а также из рис. 35 ясно, что шкала L дает десятичные логарифмы чисел шкалы B.

1. **Вывод правила пропорций** (п. 1.2). Сначала найдем расстояние $\rho[a, b]$ между двумя точками $x=a$ и $x=b\ (b>a)$ логарифмической шкалы. Воспользуемся для этого равномерностью шкалы $y=\lg x$: длина отрезка шкалы y, совпадающего с отрезком $[a, b]$ шкалы x, пропорциональна разности $\lg b - \lg a$ (рис. 36). Обозначая коэффициент пропорциональности через λ, получим

Рис. 36

$$\rho[a, b] = \lambda(\lg b - \lg a) = \lambda \lg \frac{b}{a}. \qquad (*)$$

В частности, расстояние любой точки x логарифмической шкалы от точки 1 пропорционально десятичному логарифму числа x:

$$\rho[1, x] = \lambda \lg \frac{x}{1} = \lambda \lg x.$$

Коэффициент λ равен длине отрезка $[1, 10]$ логарифмической шкалы (т. е. единице масштаба оси y), как видно из формулы

$$\rho[1, 10] = \lambda \lg 10 = \lambda.$$

Возьмем теперь две одинаковые и параллельно расположенные логарифмические шкалы, которые мы обозначим через A и B. Сместим шкалу A относительно шкалы B и рассмотрим любые пары чисел a_1 и b_1, a_2 и b_2, которые окажутся друг против друга на этих шкалах (см. рис. 3 на стр. 8). В силу формулы (*) равенство расстояний

$$\rho[a_1, a_2] = \rho[b_1, b_2]$$

равносильно равенству

$$\lambda \lg \frac{a_2}{a_1} = \lambda \lg \frac{b_2}{b_1}.$$

Это значит, что для рассматриваемых чисел имеет место пропорция

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1}.$$

Эта пропорция равносильна пропорции

$$\boxed{\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}}, \qquad (1.1)$$

которая и выражает доказываемое правило:

*При любом смещении шкал **A** и **B** все числа шкалы **A** пропорциональны расположенным против них числам шкалы **B**.*

Отметим, что доказанное правило пропорций относится ко всей б е с к о н е ч н о й логарифмической шкале. Если бы мы имели возможность построить такую шкалу на счетной линейке, то мы могли бы вести расчеты с числами без их предварительной нормализации и без переброски движка. Необходимость нормализации исходных данных и применяемые в расчетах переброски движка вызваны тем, что на основных шкалах счетной линейки имеется только один отрезок логарифмической шкалы.

2. **Свойство «периодичности» логарифмической шкалы.** Из правила пропорций вытекает, что если шкалу A сдвинуть относительно шкалы B вправо на длину отрезка $[1, 10]$, то все числа шкалы B будут в 10 раз больше расположенных против них чисел шкалы A (рис. 37). Отсюда следует, что логарифмическая шкала на отрезке $[10, 100]$ как бы повторяет отрезок $[1, 10]$ этой шкалы с

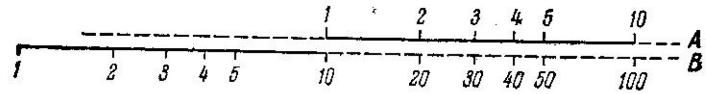

Рис. 37.

увеличением всех чисел в 10 раз. Точно так же любой отрезок $[10^n, 10^{n+1}]$ как бы повторяет отрезок $[1, 10]$ с увеличением всех чисел в 10^n раз (n — целое). Благодаря этому свойству один отрезок $[1, 10]$ позволяет восстановить путем последовательного смещения всю логарифмическую шкалу. Отмеченное свойство называется свойством *периодичности* логарифмической шкалы. Оно позволяет, в частности, обосновать правило переброски движка путем рассмотрения этой переброски как продолжения шкалы A или B. Далее, в силу того же свойства периодичности логарифмические шкалы C и D можно рассматривать как шкалы, состоящие каждая из двух отрезков $[1, 10]$, а это значит, что на них можно решать пропорции без переброски движка.

Наконец, свойство периодичности позволяет нанести логарифмическую шкалу на окружность, что вообще снимает вопрос о перебросках движка. Такие круговые логарифмические шкалы реализованы в конструкциях логарифмического диска «Спутник» (см. стр. 12) и описываемой в приложении 3 Круговой логарифмической линейки КЛ-1.

3. **Постоянство относительной погрешности.** Погрешность установки чисел на шкале определяется тем расстоянием, на которое по техническим правилам допускается смещение штрихов шкалы. Так как смещение штрихов, не превышающее допуска, может встретиться на любом участке шкалы, то для равномерной шкалы абсолютная погрешность установки чисел будет одна и та же на всем протяжении шкалы. Иначе обстоит дело на логарифмических шкалах. Здесь оказывается постоянной не абсолютная, а относительная погрешность установки чисел. Это означает следующее. Пусть при установке чисел a и b на логарифмической шкале их абсолютные погрешности Δ_a и Δ_b вызваны тем, что отметки a и b смещены на одно и то же расстояние. Тогда из равенства этих расстояний

$$\rho[a, a+\Delta_a] = \rho[b, b+\Delta_b],$$

как и в п. 1, вытекает пропорция

$$\frac{a+\Delta_a}{a}=\frac{b+\Delta_b}{b}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{\Delta_a}{a}=\frac{\Delta_b}{b},$$

что и выражает равенство относительных погрешностей установки чисел a и b.

По существующим техническим правилам смещение штрихов на обычных счетных линейках не должно превосходить 0,2 *мм*. Это значит, что предельное допустимое смещение любой отметки a составляет

$$\rho\,[a,\ a+\Delta_a]=0{,}2 \ мм$$

Отсюда по формуле расстояний (*) получаем

$$\lambda \lg \frac{a+\Delta_a}{a}=0{,}2 \ мм.$$

Для основных шкал A и B нормальной линейки коэффициент λ, дающий длину отрезка [1, 10] шкалы, равен 250 *мм*, поэтому

$$\lg\left(1+\frac{\Delta_a}{a}\right)=\frac{0{,}2}{250}=0{,}0008,$$

откуда

$$\frac{\Delta_a}{a}=10^{0{,}0008}-1\approx 0{,}002=0{,}2\%;$$

значит, относительная погрешность установки чисел на основных шкалах A и B нормальной счетной линейки составляет около 0,2%.

На шкалах C и D коэффициент λ вдвое меньше (125 *мм*) и поэтому относительная погрешность установки чисел на этих шкалах вдвое больше ($\approx 0{,}4\%$).

4. Построение шкал степенных функций. Рассмотрим сначала соответствие между шкалами B и C корпуса. Шкала B представляет собой отрезок [1, 10] логарифмической шкалы с масштабным коэффициентом $\lambda_1=250$ *мм*. Шкала C представляет собой отрезок [1, 100] логарифмической шкалы с масштабным коэффициентом $\lambda_2=\frac{\lambda_1}{2}=125$ *мм*, причем 1 шкалы C находится против 1 шкалы B. Поэтому если точка u шкалы C находится против точки x_0 шкалы B, то из равенства расстояний

$$\rho\,[1,\ u]=\rho\,[1,\ x_0]$$

получаем

$$\lambda_2 \lg u=\lambda_1 \lg x_0,$$

или

$$\frac{\lambda_1}{2}\lg u=\lambda_1 \lg x_0,$$

и следовательно,

$$u=x_0^2.$$

Вот почему шкала C является шкалой квадратов для шкалы B.

Аналогично строится шкала кубов K с масштабным коэффициентом $\lambda_3=\frac{\lambda_1}{3}$.

Шкала квадратов и шкала кубов являются простейшими шкалами степенной функции. Легко построить шкалу степенной функции $u=x^r$ при любом показателе $r>0$. Для этого достаточно параллельно шкале B аргумента x поместить еще одну логарифмическую шкалу с масштабным коэффициентом

$$\lambda_r=\frac{\lambda_1}{r}$$

и установить число $u=1$ этой шкалы против числа $x=1$ шкалы B. Действительно, при этом для соответственных точек x и u по формуле расстояния имеем

$$\lambda_r \lg u=\lambda_1 \lg x, \quad \text{т. е.} \quad \lg u=r\lg x, \qquad (**)$$

откуда $u=x^r$.

Таким путем можно построить на счетной линейке шкалу функции x^r не только при любом целом, но и при любом дробном и даже иррациональном значении r. На обычных линейках ограничиваются случаями целых значений $r=2$ и $r=3$.

Заметим, что можно построить шкалу степенной функции и с отрицательным показателем $r=-q$, $q>0$; для этого надо только изменить направление логарифмической шкалы u. Действительно, при изменении направления оси изменяется знак в формуле расстояния, и поэтому формула (**) заменяется на следующую:

$$-\lambda_q \lg u=\lambda_1 \lg x, \quad \text{т. е.} \quad \lg u=-q\lg x,$$

откуда $u=x^{-q}$.

На обычных линейках подобные шкалы встречаются только для случая $r=-1$ (шкала обратных величин; см. п. 2.5).

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

ПРАВИЛА ОБРАЩЕНИЯ СО СЧЕТНОЙ ЛИНЕЙКОЙ

Счетная линейка требует бережного обращения. При работе на ней не следует применять усилий. Корпус линейки состоит из двух частей, которые слегка пружинят. Для того чтобы движок свободно ходил в пазах корпуса, надо так держать корпус, чтобы он не зажимал движка. Для этого надо слегка надавливать снизу на середину корпуса средним пальцем, а сверху на края корпуса—большим и указательным пальцами. Только при свободном, без усилий, перемещении движка можно осуществлять точные установки. Ни в коем случае не следует зажимать линейку в кулаке.

Счетную линейку надо оберегать от ударов, жары и влаги. В нерабочем состоянии она должна храниться в футляре, причем бегунок следует оставлять под крышкой футляра.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

КРУГОВАЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ЛИНЕЙКА КЛ-1

1. Устройство. Круговая логарифмическая линейка КЛ-1 имеет два циферблата. На лицевой стороне (рис. 38, *а*) находится подвижный циферблат с двумя шкалами: основной шкалой ***B*** и шкалой ***C*** квадратов. На оборотной стороне (рис. 38, *б*) находится неподвижный циферблат с тремя шкалами: шкалой ***R*** обратных величин и двумя тригонометрическими шкалами ***S*** и ***T*** (обозначенными на самой линейке). Подвижный циферблат вращается при

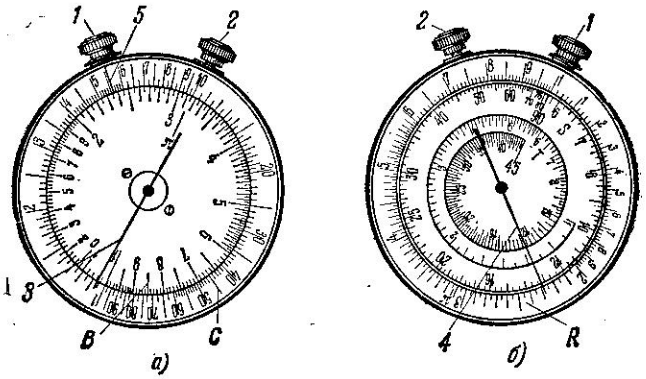

Рис. 38.

помощи головки *1* с черной точкой. Головка *2* с красной точкой вращает одновременно две стрелки: стрелку *3* на лицевой стороне и стрелку *4* — на оборотной. Эти стрелки играют роль двусторонней визирной линии, позволяя сопоставлять сразу все шкалы линейки (на рис. 38, *а* стрелки показывают: 1,04 на шкале ***B*** и 1,08 на шкале ***C***; на рис. 38, *б* — 2,27 на шкале ***R***, 13°10′ на шкале ***S***; 1°18′ и 12°50′ на шкале ***T***). Кроме того, на лицевой стороне над подвижным циферблатом укреплен неподвижный указатель *5*, который всегда отмечает положение начала (числа 1) шкалы ***R***; он служит для совмещения начал шкал ***B*** и ***R*** (на рис. 38, *а* этот указатель стоит против числа 2,36 шкалы ***B***).

Точность установки чисел на всех шкалах КЛ-1 вдвое меньше, чем на соответствующих шкалах нормальной счетной линейки.

2. Основное свойство. Умножение и деление. Шкалы ***B*** и ***R*** совершенно одинаковы, но по отношению к ним стрелки вращаются в разные стороны. Поэтому при совмещении начал шкал ***B*** и ***R*** (т. е. при подведении 1 шкалы ***B*** под неподвижный указатель) стрелки указывают на этих шкалах обратные величины; точнее, отмеченные стрелками числа x шкалы ***B*** и w шкалы ***R*** связаны соотношением

$$w = \frac{10}{x}, \qquad x = \frac{10}{w}.$$

Если повернуть подвижный циферблат, то между любыми двумя парами чисел x_1 и w_1, x_2 и w_2, отмеченными стрелками, образуется зависимость

$$x_1 : \frac{10}{w_1} = x_2 : \frac{10}{w_2}, \qquad (*)$$

или

$$x_1 w_1 = x_2 w_2. \qquad (**)$$

Это основное свойство круговой линейки позволяет решать пропорции на ней, так же как и на обычной линейке. В частности, *для умножения* x_1 на w_1 следует установить стрелку против одного из сомножителей (w_1) на шкале ***R*** неподвижного циферблата и подвести другой сомножитель (x_1) под стрелку на шкале ***B*** вращением циферблата; тогда указатель укажет на шкале ***B*** произведение ($x_2 = x_1 w_1$ при $w_2 = 1$ на шкале ***R***; например, на рис. 38: $2{,}27 \cdot 1{,}04 = 2{,}36$). *Деление* выполняется в обратном порядке: вращением циферблата надо подвести делимое x_2 под указатель и затем установить стрелку против делителя на любой из шкал ***B*** или ***R***; тогда на другом из этих циферблатов стрелка укажет частное.

Заметим, что наличие неподвижного указателя позволяет определять величину смещения шкалы ***B*** относительно некоторого ее начального положения и, значит, выполнять умножение и деление на одной только шкале ***B***. *Для умножения* надо установить один из сомножителей против указателя, затем стрелкой отметить положение 1 и повернуть циферблат так, чтобы подвести под стрелку второй сомножитель; тогда указатель укажет произведение. *Деление* выполняется в обратном порядке: делитель надо установить против указателя, стрелкой отметить делимое и затем подвести под стрелку 1; тогда указатель укажет частное.

3. Функциональные преобразования. Сопоставление шкал ***B*** и ***C*** дает как на обычной линейке

$$u = x^2 \quad \text{и} \quad x = \sqrt{u}.$$

В отличие от обычной линейки тригонометрические шкалы ***S*** и ***T*** *непосредственно* сопоставляются со шкалой ***R*** и дают

$$\text{на } S\text{:} \quad \alpha = \arcsin w \quad \text{и} \quad w = \sin\alpha,$$
$$\text{на } T\text{:} \quad \beta = \operatorname{arctg} w \quad \text{и} \quad w = \operatorname{tg}\beta.$$

Шкала ***S&T*** здесь нанесена в качестве продолжения шкалы ***T*** и доведена только до 1°.

Применение стрелок как двустороннего визира позволяет при совмещении начал шкал ***B*** и ***R*** сопоставлять все шкалы подвижного и неподвижного циферблатов

$$S \text{ и } B\text{:} \quad x = \frac{10}{w} = \frac{10}{\sin\alpha} \quad \text{и} \quad \alpha = \arcsin\frac{10}{x},$$
$$T \text{ и } B\text{:} \quad x = \frac{10}{w} = \frac{10}{\operatorname{tg}\beta} \quad \text{и} \quad \beta = \operatorname{arctg}\frac{10}{x}$$

(что позволяет, в частности, находить тангенсы углов от 45°

до 89°);

$$S \text{ и } C:\quad u=x^2=\left(\frac{10}{\sin\alpha}\right)^2 \quad\text{и}\quad \alpha=\arcsin\frac{10}{\sqrt{u}},$$

$$T \text{ и } C:\quad u=x^2=\left(\frac{10}{\operatorname{tg}\beta}\right)^2 \quad\text{и}\quad \beta=\operatorname{arctg}\frac{10}{\sqrt{u}},$$

$$R \text{ и } C:\quad u=x^2=\left(\frac{10}{w}\right)^2 \quad\text{и}\quad w=\frac{10}{\sqrt{u}}.$$

4. **Выбор схемы расчета.** В отличие от обычной линейки здесь поворот циферблата и поворот стрелок осуществляются одинаково легко (головками *1* и *2*) и в одинаковой мере влияют на точность расчета Поэтому оптимальность расчетной схемы определяется просто количеством поворотов головок

Комбинируя основное свойство (*) с функциональными преобразованиями, можно получать общие схемы расчетов, подобно тому, как это сделано в главах 3 и 4 по отношению к обычной линейке.

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К РАСЧЕТНЫМ ЗАДАНИЯМ

К стр. 47. Угол β находим по шкалам ***S&T*** и ***T***; $25° \pm \beta$ считаем без линейки; величину y находим из пропорции

$$\frac{\sin(25°+\beta)}{\sqrt{0,604}}=\frac{\operatorname{tg}(25°-\beta)}{\sqrt{y}}$$

того же типа, что и (3.17) на стр. 47. Слева приведена часть искомой таблицы.

x	β	$25°+\beta$	$25°-\beta$	y
0,05	2°52′	27°52′	22°8′	0,457
0,07	4°0′	29°0′	21°0′	0,378
0,09	5°9′	30°9′	19°51′	0,312
0,11	6°17′	31°17′	18°43′	0,258
...	...	...	...	...
0,25	14°2′	39°2′	10°58′	0,057

К стр. 49. Построив графики двух функций $y=\lg x$ и $y=0,253x^{1,13}$, замечаем, что $0,1<x<1$; поэтому нормализуем неизвестное $x=x_0\cdot 10^{-1}$ и преобразуем уравнение:

$$\lg x_0-0,5=$$

$$=0,253\frac{x_0^{1,13}}{10^{1,13}}=0,0188x_0^{1,13}.$$

x_0	$\lg x_0-0,5$	$0,0188x_0^{1,13}$
2,0	−0,199	0,041
4,0	0,102	0,090
3,5	0,044	0,077
3,8	0,080	0,085
3,9	0,091	0,088
3,85	0,086	0,087
3,86	0,087	0,087

В таблице слева представлен подбор решения. С точностью до 0,001

$$x=x_0\cdot 10^{-1}=0,386.$$

К стр. 51. $AC=2,41$; $BC=1,97$; $CD=1,74$; $CE=1,73$.

К стр. 56. $z_5=9,56-2,97i$; $z_6=11,70-13,09i$; $z_7=3,18-5,14i$.