Lehmann

Der Rechenstab

und seine Verwendung

DR. HELMAR LEHMANN

Der Rechenstab und seine Verwendung

3., verbesserte Auflage
Mit 157 Bildern und 3 Tafeln
287 durchgerechneten Beispielen und
125 Übungsaufgaben mit Lösungen

VEB FACHBUCHVERLAG LEIPZIG

Redaktionsschluß 15.6.1970

ES 20 C 2

Verlagslektor: Alfred Sommer

Satz: Leipziger Druckhaus, Grafischer Großbetrieb

Druck: „grafia" KG, Leipzig

Veröffentlicht unter der Lizenznummer 114-210/138/70

5,80

Vorwort

Der Rechenstab hat sich heute als praktisches Hilfsmittel für die verschiedensten Berechnungen sowohl im Büro als auch an der Werkbank und auf der Baustelle durchgesetzt. Er bringt für alle Werktätigen eine große Arbeitserleichterung und erhöht die Arbeitsproduktivität.

Das vorliegende Buch soll in einfacher Form in den Gebrauch des Rechenstabes einführen. An Voraussetzungen sind sichere Kenntnisse der Potenz- und Logarithmengesetze notwendig. Um sie aufzufrischen, ist den eigentlichen Ausführungen über den Rechenstab der Abschnitt 2. über Potenzen und Logarithmen vorangestellt. Natürlich ist ein Erlernen der Rechenstabregeln ohne Beherrschung der Logarithmengesetze möglich. Das würde jedoch zu einem mechanischen Auswendiglernen aller Regeln führen und könnte beim Vergessen der einen oder anderen Regel zur Folge haben, den Rechenstab völlig falsch anzuwenden. Deshalb ist in diesem Buch Wert darauf gelegt worden, daß der Leser die Notwendigkeit der einzelnen Rechenoperationen wirklich durchdenkt, denn nur so können auftretende Regeln zum vollen geistigen Besitz werden. Das Buch ist mithin nicht nur eine Gebrauchsanweisung für den Rechenstab, es soll auch erläutern, warum dieser oder jener Rechenweg eingeschlagen wird.

Bei den Ausführungen über die einzelnen mit dem Rechenstab möglichen Rechenoperationen sind immer Beispiele angeführt, die meist den Gebieten der Physik und der Technik entnommen sind. An diese durchgerechneten Beispiele schließen sich dann Übungsaufgaben an, für die die Endergebnisse mitgeteilt werden.

Die Einstellungen, die am Rechenstab vorgenommen werden müssen, sind nicht nur beschrieben, sondern an den wichtigsten Stellen durch Bilder erläutert. Dabei sind nicht, wie es sonst üblich ist, nur Strichzeichnungen verwendet worden, sondern es wurde Wert darauf gelegt, daß für alle wichtigen Abbildungen die Rechenstabeinstellungen photographisch dargestellt sind. Das soll dem Leser erleichtern, seine Einstellungen am eigenen Rechenstab zu kontrollieren.

Da das Buch nicht auf einen bestimmten Rechenstab orientiert wurde, ist auf alle Arten der Rechenstäbe eingegangen worden.
Am Schluß sind auf einer Tafel noch einmal die wichtigsten Rechenoperationen graphisch dargestellt; man findet dabei auch den Hinweis, an welcher Stelle des Buches man in Zweifelsfällen nachlesen kann.
Mögen die vielseitigen Darstellungen, die vielen Photos, Beschreibungen fast aller handelsüblichen Rechenstäbe und die Zusammenfassung am Schluß dazu beitragen, daß das Buch eine weite Verbreitung findet, damit dem Rechenstab neue Freunde gewonnen werden und die, die bereits einen Rechenstab benutzen, vielleicht einige neue Anregungen erhalten.
Durch den raschen Absatz der 1. und 2. Auflage dieser Schrift machte sich die Vorbereitung einer weiteren Auflage notwendig. Sie gab Gelegenheit, bekannt gewordene Druckfehler zu berichtigen. Außerdem wurden kleine Erweiterungen vorgenommen. So kam eine interessante Anwendung der trigonometrischen Teilungen, die der Japaner Kumazawa erdachte, hinzu. In den Abschnitten 5.2.2., 5.3.2., 5.4. und 5.7.5. wurde die Untergliederung verfeinert. Inzwischen ist das Buch in einer Lizenzausgabe in der Reihe Prisma-Technica, Bibliotheek voor moderne Technici unter dem Titel „De Rekenliniaal“ beim Verlag Spectrum N.V., Utrecht/Antwerpen, erschienen.
Den Herren H. Simon, Dresden, H. Müller, Liebenwerda, O. Langer, Döbeln, E. Müller, Köthen, und N. Denkmann, Leipzig, sei für ihre kritischen Hinweise und Verbesserungsvorschläge gedankt.

Verfasser und Verlag

Inhalt

1. *Anwendungsmöglichkeiten des Rechenstabes* 11
2. *Mathematische Grundlagen des Rechenstabes* 13
2.1. Potenzieren 13
2.1.1. Potenz 13
2.1.2. Addition und Subtraktion von Potenzen 14
2.1.3. Multiplikation von Potenzen mit gleichen Basen 14
2.1.4. Potenzieren von Potenzen 15
2.1.5. Division von Potenzen mit gleichen Basen 15
2.1.6. Erste Erweiterung des Potenzbegriffes 16
2.1.7. Multiplikation und Division von Potenzen mit gleichen Exponenten, aber ungleichen Basen 17
2.2. Radizieren 17
2.2.1. Wurzeln 17
2.2.2. Zweite Erweiterung des Potenzbegriffes 18
2.2.3. Zusammenfassung 19
2.3. Logarithmieren 20
2.3.1. Logarithmen zur Basis 2 22
2.3.2. Logarithmen zur Basis 10, dekadische Logarithmen 26
2.3.3. Logarithmen zur Basis e, natürliche Logarithmen 31
2.4. Aufstellen einer logarithmischen Skale 31
3. *Rechnen mit Skalen* 33
3.1. Rechnen mit linearen Skalen 33
3.2. Rechnen mit logarithmischen Skalen 38
4. *Aufbau des Rechenstabes* 43
4.1. Hauptteile des Rechenstabes 43
4.2. Die wichtigsten Teilungen des Rechenstabes 44
4.3. Aufbau der wichtigsten Teilungen 46
4.3.1. Aufbau der Grundteilungen C und D und der Teilung CI 46
4.3.2. Aufbau der Quadratteilungen A und B 49
4.3.3. Aufbau der Kubikteilung K 50

4.4. Einstellungen auf den Teilungen ... 51
4.5. Überschlagsrechnungen ... 52

5. *Verwendung des Rechenstabes* ... 56

5.1. Multiplikation und Division ... 56
5.1.1. Multiplikation ... 56
5.1.1.1. HORNERschema ... 64
5.1.2. Division ... 66
5.1.3. Verwendung der Reziprokteilung CI ... 72
5.1.4. Mehrfache Multiplikationen ... 80
5.1.4.1. Drei Faktoren ... 80
5.1.4.2. Mehr als drei Faktoren ... 84
5.1.5. Kombinierte Multiplikation und Division ... 84
5.1.5.1. Produkt im Zähler ... 84
5.1.5.2. Produkt im Nenner ... 87
5.1.5.3. Mehrere Faktoren im Zähler und Nenner ... 89
5.2. Quadrate ... 90
5.2.1. Quadrieren ... 90
5.2.2. Quadrieren, verbunden mit Multiplikation und Division ... 92
5.2.2.1. Quadrat eines Produktes ... 92
5.2.2.2. Quadrat eines Quotienten ... 93
5.2.2.3. Quadrat und Faktor ... 94
5.2.2.4. Teil eines Quadrates ... 96
5.2.2.5. Quadrat im Nenner ... 98
5.2.2.6. Faktor und Quadrat im Nenner ... 99
5.3. Quadratwurzeln ... 99
5.3.1. Radizieren ... 99
5.3.2. Radizieren, verbunden mit Multiplikation und Division ... 104
5.3.2.1. Faktor und Wurzel ... 104
5.3.2.2. Teil einer Wurzel ... 105
5.3.2.3. Wurzel im Nenner ... 106
5.3.2.4. Wurzel aus einem Produkt ... 108
5.3.2.5. Kehrwert der Wurzel eines Produktes ... 110
5.3.2.6. Wurzel aus einem Quotienten ... 112
5.3.2.7. Wurzel und Faktor im Nenner ... 113
5.3.3. Berechnungen nach dem Lehrsatz des PYTHAGORAS ... 113
5.4. Kuben und Kubikwurzeln ... 115
5.4.1. Kuben ... 115
5.4.1.1. Kubus eines Produktes ... 115
5.4.1.2. Kubus eines Quotienten ... 117

5.4.1.3. Kubus und Faktor ... 117
5.4.1.4. Kubus im Nenner ... 117
5.4.1.5. Kehrwert des Kubus eines Produktes ... 117
5.4.2. Kubikwurzeln ... 118
5.4.2.1. Kubikwurzel und Faktor ... 119
5.4.2.2. Kubikwurzel und Divisior ... 120
5.4.2.3. Kubikwurzel im Nenner ... 121
5.4.2.4. Kubikwurzel aus einem Quotienten ... 121
5.4.2.5. Kehrwert des Produktes eines Faktors mit einer Kubikwurzel ... 122
5.4.3. Zusammenarbeit der Teilungen A und K ... 122
5.5. Spezielle Rechnungen ... 124
5.5.1. Reziproke Werte ... 124
5.5.2. Konstante Verhältnisse ... 125
5.5.3. Berechnung von Tabellenwerten ... 131
5.6. Winkelfunktionen ... 133
5.6.1. Verwendung der Sinusteilung ... 135
5.6.1.1. Werte der Sinusfunktion ... 137
5.6.1.2. Sinussatz ... 140
5.6.1.3. Werte der Cosinusfunktion ... 142
5.6.1.4. Verschiedene Anwendungen ... 143
5.6.1.5. Nochmals Werte der Sinusfunktion ... 148
5.6.2. Verwendung der Tangensteilung ... 148
5.6.2.1. Werte der Tangensfunktion für Winkel zwischen 5,72° (5° 43′) und 45° ... 149
5.6.2.2. Werte der Tangensfunktion für Winkel zwischen 45° und 84,28° (84° 17′) ... 153
5.6.2.3. Werte der Cotangensfunktion ... 156
5.6.3. Verwendung der Sinus-Tangens-Teilung für Winkel zwischen 0,57° (34′) und 5,72° (5° 43′) ... 157
5.6.4. Die Teilung $\sqrt{1-x^2}$ (pythagoreische Teilung P) ... 160
5.6.5. Werte der Sinus- und Tangensfunktion für Winkel unter 0,57° (34′) ... 161
5.6.6. Werte der Sinusfunktion für Winkel über 84,28° (84° 17′) ... 162
5.6.7. Komplexe Zahlen ... 164
5.6.8. Die Gleichungen $\frac{1}{a^2} \pm \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c^2}$ und $\frac{1}{a} \pm \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$ 169
5.6.9. Zusammenfassung ... 172
5.7. Logarithmen ... 173
5.7.1. Dekadische Logarithmen ... 173
5.7.2. Natürliche Logarithmen ... 178
5.7.3. Natürliche Exponentialfunktion ... 179

5.7.4 Nochmals natürliche Logarithmen ... 189
5.7.5. Potenzen und Wurzeln mit anderen Exponenten als 2 oder 3 ... 193
5.7.5.1. Potenzen und Wurzeln mit den Exponenten 10 und 100 ... 193
5.7.5.2. Pozenten mit beliebigem Exponenten ... 198
5.7.5.3. Wurzeln mit beliebigem Exponenten ... 205
5.7.5.4. Vereinigtes Potenzieren und Radizieren mit beliebigem Exponenten ... 209
5.7.5.5. Logarithmieren mit beliebiger Basis ... 210
5.8. Hyperbelfunktionen ... 211
5.9. Verwendung der versetzten Teilungen CF, DF und CIF ... 217
5.10. Rechnen mit festen Marken ... 221
5.10.1. Feste Marken auf Stabkörper und Zunge ... 221
5.10.1.1. Feste Marke π ... 221
5.10.1.2. Feste Marke ϱ' für Winkelminuten ... 221
5.10.1.3. Feste Marke ϱ'' für Winkelsekunden ... 222
5.10.1.4. Feste Marke $\varrho_{,,}$ für Neusekunden ... 223
5.10.1.5. Feste Marke C ... 224
5.10.1.6. Feste Marke C_1 ... 224
5.10.1.7. Feste Marke M ... 225
5.10.2. Feste Marken auf dem Läufer ... 225
5.10.2.1. Feste Läufermarke für die Kreisberechnung ... 227
5.10.2.2. Läufermarken zur Umrechnung von PS in kW ... 228

6. *Auswahl des richtigen Rechenstabes* ... 229

7. *Anhang* ... 233
7.1. Bestimmung der Größenordnung ... 233
7.2. Die beim Rechenstab erzielbare Genauigkeit ... 235
7.3. Zur Geschichte des Rechenstabes ... 236

Lösungen der Übungsaufgaben ... 238

Beilagen

Tafel 1: Übersicht der wichtigsten Stabeinstellungen
Tafel 2: Zusammenfassung zu den trigonometrischen Funktionen
Tafel 3: Beziehungen zwischen den Teilungen beim Rechenstab „Darmstadt“

1. Anwendungsmöglichkeiten des Rechenstabes

Heute ist der Rechenstab zu einem Rechenhilfsmittel der Facharbeiter und Schüler, der Ingenieure und Wissenschaftler geworden, das kaum noch wegzudenken ist.
Der Rechenstab ist ein Hilfsmittel. Er kann aber nicht das selbständige Denken und einiges Kopfrechnen ersetzen. Im Gegenteil, es ist ein Mitrechnen, vor allem bei der Bestimmung der Größenordnung des Ergebnisses, notwendig. Das fördert gleichzeitig die Kritikfähigkeit und hebt über ein mechanisches Rechnen hinaus. Es ergibt sich die Frage, welche Rechnungen mit dem Rechenstab ausführbar sind.
Um es vorwegzunehmen, es sind fast alle Rechnungen außer der der Addition und der Subtraktion möglich, wenn auch für manche Zwecke spezielle Rechenstäbe notwendig sind. Früher waren mit den einfachen Rechenstäben nur die Multiplikation und die Division durchführbar. Jetzt sind die Rechenstäbe viel weiter entwickelt. So kann man z. B. durch die Hinzunahme von Skalen, die die Quadrate der Grundskalen enthalten, Quadrate und Wurzeln von Zahlen in die Rechnung einbeziehen. Durch den weiteren Ausbau der Rechenstäbe lassen sich Kubikzahlen und Kubikwurzeln ausrechnen, und mit Hilfe der Logarithmen-Skalen sind dann alle Potenzbildungen möglich. Wesentlich ist, daß die Rechenstäbe auch Skalen für die trigonometrischen Funktionen enthalten. Damit können fast alle trigonometrischen Berechnungen ausgeführt werden.
Die heutigen Rechenstäbe in ihrer einfachsten Art, zu denen jetzt auch das System „Rietz“ gehört, ermöglichen mithin fast alle praktischen Zahlenrechnungen, wenn es sich nicht um Addition oder Subtraktion handelt. Das Aufstellen von Tabellen, die Berechnung von Nomogrammen und Funktionswerten sind genauso möglich wie das Rechnen mit dem Sinussatz. Große Rechnungen mit mehrfachen Produktbildungen, Divisionen, Potenzierungen und Wurzelziehen sind schnell und sicher ausführbar. Dabei hat man gegenüber der Logarithmentafel, die man sonst zu solchen Rechnungen heranziehen müßte, große Vorteile, weil man schneller und häufiger ohne Zwischenrechnung arbeiten kann. Die Genauigkeit der Rechnung ist

gegenüber der mit einer vierstelligen Logarithmentafel nur unwesentlich kleiner und reicht für die praktischen Bedürfnisse meist aus. Bei einiger Übung haben die Rechnungen mit einem Rechenstab von 25 cm Länge einen relativen Fehler von höchstens 1%.
Die weiterentwickelten Rechenstäbe nach dem System „Darmstadt“ haben noch Skalen für e^x, $e^{0,1x}$ und $e^{0,01x}$ erhalten und Rechenstäbe nach dem System „Duplex“ sogar noch die Teilungen $e^{0,001x}$, e^{-x}, $e^{-0,1x}$, $e^{-0,01x}$ und $e^{-0,001x}$. Hat der Rechenstab gar noch eine Skale für $\sqrt{1-x^2}$, dann sind fast alle Rechnungen, die Konstrukteure, Ingenieure, Elektrotechniker, Mathematiker und Physiker auszuführen haben, möglich geworden. Hochfrequenz- und Fernmeldetechniker werden Rechenstäbe bevorzugen, die außer diesen Skalen für die Exponentialfunktion noch solche für Hyperbelfunktionen sinh x und tanh x tragen, wie etwa der „Duplex“. Aber auch für andere Berufe, Kaufleute, Maschinenbauer, Elektriker, sind Spezialrechenstäbe entwickelt worden, auf die hier nicht in allen Einzelheiten eingegangen werden kann.
Wer mit dem Rechenstab arbeiten will, wird sich zunächst einen Rechenstab nach dem System „Rietz“ oder „Darmstadt“ anschaffen. Findet er später, daß sein Rechenstab seinen Ansprüchen nicht mehr genügt, dann kann er sich immer noch einen Spezialrechenstab für seinen Beruf zulegen.
Beim Erlernen des Stabrechnens sollte man das Buch durcharbeiten, die Aufgaben mit dem eigenen Rechenstab nachrechnen und mit den Bildern vergleichen. Man lasse sich aber nicht von der scheinbaren Fülle der Rechenmöglichkeiten abschrecken. Es werden zwar viele Wege gezeigt. Im Grunde sind es immer nur wenige Grundregeln, die bei richtiger Anwendung, aber nicht beim mechanischen Auswendiglernen (!), zum Beherrschen und vollen Ausnutzen aller Möglichkeiten des Rechenstabes führen. Zur Erleichterung ist im Anhang ein Schema der wichtigsten Rechenoperationen beigefügt.

2. Mathematische Grundlagen des Rechenstabes

Das Rechnen mit dem Rechenstab ist auf den Gesetzen der Logarithmenrechnung aufgebaut. Deshalb wird der Rechenstab auch gelegentlich logarithmischer Rechenstab genannt. Um auf sicheren Kenntnissen aufbauen zu können, werden in diesem Abschnitt zunächst die Potenzrechnung und dann die Logarithmenrechnung soweit zusammenfassend dargestellt, wie sie für das Verstehen des Rechenstabrechnens notwendig sind. Wer glaubt, auf die Wiederholung der Potenzgesetze verzichten zu können, mag in 2.3. über das Logarithmieren weiterlesen. Wer nur eine Gebrauchsanweisung für den Rechenstab sucht, kann seine Lektüre beim Abschnitt 4. beginnen.

2.1. Potenzieren

Ein Produkt aus mehreren gleichen Faktoren schreibt man vereinfacht in einem Symbol, der *Potenz*. Für diese Potenzen gelten besondere Rechenregeln. Das Rechnen mit Potenzen nennt man die Potenzrechnung.

2.1.1. Potenz

Kennt man die Kantenlänge einer quadratischen Tischplatte, dann errechnet man deren Größe, indem man die Länge der einen Kante mit der der anderen malnimmt. Man sagt auch, daß man das Quadrat der Kantenlänge bildet. Ist diese beispielsweise $a = 1{,}2$ m, dann berechnet man die Fläche A zu

$$A = a \cdot a = a^2 = 1{,}2\ \mathrm{m} \cdot 1{,}2\ \mathrm{m} = 1{,}2^2\ \mathrm{m}^2 = 1{,}44\ \mathrm{m}^2.$$

Man bildet die zweite Potenz von a.
Ist $a = 1{,}2$ m die Kante eines würfelförmigen Wasserbehälters, dann errechnet man dessen Volumen V zu

$$V = a \cdot a \cdot a = a^3 = 1{,}2\ \mathrm{m} \cdot 1{,}2\ \mathrm{m} \cdot 1{,}2\ \mathrm{m} = 1{,}2^3\ \mathrm{m}^3 = \\ = 1{,}728\ \mathrm{m}^3.$$

Man bildet die dritte Potenz von a.

Zur besseren Verständigung hat man in der Potenzrechnung folgende Bezeichnungen festgelegt:
Die Zahl, die immer wieder als Faktor auftritt, in unseren Beispielen a, nennt man die *Basis* oder die Grundzahl. Die hochgestellte Zahl, die angibt, wie oft die Basis als Faktor zu setzen ist, heißt der *Exponent* oder die Hochzahl, und das Ergebnis dieser Rechnung ist der *Potenzwert.*
Man berechnet den Inhalt quadratischer Flächen aus der Kantenlänge durch das Bilden der zweiten Potenz oder des Quadrates und den Rauminhalt eines Würfels durch die dritte Potenz oder den Kubus. Natürlich sind damit die Möglichkeiten der Potenzrechnung noch nicht erschöpft, wenn auch die geometrische Deutung einer noch höheren Potenz in unserer Umwelt nicht möglich ist.
Zunächst einmal sollen als Exponenten alle natürlichen Zahlen größer als 0 zugelassen werden. Unter a^n, der n-ten Potenz von a, soll verstanden werden, daß die positive Basis a ($a > 0$) genau n-mal als Faktor zu setzen ist. Man definiert

$$a^1 = a \quad \text{und} \quad a^n = a^{n-1} \cdot a,$$

wenn n eine natürliche Zahl größer 1 ($n > 1$) ist. So sind z. B.

$$a^4 = a^3 \cdot a = (a \cdot a \cdot a) \cdot a = a \cdot a \cdot a \cdot a$$
$$a^7 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$$
$$b^9 = b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b.$$

2.1.2. Addition und Subtraktion von Potenzen

Die Addition und Subtraktion von Potenzen läßt sich in gewissen Fällen durch das Distributivgesetz noch zusammenfassen, indem man die größte gemeinsame Potenz ausklammert.

BEISPIELE

1. $3^2 + 3^2 = 2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 9 = \underline{\underline{18}}$
2. $5^4 - 5^3 + 5^5 = 5^3\,(5 - 1 + 5^2) = 5^3\,(4 + 25) = \underline{\underline{29 \cdot 5^3}}$
3. $b^c + b^c + b^c + b^c - b^c = \underline{\underline{3 \cdot b^c}}$

2.1.3. Multiplikation von Potenzen mit gleichen Basen

Sollen verschiedene Potenzen mit gleichen Basen miteinander multipliziert werden, dann schreibt man sie zunächst als Produkte. Soll z. B. das Produkt $3^2 \cdot 3^3$ berechnet werden, so schreibt man

$$3^2 \cdot 3^3 = (3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3) =$$
$$= 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5 = 3^{2+3}.$$

Wir erkennen, daß bei der Multiplikation die Exponenten addiert wurden, und merken uns:

> Potenzen gleicher Basis werden multipliziert durch Addition der Exponenten. Die Summe der Exponenten ist der Exponent des Produktes bei gleicher Basis.

BEISPIELE

4. $a^3 \cdot a^2 \cdot a^4 = a^{3+2+4} = \underline{\underline{a^9}}$
5. $b^c \cdot b^d = \underline{\underline{b^{c+d}}}$

2.1.4. Potenzieren von Potenzen

Soll eine Potenz potenziert werden, so schreibt man zunächst dafür ein Produkt aus Potenzen und erkennt wie bei

$$(3^4)^2 = 3^4 \cdot 3^4 = 3^{4+4} = 3^{(2 \cdot 4)} = 3^8,$$

daß die Exponenten multipliziert worden sind. Wir merken uns:

> Potenzen werden potenziert durch die Multiplikation der Exponenten bei gleicher Basis.

BEISPIELE

6. $(2^3)^5 = 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 = \underline{\underline{2^{15}}}$
7. $(a^4)^4 = a^4 \cdot a^4 \cdot a^4 \cdot a^4 = \underline{\underline{a^{16}}}$

2.1.5. Division von Potenzen mit gleichen Basen

Potenzen mit gleichen Basen, die dividiert werden sollen, schreibt man zweckmäßig zunächst in Form von Produkten als Zähler bzw. Nenner eines Bruches und kürzt.

$$\frac{3^5}{3^3} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3} = 3 \cdot 3 = 3^2$$

Man erkennt, daß der Exponent des Quotienten sich aus einer Subtraktion der Exponenten ergibt. Wir merken uns:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \qquad \text{wenn } m > n$$

und $$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}, \qquad \text{wenn } m < n.$$

Die Begründung für die Behandlung des zweiten Falles wird im nächsten Abschnitt gegeben.

BEISPIELE

8. $\frac{2^7}{2^3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{7-3} = \underline{\underline{2^4}}$

9. $\frac{b^3}{b^6} = \frac{b \cdot b \cdot b}{b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b} = \frac{1}{b \cdot b \cdot b} = \frac{1}{b^{6-3}} = \underline{\underline{\frac{1}{b^3}}}$

2.1.6. Erste Erweiterung des Potenzbegriffes

Damit die Division von Potenzen mit gleichen Basen auch dann durchführbar ist, wenn im Zähler (Dividend) eine niedrigere Potenz als im Nenner (Divisor) steht, muß der Potenzbegriff, für den bisher als Exponenten nur natürliche Zahlen größer als 0 zugelassen waren, erweitert werden. Haben wir

$$\frac{3^4}{3^6} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{3 \cdot 3} = \frac{1}{3^2}$$

zu rechnen, dann ist dafür folgende Schreibweise vereinbart worden:

$$\frac{1}{3^2} = 3^{-2}.$$

Eine Potenz mit negativem Exponenten ist definiert als der Kehrwert der entsprechenden Potenz mit positivem Exponenten. Für Exponenten $n \geqq 1$ gilt immer

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{und} \quad \frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{1/a^n} = a^n$$

BEISPIELE

10. $5^4 \cdot 5^{-2} = \frac{5^4}{5^2} = 5^2 = \underline{\underline{25}}$

11. $\frac{a^5}{a^{-2}} = a^5 \cdot a^2 = \underline{\underline{a^7}}$

Nunmehr kann für die Division von Potenzen mit gleichen Basen allgemein gesagt werden:

> Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem man den Exponenten des Divisors vom Exponenten des Dividenden subtrahiert und die gemeinsame Basis beibehält.

Um die Ausnahme $n = 0$ zu beseitigen, definiert man noch

$$a^0 = 1 \quad \text{für} \quad a > 0, \quad \text{so daß}$$

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ für alle ganzzahligen Exponenten erfüllt ist.

2.1.7. Multiplikation und Division von Potenzen mit gleichen Exponenten, aber ungleichen Basen

Schließlich soll noch hinzugefügt werden, daß die Umformung von Produkten von Potenzen mit gleichen Exponenten auch dann möglich ist, wenn die Basen ungleich sind. Man rechnet

$$\begin{aligned} 2^4 \cdot 5^4 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = \\ &= (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) = \\ &= (2 \cdot 5)^4 = 10^4 = 10000 \end{aligned}$$

oder

$$\frac{9^5}{3^5} = \frac{9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \left(\frac{9}{3}\right)^5 = 3^5 = 243.$$

Wir merken uns:

> Potenzen mit gleichen Exponenten werden multipliziert, indem man das Produkt der Basen mit dem gemeinsamen Exponenten potenziert.
> Potenzen mit gleichen Exponenten werden dividiert, indem man ihre Basen dividiert und den so erhaltenen Quotienten mit dem Exponenten potenziert.

BEISPIELE

12. $a^3 \cdot b^{-3} = \frac{a^3}{b^3} = \underline{\underline{\left(\frac{a}{b}\right)^3}}$

13. $\frac{3^5}{2^4} = 3 \cdot \frac{3^4}{2^4} = \underline{\underline{3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^4}}$

2.2. Radizieren

Beim Potenzieren wurde aus einer Basis mit dem Exponenten die Potenz gebildet. Aus einer Seitenlänge eines Quadrates errechnet man dessen Flächeninhalt, als die zweite Potenz der Länge. Beim Radizieren (Wurzelziehen) ist die Fragestellung gerade umgekehrt. So soll z. B. aus dem Flächeninhalt eines Quadrates oder dem Rauminhalt eines Würfels die Seiten- bzw. Kantenlänge berechnet werden. Jetzt sind der Potenzwert und der Exponent gegeben, und die zugehörige Basis wird gesucht.

2.2.1. Wurzeln

Ist von der quadratischen Tischplatte die Fläche $A = 1{,}44\ \mathrm{m}^2$ bekannt, dann errechnet man die Kantenlänge a durch folgende Rechnung:

$$a = \sqrt[2]{A} = \sqrt{1{,}44\ \mathrm{m}^2} = 1{,}2\ \mathrm{m}.$$

Wir erkennen, daß das Ziehen der Quadratwurzel oder der zweiten Wurzel genau die Umkehrung des Quadrierens oder des Bildens der zweiten Potenz ist. Rechneten wir in 2.1.1.

$$A = a \cdot a = a^2, \text{ so rechnen wir jetzt } a = \sqrt[2]{A}.$$

Der Wurzelexponent gibt an, in welche Potenz der Wurzelwert erhoben werden muß, damit der Potenzwert gleich dem Wert des Radikanden wird. Der hochgestellte Wurzelexponent soll dabei angeben, welche Potenz umgekehrt werden soll. Ist nämlich das Volumen eines Würfels bekannt, dann ist seine Kantenlänge

$$a = \sqrt[3]{V}, \text{ beim obigen Beispiel } a = \sqrt[3]{1{,}728 \text{ m}^3} = 1{,}2 \text{ m}.$$

Hier wurde nicht die Quadratwurzel gezogen, sondern die dritte Wurzel oder Kubikwurzel, denn beim Berechnen des Volumens wurde ja die dritte Potenz gebildet.
Allgemein kann die n-te Wurzel definiert werden:

> Unter der n-ten Wurzel aus der positiven Zahl b versteht man diejenige nicht negative Zahl a, deren n-te Potenz gleich der Zahl b ist. Man schreibt:
>
> $\sqrt[n]{b} = a$ genau dann, wenn $a^n = b$ mit $a > 0$ ist.

Bei der zweiten Wurzel wird zur Vereinfachung der Wurzelexponent weggelassen, wenn kein Mißverständnis möglich ist.
Auch bei den Wurzeln ist eine geometrische Deutung für $n > 3$ nicht möglich.

BEISPIELE

14. $\sqrt[2]{64} = \sqrt{64} = \underline{\underline{8}}$, da $8^2 = 64$
15. $\sqrt[3]{125} = \underline{\underline{5}}$, da $5^3 = 125$
16. $\sqrt[4]{16} = \underline{\underline{2}}$, da $2^4 = 16$
17. $\sqrt[5]{32} = \underline{\underline{2}}$, da $2^5 = 32$

2.2.2. Zweite Erweiterung des Potenzbegriffes

Damit der Potenzbegriff noch umfassender als bisher verwendet werden kann, ist es zweckmäßig, seine Bedeutung über das bisher Gesagte hinaus zu erweitern. Wir setzen fest als Umkehrung von $a^n = b$:

$$a = \sqrt[n]{b} = b^{1/n}.$$

Wegen $b = a^n$ und weil für positive a gilt

$$\sqrt[m]{a^n} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n = a^{n/m},$$

folgt dann nämlich

$$b^{1/n} = (a^n)^{1/n} = a^{n/n} = a^1 = a,$$

also $\qquad \sqrt[n]{b} = a.$

Ist nun b eine Potenz von c, also $b = c^m$, dann wird festgesetzt, daß

$$a = \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{c^m} = c^{m/n}.$$

Wir merken uns:

> Eine Potenz mit gebrochenem Exponenten ist gleichbedeutend mit einem Wurzelausdruck. Hierbei wird die Basis zum Radikanden, der Zähler des Exponenten zum Exponenten des Radikanden und der Nenner des Exponenten zum Wurzelexponenten.

BEISPIELE

18. $\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5^{3/3} = 5^1 = \underline{\underline{5}}$
19. $\sqrt[4]{36} = \sqrt[4]{6^2} = 6^{2/4} = 6^{1/2} = \underline{\underline{\sqrt{6}}}$
20. $\sqrt[5]{4} = \sqrt[5]{2^2} = 2^{2/5} = 2^{0{,}4} = 2^{1/2{,}5} = \underline{\underline{\sqrt[2{,}5]{2}}}$
21. $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^4} = 2^{4/3} = 2^{1+1/3} = 2^1 \cdot 2^{1/3} = \underline{\underline{2\sqrt[3]{2}}}$

Ohne Beweis sei noch bemerkt, daß auch für rationale Exponenten p und q gilt

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q} \quad \text{und} \quad (a^p)^q = a^{p \cdot q}.$$

2.2.3. Zusammenfassung

Bei einer Potenz gibt der Exponent an, wievielmal die positive Basis a als Faktor zu setzen ist, sofern der Exponent eine natürliche Zahl größer als 1 ist. Ferner gilt $a^0 = 1$ und $a^1 = a$.
Treten bei der Potenz negative Exponenten auf, dann bedeutet das den Kehrwert derselben Potenz mit positiven Exponenten.

Treten bei einer Potenz gebrochene Exponenten $\frac{m}{n}$ auf, dann ist die n-te Wurzel aus a^m zu ziehen. Bei Potenzen mit gleichen Basen wird aus einer Multiplikation der Potenzen eine Addition der Exponenten, aus einer Division der Potenzen eine Subtraktion der Expo-

nenten. Bei der Potenzierung der Potenzen ist eine Multiplikation der Exponenten und bei einer Radizierung der Potenzen eine Division der Exponenten vorzunehmen.
Es gelten:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad a^m : a^n = a^{m-n}$$
$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} \qquad \sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$$

außerdem

$$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m \qquad a^m : b^m = (a : b)^m$$

Dabei gelten diese Gesetze auch, wenn die Exponenten m und n rationale Zahlen sind.

2.3. Logarithmieren

Beim Potenzieren rechnet man

$$b = a^n.$$

Aus der Basis und dem Exponenten wird der Potenzwert bestimmt.
Beim Radizieren rechnet man

$$a = \sqrt[n]{b}.$$

Aus dem Potenzwert und dem Exponenten wird die Basis bestimmt
Jetzt wird der Exponent n gesucht, der mit der Basis a den Potenzwert b ergibt, so daß $b = a^n$ wird. Man schreibt dafür

$$n = \log_a b$$

und sagt:

n ist der Logarithmus von b zur Basis a.

Bei der Logarithmenrechnung ist eine vom Früheren abweichende Bezeichnung üblich. Den Potenzwert b nennt man hier Numerus (lat. Zahl). Er soll in Zukunft mit N bezeichnet werden. Der Exponent n wird hier Logarithmus (griech. Verhältniszahl) genannt. Es ist üblich, Logarithmen zur Basis 10 als dekadische oder Briggssche Logarithmen zu bezeichnen und als Symbol lg zu verwenden, während die Logarithmen zur Basis e = 2,71828 ... als natürliche oder Nepersche Logarithmen bezeichnet und mit dem Symbol ln gekennzeichnet werden.
Beim Logarithmieren wird nach der Größe des Exponenten n gefragt, durch den die Gleichung

$$N = a^n$$

erfüllt wird. Dieser Exponent n wird der Logarithmus zur Basis a genannt und durch die Gleichung

$$n = \log_a N$$

bestimmt.

Er läßt sich für jede positive Zahl N und jede positive Basis a beliebig genau durch eine rationale Zahl annähern.
Beim Potenzieren rechnet man

$$2^3 = 8 \qquad 10^2 = 100 \qquad e^4 = (2{,}71828\ldots)^4 \approx 54{,}6.$$

Der Zusammenhang der drei Größen a, N und n ist beim Radizieren gegeben durch

$$\sqrt[3]{8} = 2 \qquad \sqrt[2]{100} = 10 \qquad \sqrt[4]{54{,}6} \approx e \approx 2{,}71828.$$

Beim Logarithmieren schreibt man nun

$$\log_2 8 = 3 \qquad \lg 100 = 2 \qquad \ln 54{,}6 = 4.$$

Zur Festigung der neuen Begriffe seien noch drei Beispiele angeführt.

BEISPIELE

22. Wie lautet der Logarithmus n zum Numerus $N = 9$ und zur Basis $a = 3$?
Es gelten die drei Gleichungen

$$N = a^n \qquad a = \sqrt[n]{N} \qquad n = \log_a N$$
$$9 = 3^n \qquad 3 = \sqrt[n]{9} \qquad n = \log_3 9.$$

Man erkennt, daß alle drei Gleichungen die eine Lösung

$$\underline{\underline{n = 2}}$$

haben. Der Logarithmus von 9 zur Basis 3 ist 2, da $3^2 = 9$ ist.

23. Wie groß ist die Basis a zum Numerus $N = 81$ und zum Logarithmus $n = 4$?
Aus

$$N = a^n \qquad a = \sqrt[n]{N} \qquad n = \log_a N$$
$$81 = a^4 \qquad a = \sqrt[4]{81} \qquad 4 = \log_a 81$$

ergibt sich als einzige Lösung

$$\underline{\underline{a = 3}}, \quad \text{da } 3^4 = 81 \text{ ist.}$$

Die Basis, die den Numerus 81 mit dem Logarithmus 4 verbindet, ist 3.

24. Es seien $a = 5$ und $n = 3$ gegeben. Wie groß ist der Numerus N?

$$N = a^n \qquad a = \sqrt[n]{N} \qquad n = \log_a N$$
$$N = 5^3 \qquad 5 = \sqrt[3]{N} \qquad 3 = \log_5 N$$

ergeben die Lösung $\underline{\underline{N = 125}}$, da $5^3 = 125$ ist.
Der Numerus des Logarithmus 3 zur Basis 5 ist 125.

2.3.1. Logarithmen zur Basis 2

Es erhebt sich die Frage, warum mit Logarithmen gerechnet wird. Nach der Zusammenfassung in 2.2.3. verspricht ihre Verwendung große Vorteile, weil sich dadurch verschiedene Rechenoperationen wesentlich vereinfachen.

Bevor das an einigen Beispielen gezeigt wird, soll mit der Basis $a = 2$ eine Tabelle für die Numeri bei verschiedenen Logarithmen aufgestellt werden:

Basis $a = 2$

Logarithmus n	Numerus N
0	$2^0 = 1$
1	$2^1 = 2$
2	$2^2 = 4$
3	$2^3 = 8$
4	$2^4 = 16$
5	$2^5 = 32$
6	$2^6 = 64$
7	$2^7 = 128$
8	$2^8 = 256$
9	$2^9 = 512$
10	$2^{10} = 1024$

In den folgenden Beispielen soll die Anwendung der Logarithmen beim Multiplizieren, Dividieren, Potenzieren und Radizieren untersucht werden. Dabei sind absichtlich einfache Zahlen gewählt worden.

BEISPIELE

25. Es soll gerechnet werden: $4 \cdot 32 = 128$.
Aus der Tabelle entnehmen wir $N_1 = 4 = 2^2$ und $N_2 = 32 = 2^5$. Die Rechnung lautet nun
$$4 \cdot 32 = 2^2 \cdot 2^5 = 2^{2+5} = 2^7 = \underline{\underline{128}}.$$
Hier wurden die Exponenten, also die Logarithmen der Numeri 4 und 32, addiert.
Man hätte auch schreiben können:
$$\log_2 4 = 2 \quad \log_2 32 = 5 \quad \log_2(4 \cdot 32) = 2 + 5 = 7.$$
Aus der Tabelle entnimmt man
$$2^7 = \underline{\underline{128}}.$$
Bei der Multiplikation werden die Logarithmen zur gleichen Basis addiert.

26. Es soll berechnet werden: $\frac{512}{16} = 32$.

In der Potenzschreibweise lautet die Rechnung
$$\frac{512}{16} = \frac{2^9}{2^4} = 2^{(9-4)} = 2^5 = \underline{\underline{32}}.$$
In der Logarithmenschreibweise ergibt sich
$$\log_2 512 = 9 \quad \log_2 16 = 4 \quad \log_2 \frac{512}{16} = 9 - 4 = 5.$$
In der Tabelle liest man ab
$$2^5 = \underline{\underline{32}}.$$
Bei der Division werden die Logarithmen zur gleichen Basis subtrahiert.

27. Es soll berechnet werden: $8^3 = 512$.
Potenzschreibweise:
$$8^3 = (2^3)^3 = 2^9 = \underline{\underline{512}}$$
Logarithmenschreibweise:
$$\log_2 8 = 3 \quad \log_2 8^3 = 3 \cdot \log_2 8 = 3 \cdot 3 = 9$$
Aus der Tabelle: $2^9 = \underline{\underline{512}}$.
Beim Potenzieren werden die Logarithmen mit dem Exponenten multipliziert.

28. Es soll berechnet werden: $\sqrt[3]{64} = 4$.
Potenzschreibweise:
$$\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{2^6} = 2^{6/3} = 2^2 = \underline{\underline{4}}$$
Logarithmenschreibweise:
$$\log_2 64 = 6 \quad \log_2 \sqrt[3]{64} = \frac{1}{3} \cdot \log_2 64 = \frac{6}{3} = 2$$
Aus der Tabelle: $\sqrt[3]{64} = 2^2 = \underline{\underline{4}}$
Beim Radizieren werden die Logarithmen durch den Wurzelexponenten dividiert.

Diese Beispiele beschränken sich zunächst auf solche Zahlen, bei denen die Logarithmen aus der Tabelle entnommen werden können. Es zeigt sich nun aber, daß zu jedem positiven Numerus eindeutig der Logarithmus zur Basis 2 angegeben werden kann. Das heißt, daß jedem positiven Numerus genau ein Logarithmus zugeordnet ist und daß es zu einem Logarithmus nur einen zugehörigen Numerus gibt.

Die Zahlen $N = 0{,}5$; $N = 0{,}25$; $N = 0{,}125$ haben bezüglich der Basis 2 negative Exponenten, denn es gilt

$$2^{-1} = \frac{1}{2^{+1}} = \frac{1}{2} = 0{,}5 \qquad 2^{-2} = \frac{1}{2^{+2}} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

$$2^{-3} = \frac{1}{2^{+3}} = \frac{1}{8} = 0{,}125\,.$$

Wir erkennen:

> Die Logarithmen zur Basis 2 von Numeri, die kleiner als 1 sind, sind negativ.

Ergänzt man die Tabelle, die bisher nur positive Logarithmen enthielt, durch

Basis $a = 2$

Logarithmus n	Numerus N
-1	$2^{-1} = 0{,}5$
-2	$2^{-2} = 0{,}25$
-3	$2^{-3} = 0{,}125$

und trägt die Numeri auf der waagerechten Achse und die zugehörenden Logarithmen auf der vertikalen Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems ab, dann kann man mit hinreichender Genauigkeit das Bild für $n = \log_2 N$ (Bild 1) zeichnen.

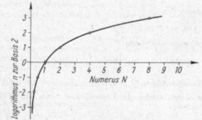


Bild 1

Aus dieser graphischen Darstellung der Funktion zwischen den Numeri N und den Logarithmen n zur Basis $a = 2$ lassen sich jetzt alle Zwischenwerte ablesen. Die Genauigkeit hängt natürlich von der Güte der Zeichnung ab.

Man kann zu jedem Numerus N den zugehörenden Logarithmus n aufsuchen, wenn man vom Numerus auf der horizontalen Achse senkrecht nach oben zur Kurve und von dort waagerecht zur vertikalen Achse geht.
Den Numerus zu einem Logarithmus findet man, wenn man den eben angegebenen Weg in der umgekehrten Richtung geht (Bild 2).

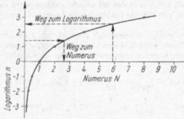


Bild 2

Auf weitere Rechenbeispiele soll verzichtet werden, da die Logarithmen zur Basis 2 nur der Einführung in den Logarithmenbegriff dienen sollten.

Wir fassen aber nochmals zusammen:

Sind $a = 2^m$ und $b = 2^n$, also $m = \log_2 a$ und $n = \log_2 b$, dann sind folgende Rechengesetze gültig:

Multiplikation:

$$a \cdot b = 2^m \cdot 2^n = 2^{m+n} \qquad \log_2 (a \cdot b) = \log_2 a + \log_2 b = m + n$$

Division:

$$\frac{a}{b} = \frac{2^m}{2^n} = 2^{m-n} \qquad \log_2 \left(\frac{a}{b}\right) = \log_2 a - \log_2 b = m - n$$

Potenz:

$$a^p = (2^m)^p = 2^{mp} \qquad \log_2 (a^p) = p \cdot \log_2 a = pm$$

Wurzel:

$$\sqrt[q]{a} = (2^m)^{1/q} = 2^{m/q} \qquad \log_2 \left(\sqrt[q]{a}\right) = \frac{1}{q} \cdot \log_2 a = \frac{m}{q}$$

2.3.2. Logarithmen zur Basis 10, dekadische Logarithmen

Wenn man das Wesen der Logarithmen auch an den Zweierlogarithmen gut erkennen kann, so haben diese doch in der Praxis nur für spezielle Rechnungen Bedeutung. Die in den Logarithmentafeln enthaltenen Logarithmen haben die Basis $a = 10$ und werden deshalb „Dekadische Logarithmen" oder „BRIGGSsche Logarithmen" genannt. Da sie sich gut in das dekadische Zahlensystem eingliedern lassen, ergeben sich für das praktische Rechnen viele Vereinfachungen.

Es war bereits gezeigt worden, daß Logarithmen Exponenten sind. Da die Basis 10 ist, handelt es sich also um Zehnerpotenzen, die nachfolgend in einer Auswahl zusammengestellt seien. Es gilt:

$$0{,}0001 = \frac{1}{10000} = \frac{1}{10^4} = 10^{-4} \qquad \log_{10} 0{,}0001 = -4$$

$$0{,}001 = \frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3} = 10^{-3} \qquad \log_{10} 0{,}001 = -3$$

$$0{,}01 = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2} \qquad \log_{10} 0{,}01 = -2$$

$$0{,}1 = \frac{1}{10} = \frac{1}{10^1} = 10^{-1} \qquad \log_{10} 0{,}1 = -1$$

$$\begin{aligned} 1 &= 10^0 & \log_{10} 1 &= 0\\ 10 &= 10^1 & \log_{10} 10 &= 1\\ 100 &= 10^2 & \log_{10} 100 &= 2\\ 1000 &= 10^3 & \log_{10} 1000 &= 3\\ 10000 &= 10^4 & \log_{10} 10000 &= 4 \end{aligned}$$

Rechts neben den Zehnerpotenzen stehen die Zehnerlogarithmen, denn diese sind ja den Exponenten gleich.

Aus dieser Aufstellung ist zu ersehen:

Die Logarithmen der Numeri zwischen 1 und 10 liegen zwischen 0 und 1 und die der Numeri zwischen 10 und 100 zwischen 1 und 2. In Bild 3 ist der funktionale Zusammenhang zwischen den Numeri von 1 bis 100 und den Logarithmen zur Basis 10 dargestellt. Als Zwischenwerte sind bei der Zeichnung verwendet worden

$$\log_{10} 1 = 0 \qquad \log_{10} 2 = 0{,}30 \qquad \log_{10} 7 = 0{,}84$$
$$\log_{10} 10 = 1 \qquad \log_{10} 20 = 1{,}30 \qquad \log_{10} 70 = 1{,}84$$
$$\log_{10} 100 = 2$$

Die Darstellung ist dem Bilde 1 entsprechend, nur daß jetzt die Basis $a = 10$ ist.

Einer genauen Zeichnung des Bildes 3 entnehmen wir:

$$\log_{10} 1 = 0{,}000 \qquad \log_{10} 4 = 0{,}602 \qquad \log_{10} 7 = 0{,}845$$
$$\log_{10} 2 = 0{,}301 \qquad \log_{10} 5 = 0{,}699 \qquad \log_{10} 8 = 0{,}903$$
$$\log_{10} 3 = 0{,}477 \qquad \log_{10} 6 = 0{,}778 \qquad \log_{10} 9 = 0{,}954$$

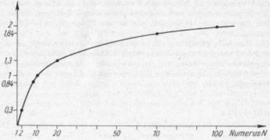


Bild 3

Genauer und vollständiger hätten wir natürlich die Werte für die Logarithmen aus einer Tafel entnehmen können, wie sie auf Seite 29 auszugsweise wiedergegeben ist.

Da die Schreibweise $\log_{10} N$ umständlich ist, soll von jetzt an die in TGL 0-1302 festgesetzte Schreibweise der Zehnerlogarithmen $\lg N$ verwendet werden.

Betrachten wir nochmals $\lg 20 = 1{,}301$ und $\lg 70 = 1{,}845$! Beide Werte ergeben sich erwartungsgemäß, denn nach den für die Logarithmen geltenden Rechengesetzen ist

$$\lg 20 = \lg (2 \cdot 10) = \lg 2 + \lg 10 = 0{,}301 + 1 = 1{,}301$$

und

$$\lg 70 = \lg (7 \cdot 10) = \lg 7 + \lg 10 = 0{,}845 + 1 = 1{,}845.$$

Weiterhin ergeben sich

$$\lg 200 = \lg 2 + \lg 100 = 0{,}301 + 2 = 2{,}301$$
$$\lg 7000 = \lg 7 + \lg 1000 = 0{,}845 + 3 = 3{,}845$$
$$\lg 20000 = \lg 2 + \lg 10000 = 0{,}301 + 4 = 4{,}301 \text{ usw.}$$

Wir erkennen eine wichtige Eigenschaft der dekadischen Logarithmen. Um Logarithmen von Zahlen größer als 10 oder kleiner als 1 zu be-

stimmen, reicht die Kenntnis der Logarithmen für die Numeri zwischen 1 und 10 vollständig aus.
Man nennt diese Logarithmen *Mantissen*. Sie liegen zwischen 0,0 und 0,999 ...
Es fällt auf, daß die Logarithmen aller Numeri mit der gleichen Ziffernfolge dieselbe Mantisse haben und sich nur durch eine ganze Zahl, die zur Mantisse addiert wird, unterscheiden. Diese ganze Zahl nennen wir in Zukunft die Kennzahl des Logarithmus. Sie gibt den Exponenten der vom Numerus abspaltbaren Zehnerpotenz an.
Die Logarithmen setzen sich mithin aus Kennzahl und Mantisse zusammen.
Die Mantissen könnte man einer genau gezeichneten Kurve, die der in Bild 3 entspricht, entnehmen. Man wird sie aber einfacher in einer Logarithmentafel aufsuchen. Die Kennzahlen ergeben sich aus der vom Numerus abgespaltenen Zehnerpotenz. Ihr Logarithmus ist der Kennzahl gleich.

BEISPIELE

	Numerus	Numerus mit abgespaltener Zehnerpotenz	Mantisse	Kennziffer	lg
29.	9000000	$9 \cdot 10^6$	0,954	6	6,954
30.	800000	$8 \cdot 10^5$	0,903	5	5,903
31.	70000	$7 \cdot 10^4$	0,845	4	4,845
32.	6000	$6 \cdot 10^3$	0,778	3	3,778
33.	500	$5 \cdot 10^2$	0,699	2	2,699
34.	40	$4 \cdot 10^1$	0,602	1	1,602
35.	3	$3 \cdot 10^0$	0,477	0	0,477
36.	0,2	$2 \cdot 10^{-1}$	0,301	−1	0,301−1
37.	0,03	$3 \cdot 10^{-2}$	0,477	−2	0,477−2
38.	0,004	$4 \cdot 10^{-3}$	0,602	−3	0,602−3
39.	0,0005	$5 \cdot 10^{-4}$	0,699	−4	0,699−4
40.	0,00006	$6 \cdot 10^{-5}$	0,778	−5	0,778−5
41.	0,000007	$7 \cdot 10^{-6}$	0,845	−6	0,845−6

Durch die Kenntnis der Logarithmen der Zahlen zwischen 1 und 10 ist man in der Lage, die Logarithmen aller Zahlen zu bilden. Das ist

bei den dekadischen Logarithmen einfacher als bei anderen Logarithmensystemen. Für alle Zahlen mit gleicher Ziffernfolge sind die Logarithmen gleich bis auf die Kennzahl, die sich nach der Stellenzahl, nach der abspaltbaren Zehnerpotenz richtet.
Eine sichere Beherrschung der Zehnerpotenzen ist mithin Voraussetzung für die Bestimmung der Logarithmen. Vom Auswendiglernen irgendwelcher Regeln zur Bestimmung der Kennzahlen aus der Anzahl der Stellen vor dem Komma oder der Nullen vor der Ziffernfolge des Numerus wird abgeraten. Solche Methoden zwingen den Lernenden zum Einprägen von Regeln, die nur in loser Verbindung mit den Logarithmengesetzen stehen, und lassen den gesetzmäßigen Aufbau der Logarithmen nicht erkennen.
Erreicht werden muß, daß für jede Zahl der entsprechende Exponent der Zehnerpotenz, die abspaltbar ist, erkannt wird. Damit ist die Kennzahl des Logarithmus festgelegt. Die Logarithmentafeln enthalten nur die Mantissen als rationale Zahlen mit vorgegebener Genauigkeit in dezimaler Schreibweise. Bei den vierstelligen Logarithmentafeln sind sie auf 4 Stellen gerundet, bei den fünfstelligen Tafeln dagegen auf 5 Stellen.
Eine vierstellige einfache Logarithmentafel hat etwa folgende Aussehen:

Zahl				lg 1 bis lg 99						
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	—	0000	3010	4771	6021	6990	7782	8451	9031	9542
1	0000	0414	0792	1139	1461	1761	2041	2304	....	....
2	3010	3222	3424	3617	3802	3979	....	4314	....	....
3	4771	4914	5051	5185	5315	....	....	....	....	....
4	6021	6128	6232	6335	....	....	....	....	....	....
5	....	....	....	....	....					
6	....									
.	....									
.										

BEISPIELE

42. $\lg 22 = \lg 2{,}2 + \lg 10 = 0{,}3424 + 1 = \underline{\underline{1{,}3424}}$

43. $\lg 4200 = \lg 4{,}2 + \lg 10^3 = 0{,}6232 + 3 = \underline{\underline{3{,}6232}}$

44. $\lg 0{,}0016 = \lg 1{,}6 + \lg 10^{-3} = 0{,}2041 + (-3) = \underline{\underline{0{,}2041 - 3}}$

Wie man mit Logarithmen rechnet, soll nochmals an einigen Beispielen gezeigt werden.

BEISPIELE

45. $6 \cdot 7 = x \qquad \lg x = \lg 6 + \lg 7 =$

$$= 0{,}7782 + 0{,}8451 = 1{,}6233 = 1 + 0{,}6233$$
$$x = 10 \cdot 4{,}2 = \underline{\underline{42}}$$

Da die Mantissen bei der obenstehenden Tafel gerundet sind, ergibt sich beim Logarithmus des Ergebnisses in der letzten Stelle eine Abweichung, die wegen der Rundung unvermeidbar ist.

46. $\dfrac{340}{20} = x \qquad \lg x = \lg 340 - \lg 20 =$

$$= 2{,}5315 - 1{,}3010 = 1{,}2305 = 1 + 0{,}2305$$
$$x = 10 \cdot 1{,}7 = \underline{\underline{17}}$$

47. $(0{,}03)^3 = x \qquad \lg x = 3 \cdot \lg 0{,}03$

$$= 3 \cdot (0{,}4771 - 2) = 1{,}4313 - 6 =$$
$$= 0{,}4313 - 5$$
$$x = 10^{-5} \cdot 2{,}7 = \underline{\underline{0{,}000027}}$$

48. $\sqrt{16} = x \qquad \lg x = \dfrac{1}{2} \cdot \lg 16$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1{,}2041 = 0{,}6021$$
$$x = \underline{\underline{4}}$$

49. $\dfrac{250 \cdot 0{,}03}{0{,}0005} \qquad \lg x = \lg 250 + \lg 0{,}03 - \lg 0{,}0005 =$

$$= 2{,}3979 + (0{,}4771 - 2) - (0{,}6990 - 4) =$$
$$= 4{,}1760 = 4 + 0{,}1760$$
$$x = 10000 \cdot 1{,}5 = \underline{\underline{15000}}$$

Zum Abschluß sollen die vier Grundrechenregeln mit Logarithmen noch einmal zusammengestellt werden.
Wenn $a = 10^m$ und $b = 10^n$, also $m = \lg a$ und $n = \lg b$ sind, dann gelten

Potenzrechnung	*Logarithmische Rechnung*
1. $a \cdot b = 10^m \cdot 10^n = 10^{m+n}$	$\lg (a \cdot b) = \lg a + \lg b = m + n$
2. $\dfrac{a}{b} = \dfrac{10^m}{10^n} = 10^{m-n}$	$\lg \dfrac{a}{b} = \lg a - \lg b = m - n$
3. $a^p = (10^m)^p = 10^{mp}$	$\lg a^p = p \cdot \lg a = pm$
4. $\sqrt[q]{a} = \sqrt[q]{10^m} = 10^{m/q}$	$\lg \sqrt[q]{a} = \dfrac{\lg a}{q} = \dfrac{m}{q}$

2.3.3. Logarithmen zur Basis e, natürliche Logarithmen

Der Vollständigkeit halber soll hier noch erwähnt werden, daß noch ein drittes Logarithmensystem von Bedeutung ist. In der höheren Mathematik wird vielfach mit sogenannten natürlichen Logarithmen gerechnet, weil sie viele Rechnungen besonders einfach gestalten. Diese natürlichen Logarithmen oder auch NEPERschen Logarithmen haben als Basis eine Zahl $e = 2{,}71828\ldots$, die ein unendlicher nichtperiodischer Dezimalbruch ist.
In 5.7.2. und 5.7.4. wird näher auf diese Logarithmen einzugehen sein. Dort wird auch gezeigt werden, welche Vorteile diese natürlichen Logarithmen haben und wie man sie bei Rechnungen mit dem Rechenstab vorteilhaft verwendet.

2.4. Aufstellen einer logarithmischen Skale

In Bild 3 ist die Zuordnung der Zehnerlogarithmen zu den Numeri graphisch dargestellt. Jetzt soll aus den Werten der Logarithmentafel eine entsprechende Kurve aufgebaut werden. Dann entsteht, wenn auf der Abszissenachse gleiche Abstände abgetragen werden, auf der Ordinatenachse eine logarithmische geteilte Skale.
In Bild 4 sind auf der Abszissenachse die Numeri aufgetragen. Die Abstände von einer ganzen Zahl bis zur nächsten sind konstant gleich 5 mm. Man sagt, die Teilung ist äquidistant oder linear. Der Abstand von 0 bis 10 beträgt 50 mm. Die Länge der Ordinatenachse bis zum Logarithmus von 10 soll 62,5 mm betragen. Deshalb ist dem Logarithmus von 10 die Länge von 62,5 mm zuzuordnen. Die Längen, die für die übrigen Logarithmen abzutragen sind, erhält man, wenn man die Logarithmen mit 62,5 mm malnimmt. Die Rechnung ergibt:

$$\begin{aligned}
\lg\ 1&: 0{,}0000 \cdot 62{,}5\ \text{mm} \approx 0\ \text{mm}\\
\lg\ 2&: 0{,}3010 \cdot 62{,}5\ \text{mm} \approx 18{,}8\ \text{mm}\\
\lg\ 3&: 0{,}4771 \cdot 62{,}5\ \text{mm} \approx 29{,}8\ \text{mm}\\
\lg\ 4&: 0{,}6021 \cdot 62{,}5\ \text{mm} \approx 37{,}6\ \text{mm}\\
\lg\ 5&: 0{,}6990 \cdot 62{,}5\ \text{mm} \approx 43{,}7\ \text{mm}\\
\lg\ 6&: 0{,}7782 \cdot 62{,}5\ \text{mm} \approx 48{,}6\ \text{mm}\\
\lg\ 7&: 0{,}8451 \cdot 62{,}5\ \text{mm} \approx 52{,}8\ \text{mm}\\
\lg\ 8&: 0{,}9031 \cdot 62{,}5\ \text{mm} \approx 56{,}4\ \text{mm}\\
\lg\ 9&: 0{,}9542 \cdot 62{,}5\ \text{mm} \approx 59{,}6\ \text{mm}\\
\lg 10&: 1{,}0000 \cdot 62{,}5\ \text{mm} \approx 62{,}5\ \text{mm}
\end{aligned}$$

Wir erkennen: Bild 4 entspricht dem Bild 3. Die soeben berechneten Werte sind bei den entsprechenden Numeri vertikal von der waagerechten Achse aus nach oben abgetragen. Die miteinander verbundenen Punkte ergeben die Kurve des Bildes 4. Lotet man von den Punkten der Kurve zur vertikalen Achse, dann erhält man dort eine logarithmische Teilung.

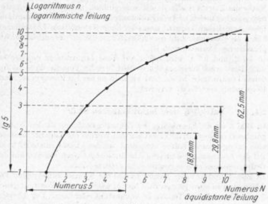


Bild 4

Diese logarithmische Teilung, bei der der Logarithmus von 10 die Länge von 62,5 mm erhielt, entspricht einer logarithmischen Teilung, die ein Rechenstab von 6,25 cm Länge hätte. Nun haben aber Taschenrechenstäbe eine Länge von 12,5 cm, und die Normalrechenstäbe sind 25 cm lang. Wenn man also das Bild 4 linear auf das Doppelte vergrößert, dann entspricht die Einteilung auf der vertikalen Achse genau der eines Taschenrechenstabes. Eine lineare Vergrößerung des Bildes 4 auf das Vierfache zeigt dann Übereinstimmung mit der Grundskale eines Normalrechenstabes.
Wichtig ist dabei aber noch, daß an der vertikalen Achse nicht die Logarithmen oder deren Vielfache angeschrieben sind, sondern die Numeri, zu denen die Logarithmen gehören. Dasselbe hat man auch beim Rechenstab gemacht. Man trägt dort die einer logarithmischen Teilung entsprechenden Abstände auf, schreibt aber wieder die Numeri an.
In Bild 4 sind die Strecken für den Numerus 5 (auf der Waagerechten) und für lg 5 (auf der Vertikalen) nochmals angeschrieben.

3. Rechnen mit Skalen

Zur Vorbereitung des Stabrechnens müssen einige Ausführungen über das Rechnen mit Skalen gemacht werden. Dabei wird von den linear geteilten Skalen, die von den Linealen her bekannt sind, auf die logarithmisch geteilten Skalen geschlossen.

3.1. Rechnen mit linearen Skalen

Konstruiert man zwei übereinstimmende äquidistant geteilte Skalen (mit gleicher Einteilung), so lassen sich damit, wie nachfolgend gezeigt werden soll, Addition und Subtraktion von Zahlen leicht veranschaulichen.
Es soll die Summe c der beiden Zahlen a und b gebildet werden:

$$a + b = c.$$

Wir wissen, daß die Reihenfolge der Summanden vertauschbar ist, daß also auch gerechnet werden kann

$$b + a = c.$$

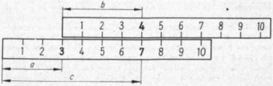


Bild 5

Bild 5 zeigt ein einfaches Beispiel der Addition zweier Zahlen. Aus $a = 3$ und $b = 4$ ergibt sich $a + b = 7$.

Auf der unteren Skale hat die Strecke a die Länge von 0 bis 3, auf der oberen die Strecke b die Länge von 0 bis 4. Über das Ende der Strecke a (bei 3) schiebt man den Anfang der Strecke b (bei 0) und

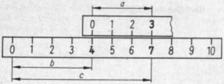


Bild 6

liest unter dem Ende der Strecke b auf der unteren Skale das Ergebnis der Addition

$$a + b = c$$

$$3 + 4 = 7 \quad \text{ab.}$$

Wir erkennen, die Addition von Zahlen, die durch Strecken entsprechender Länge dargestellt werden, geschieht durch Aneinanderlegen. Natürlich hätte man, wie Bild 6 zeigt, auch die Summanden vertauschen können und wäre zum gleichen Ergebnis gekommen.
Wir hatten die Skalen etwa 10 Einheiten lang gemacht und können damit Additionen bis zur Summe 10 ausführen. Was geschieht aber, wenn die Summe größer ist? Natürlich könnte man längere Rechenstäbe bauen, aber diese würden unhandlicher sein. Wie man trotzdem weiterkommt, soll uns die folgende Überlegung zeigen.
Wir nehmen an, daß $a = 6$ und $b = 8$ zu addieren seien. Verfährt man wie im obigen Beispiel, indem man die Strecke b an die Strecke a anlegt, dann erkennt man (Bild 7), daß auf der unteren Skale nicht abgelesen werden kann, weil sie kurz ist. Wir erkennen ferner, daß unter der 4 der oberen Skale die 10 der unteren Skale liegt. Wenn jetzt die untere Skale um ihre gesamte Länge nach rechts verschoben wird, so daß das linke Ende, die 0, unter der 4 steht, dann kann unter der 8 der oberen Skale abgelesen werden. Doch ist das Ergebnis nicht 4, wie die untere Skale anzeigt, sondern 14. Es muß ja berücksichtigt werden, daß die gesamte untere Skale um 10 Einheiten nach rechts verschoben worden war. Deshalb muß man sich anstelle der 0 der unteren Skale eine 10, anstelle der 1 eine 11 usw. denken.
Bild 8 soll unsere Überlegung noch einmal verdeutlichen. Wir erkennen die obere Skale mit der Strecke b und die nach rechts verschobene untere Skale. Die ursprüngliche Lage der unteren Skale ist nur angedeutet, und unter der verschobenen unteren Skale sind die neuen Zahlenwerte angeschrieben, die man sich nach der Verschiebung zu denken hat. Die Strecke a gehört zur unverschobenen Skale, während c vom Anfang der Strecke a bis in den verschobenen Teil hineinreicht.

Wir lesen am Ende der Strecke c ab, daß

$$6 + 8 = 14 \quad \text{ist.}$$

Aus den Bildern 7 und 8 ist noch mehr zu erkennen. Es war die obere Skale mit der 0 über das Ende von $a = 6$ der unteren Skale geschoben worden. In Bild 8 ist zu sehen, daß unter der 10 der oberen Skale die 6 der unteren steht, was wegen der Verschiebung aber den Zahlenwert 16 zu bedeuten hat.

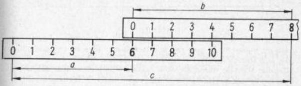


Bild 7

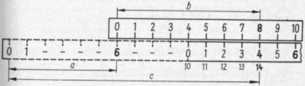


Bild 8

Bild 9 zeigt, wie wir das Additionsverfahren mit Zahlen, die nur bis 10 reichen, auch anwenden können. Die ursprüngliche Lage der unteren Skale ist nicht mehr eingezeichnet. Weil sie aber einmal nach rechts verschoben worden ist, denken wir uns zu jeder Zahl 10 addiert, was in dünner Schrift dazugeschrieben worden ist. Bild 9 ist gewissermaßen der rechte Teil des Bildes 8. Obwohl eigentlich die 0 der oberen Skale über der 6 der unteren unverschobenen Skale stehen müßte, erreichen wir dieselbe Stellung, wenn die 10 der oberen Skale über der 6 steht, d. h. über der 16 der um 10 vergrößerten unteren Skale. Deshalb kann man auch unter der 8 der oberen Skale das Ergebnis 14 ablesen.

Aus dieser Überlegung müssen wir schließen, daß es gar nicht notwendig ist, die Skalen immer vom Anfang, von der 0 an, zu benutzen. Man kann mit gleichem Recht auch das Ende der 10 Einheiten

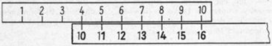


Bild 9

langen Skale benutzen, nur muß man sich dabei vor Augen halten, daß die untere Skale nach rechts verschoben worden ist und deshalb die angeschriebenen Werte um 10 zu vergrößern sind.
Bei der Addition waren Strecken zusammengesetzt worden, folglich werden bei der Subtraktion Strecken voneinander in Abzug gebracht. Hier sollen nur solche Fälle betrachtet werden, wo die Differenz nicht negativ wird. Aus der Aufgabe

$$c - b = a$$

ergibt sich für $c = 8$ und $b = 5$ das Bild 10.

Auf der unteren Skale wird $c = 8$ festgehalten und das Ende der Strecke $b = 5$ darüber gestellt. Dann muß der Anfang der Strecke b das Ende der Strecke $a = 3$ sein, weil ja $a + b = c$ ist.
Mit dem in Bild 10 angewendeten Verfahren lassen sich nur Differenzen bilden, wenn c größer als b, aber höchstens gleich 10 ist. Wie geht das Stabrechnen vor sich, wenn c größer ist als 10?
An der Aufgabe für $c = 13$ und $b = 5{,}5$ soll mit Bild 11 die Differenzbildung erläutert werden.

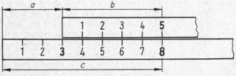


Bild 10

Die Strecke $c = 13$ kann nicht auf der normalen Skale abgetragen werden, aber auf der einmal nach rechts verschobenen unteren Skale liegt das Ende der Strecke c. Über dieses schieben wir die obere Skale

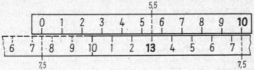


Bild 11

so, daß 5,5 über 13 der unteren verlängerten Skale steht. Dann ist der Anfang von b der oberen Skale zugleich das Ende der Strecke a auf der unteren Skale. Wir lesen also unter der 0 der oberen Skale auf der unteren das Ergebnis $a = 7{,}5$ ab. Betrachten wir das Ende der oberen Skale bei 10, dann sehen wir, daß dieses über 7,5 der verschobenen steht, für das wir eigentlich 17,5 zu denken haben. Wir lesen also das Ergebnis entweder unter der 0 der oberen Skale mit dem richtigen Zahlenwert ab oder unter der 10 auf der verschobenen Skale; aber dann ist von dem Wert der verschobenen Skale 10 abzuziehen, damit wir denselben Zahlenwert für die Differenz erhalten.

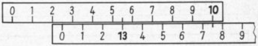


Bild 12

Bild 12 zeigt diese Differenzbildung noch einmal, aber nur mit der verschobenen Skale.
Fassen wir die Ergebnisse unserer graphischen Addition und Subtraktion zusammen, dann ergeben sich folgende Regeln:
Bei der Addition von Zahlen werden die den Zahlen entsprechenden Strecken aneinandergelegt. Am Ende der Strecke des letzten Summanden wird auf der anderen Skale das Ergebnis abgelesen. Reichen die Skalen, weil ihre Längen auf 10 beschränkt bleiben sollen, nicht aus, dann denkt man sich die Skale nach rechts verschoben. Dann

ist zu jedem Zahlenwert der verschobenen Skale so oft 10 zu addieren, wie verschoben worden ist. Die Addition braucht nicht unbedingt mit dem Skalenanfang, also bei 0 zu beginnen. Da wir wissen, daß die Skale 10 Einheiten lang ist, können wir auch mit der 10 arbeiten, nur muß stets entschieden werden, ob das Ergebnis auf der normalen oder einer verschobenen Skale abgelesen wird. Bei der Subtraktion als Umkehrung der Addition ist entsprechend zu verfahren. Jetzt sind Strecken voneinander abzuziehen. Über das Ende der Strecke des Subtrahenden wird das Ende der Minuendenstrecke gestellt und unter 0 auf der Grundskale oder der 10 auf der verschobenen Skale der Wert der Differenz abgelesen. Beim Ablesen auf der verschobenen Skale, also beim Ablesen unter 10, muß 10 abgezogen werden.

3.2. Rechnen mit logarithmischen Skalen

Denken wir uns jetzt die linearen Skalen durch logarithmische ersetzt, wie sie im Abschnitt 2.4. beschrieben worden sind, dann haben wir ein Modell eines Rechenstabes. Die Abstände der einzelnen Marken von der Marke für 1 entsprechen den Logarithmen der Numeri, die an die einzelnen Marken angeschrieben sind. Bild 13 zeigt die Gegenüberstellung. Dem Numerus 1 entspricht wegen $\lg 1 = 0$ der Logarithmus 0. Dort beginnt die logarithmische Skale. Trägt man

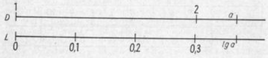


Bild 13

von dort aus die Strecke, die dem $\lg a$ entspricht, nach rechts ab, so ist auf der Skale der Numerus a angeschrieben. Mithin ist die Skale der Logarithmen äquidistant geteilt und enthält die Mantissen von 0,0 bis 0,999 ... Darüber ist zu den verschiedenen Mantissen der Numerus angeschrieben. Die Skale der Numeri ist also nicht äquidistant, sondern logarithmisch geteilt.
Welche Rechenoperationen werden nun ausgeführt, wenn wir Strecken bei logarithmisch geteilten Skalen zusammensetzen oder voneinander abziehen?

Betrachten wir zunächst die Aufgabe der Addition

$$\lg a + \lg b = \lg c.$$

Aus dem Abschnitt 2.3. wissen wir, daß eine Addition der Logarithmen einer Multiplikation der Numeri gleichkommt. Wir könnten deshalb auch schreiben

$$\lg (ab) = \lg c,$$

oder, da die Numeri auch gleich sein müssen, wenn die Logarithmen gleich sind,

$$ab = c.$$

Addieren wir also logarithmisch geteilte Strecken, so erhalten wir am Ende den Wert des Produktes der beiden Zahlen.

BEISPIEL

50. Es seien $a = 4$ und $b = 2$.

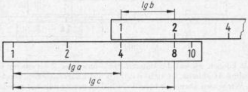


Bild 14

Bild 14 zeigt die Addition der Strecken und das Ergebnis $\underline{\underline{ab = 8}}$.

Wir erkennen: Aus der geometrisch durchgeführten Addition der Logarithmen ist eine Multiplikation der Numeri geworden.
In dieser Erkenntnis liegt das gesamte Wesen des logarithmischen Rechenstabes. Man addiert die Logarithmen geometrisch durch Aneinandersetzen von Strecken. Die Logarithmen treten aber gar nicht in Erscheinung, denn an den Enden der den Logarithmen zugeordneten Strecken sind bereits die Numeri angeschrieben. Am Ende der addierten Strecken steht das Produkt der multiplizierten Zahlen.

Bild 15 zeigt vier Multiplikationsbeispiele gleichzeitig, nämlich

1. $a = 2, \quad b = 2, \quad c = 2 \cdot 2 = 4$
2. $a = 2, \quad b = 3, \quad c = 2 \cdot 3 = 6$
3. $a = 2, \quad b = 4, \quad c = 2 \cdot 4 = 8$
4. $a = 2, \quad b = 5, \quad c = 2 \cdot 5 = 10$

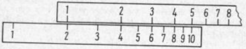


Bild 15

Aber bereits das einfache Beispiel $2 \cdot 7 = 14$ läßt sich mit dieser Einstellung nicht mehr rechnen. Wir erinnern uns der im vorigen Abschnitt besprochenen Verschiebung der Skalen. Bei der einmal nach rechts verschobenen unteren Skale würde die 2, die bisher unter der 1 der oberen Skale stand, unter die 10 der oberen Skale zu stehen kommen (Bild 16).

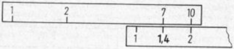


Bild 16

Jetzt können wir auf der unteren Skale unter der 7 der oberen das Ergebnis 14 ablesen. 14 steht natürlich nicht angeschrieben, sondern 1,4. Wir wissen aber, daß beim Verschieben der äquidistant geteilten Skalen 10 addiert werden mußte. Jetzt, bei den logarithmisch geteilten Skalen, ist lg 10 zu addieren, also mit 10 zu multiplizieren, so daß das Ergebnis 14 ist.

Vergleicht man das Bild 16 mit dem Bild 8, dann erkennt man die Analogie. Dort bedeutete eine Verschiebung eine Addition von 10, hier ergibt eine Addition der lg 10 entsprechenden Strecke eine Multiplikation mit 10.

Die geometrische Addition logarithmisch geteilter Skalen ist vorteilhafter als das geometrische Addieren linear geteilter Skalen. Bei der Addition von Strecken bei linear geteilten Skalen muß bei Verschiebung eine Zehnereinheit addiert werden; aus 2 wird 12, aus 3,75 wird 13,75 usw. Die Ziffernfolge ändert sich. Das tritt bei der geometrischen Addition von Strecken logarithmisch geteilter Skalen

nicht ein. Hier wird jeweils zu einem Logarithmus lg 10 addiert oder die dem Logarithmus entsprechende Zahl mit 10 malgenommen. Dadurch ändert sich die Ziffernfolge des Ergebnisses nicht, sondern nur der Stellenwert. Bei der geometrischen Addition oder Subtraktion von Strecken logarithmisch geteilter Skalen braucht man deshalb gar nicht aufzupassen, ob etwas zu addieren ist. Die Ziffernfolge stimmt immer. Durch Verschieben der Skalen kann sich höchstens die Stellung des Kommas im Ergebnis ändern. Das ist aber durch eine Überschlagsrechnung schnell zu klären.

Sehen wir uns noch die Division an! Wir wissen, daß

$$\frac{c}{b} = a$$

logarithmisch gerechnet wird durch

$$\lg c - \lg b = \lg a\,.$$

Da wir geometrisch subtrahieren sollen, steht vor uns die Aufgabe, zwei Strecken auf logarithmisch geteilten Skalen voneinander abzuziehen.

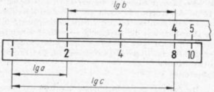


Bild 17

Bild 17 zeigt die Rechnung für das Zahlenbeispiel $\frac{8}{4} = 2$.

Ist das Ergebnis nicht unter der 1 der oberen Skale ablesbar, dann wird eben unter der 10 abgelesen. Die Ziffernfolge muß ja, wie wir oben sahen, immer richtig sein. Bild 18 zeigt die Einstellung für das Zahlenbeispiel $\frac{c}{b} = \frac{20}{8} = 2{,}5$.

Zusammenfassend ist festzustellen, daß die geometrische Addition und Subtraktion von Strecken der logarithmisch geteilten Skalen gleichbedeutend mit der Multiplikation und der Division der auf den Skalen angeschriebenen Numeri ist. Multiplikation und Division sind mithin die einfachsten Rechenoperationen, die mit einem logarithmischen Rechenstab ausgeführt werden können.

Die geometrische Addition und Subtraktion der Strecken der logarithmisch geteilten Skalen liefert uns von den Ergebnissen nur die Ziffernfolge.
Der Stellenwert des Ergebnisses ergibt sich daraus, wie oft die eine oder andere Skale verschoben worden ist. Genaueres können Sie in 7.1. nachlesen.

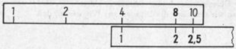


Bild 18

Es ist aber nicht der Sinn der dort angegebenen Regeln, den Stellenwert eines Ergebnisses mechanisch zu ermitteln. Der Rechenstab liefert uns die Ziffernfolge, eine Überschlagsrechnung, die auf jeden Fall vor- oder nachher angestellt werden sollte, entscheidet über die Stelle, an die das Komma zu setzen ist. Dabei sei besonders darauf hingewiesen, daß man bei solchen Überschlagsrechnungen Zehnerpotenzen abspaltet, was die Rechnung wesentlich vereinfacht. Angenommen, wir lesen beim Rechenstab die Ziffernfolge 1–3–4–7, dann entscheidet die Überschlagsrechnung, ob das Ergebnis 13,47 oder 0,01347 lautet.
Wir merken uns:

> Die Ziffernfolge des Ergebnisses lesen wir auf dem Rechenstab ab, die Überschlagsrechnung liefert den Stellenwert, beide zusammen das Ergebnis.

Da die Überschlagsrechnung für das Stabrechnen außerordentlich wichtig sind, werden wir in 4.5. noch einmal ausführlich darauf eingehen.

4. Aufbau des Rechenstabes

4.1. Hauptteile des Rechenstabes

Früher bestanden die Rechenstäbe meist aus Holz, das mit Zelluloid- oder Kunststoffplatten überzogen war. Heute werden die Rechenstäbe bevorzugt, die völlig aus Kunststoff hergestellt sind. Einige Firmen fertigen auch Rechenstäbe ganz aus Metall. Diese Metall- oder Kunststoff-Rechenstäbe haben den aus Holz gefertigten gegenüber zwei Vorteile. Der eine ist die bessere Maßhaltigkeit. Wird nämlich beim Rechenstab aus Holz nicht gutes und trockenes Holz verwendet oder wird der Rechenstab unsachgemäß aufbewahrt, so kann er sich in der Länge verziehen. Das ist besonders schlecht und kann den Rechenstab unbrauchbar machen, wenn sich die einzelnen Teile ungleichmäßig verziehen. Der andere Vorteil liegt darin, daß bei Metall- und Kunststoff-Rechenstäben auch der Rechenstabkörper zweiseitig verwendet werden kann. Dadurch ist eine größere Zahl Teilungen unterzubringen. Die Kunststoff-Rechenstäbe haben vor denen aus Metall noch den Vorteil, daß die Teilungen kontrastreicher gegen den weißen Untergrund hervortreten und auch bei seitlichem Lichteinfall keine Blendung eintritt.
Bei jedem Rechenstab sind folgende 3 Hauptteile zu unterscheiden:

1. der Stabkörper,
2. die Zunge,
3. der Läufer.

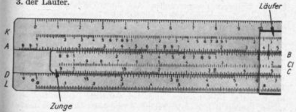


Bild 19

Bei den Bildern 19 und 20 sind die Hauptteile gut zu erkennen. Bild 19 ist ein Foto des linken Teiles eines Taschen-Rechenstabes von 12,5 cm Skalenlänge, während der Normal-Rechenstab (Bild 20)

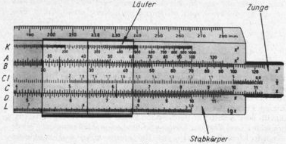


Bild 20

eine Skalenlänge von 25 cm hat. Es gibt auch noch größere Rechenstäbe. Sie haben eine Skalenlänge von 50 cm. Natürlich steigt mit der Skalenlänge die Ablesegenauigkeit. Bei einem Taschen-Rechenstab kann man etwa auf 3 Stellen, bei einem Normal-Rechenstab auf 3 bis 4 Stellen genau ablesen, während der 50 cm lange Rechenstab immer noch die 4. Stelle angeben läßt. Die relativen Ablesefehler liegen beim Normal-Rechenstab (25 cm Länge) zwischen 0,1% und 1%.

4.2. Die wichtigsten Teilungen des Rechenstabes

Rechenstäbe tragen eine große Anzahl von Skalen, die wir nachfolgend *Teilungen* nennen wollen. Aus ihrer Vielzahl sind einige besonders hervorzuheben, weil sie auf fast allen Rechenstäben wiederkehren. Einige weitere Teilungen kommen auf verschiedenen Rechenstabtypen vor, doch ist ihre Anordnung unterschiedlich, teilweise fehlen sie auch.

Der Stabkörper trägt zwei wichtige Teilungen A und D (Bilder 19 und 20). Die Zunge trägt die entsprechenden Teilungen B und C. Während die Teilungen C und D von 1 bis 10 laufen, umfassen die Teilungen A und B den Zahlenbereich von 1 bis 100.

Bei normalen Rechenstäben, auch bei manchen Taschen-Rechenstäben, befindet sich über der Teilung A eine von 1 bis 1000 laufende Teilung K.

Unterhalb der Teilung D ist eine weitere Teilung L angebracht, die im Gegensatz zu allen anderen Teilungen linear unterteilt ist. Bei manchen Rechenstäben befindet sie sich an der Seitenkante des Stabkörpers, aber auf alle Fälle ist sie die eigentliche Grundlage des ganzen Rechenstabes. Sie enthält die Mantissen zu den Zahlen der Grundteilung D, die ihrerseits, genau wie die Grundteilung C, logarithmisch eingeteilt ist.

Die Zunge weist zwischen den Teilungen B und C noch die Teilung CI auf. Diese ist genau so aufgebaut wie die Teilung C, nur ist sie gegenläufig, d.h., über der 1 von C steht die 10 von CI. CI ist eine Abkürzung von C invers (lat. umgekehrt). Die CI-Teilung wird auch Reziprokteilung genannt.

Auf der Rückseite befinden sich außerdem noch Teilungen (meist drei), deren Zweck später erläutert werden wird. Auch die Rückseite des Stabkörpers kann bei den Metall- und Kunststoff-Rechenstäben noch einige Teilungen tragen, auf die wir ebenfalls später zu sprechen kommen werden.

Der einfache Taschen-Rechenstab trägt manchmal nur die 4 Teilungen A, B, C und D. Ferner haben die Rechenstäbe oben an der abgeschrägten Meßkante eine Millimetereinteilung, die bei den Taschen-Rechenstäben bis 130, bei den Normal-Rechenstäben bis 270 reicht. Manche Normal-Rechenstäbe tragen an der unteren, senkrechten Kante einen Verkleinerungsmaßstab 1 : 25.

Der Läufer ist entweder als Einstrichläufer oder als Einstrichläufer mit drei Nebenstrichen (Bild 20) ausgebildet. Bei zweiseitig verwendbaren Rechenstäben ist der Läufer so gebaut, daß er für beide Seiten verwendbar ist. Die durchlaufenden Striche stehen einander genau gegenüber. Dadurch ist die Übertragung von der einen Seite zur anderen Seite des Rechenstabes sofort gewährleistet. Man rechnet mit dem durchlaufenden Strich. Die drei kürzeren Nebenstriche dienen zu besonderen Rechnungen, wie später noch gezeigt werden wird.

Zu erwähnen sind noch die meist rot angelegten Verlängerungen der Teilungen nach beiden Seiten hin. Die Verlängerung an der rechten Seite entspricht dem Anfang der Teilung, während die Verlängerung links dem Ende der Teilung gleich ist. Diese „Überteilungen" sollen ein Umstellen der Zunge ersparen, wenn der einzustellende oder abzulesende Zahlenwert nahe bei 1 oder 10 außerhalb der eigentlichen Teilung liegen würde.

Entstanden sind diese Überteilungen, die die Länge von $\lg \frac{\pi}{4}$ haben, aus der Notwendigkeit für die Kreisflächenberechnung, über die Sie in 5.10.2.1. weiteres lesen können.

Normale Multiplikations- und Divisionsaufgaben werden meist mit den Grundteilungen C und D (wenn vorhanden, auch mit der Teilung CI) gerechnet, weil die Einstellgenauigkeit dort am größten ist. Will man bei verschiedenen Rechnungen, vor allem beim Ablesen fester Proportionen, das lästige Umstellen der Zunge vermeiden, dann benutzt man auch die Teilungen A und B oder besondere Teilungen, von denen später noch zu sprechen sein wird. Bei den Teilungen A und B ist die Ablesegenauigkeit kleiner, denn sie sind auch nur 25 cm lang und umfassen den Zahlenbereich von 1 bis 100, während die Grundteilungen C und D und die Teilung CI sowie die erwähnten Sonderteilungen nur den Zahlenbereich von 1 bis 10 haben.

4.3. Aufbau der wichtigsten Teilungen

Zur praktischen Verwendung des Rechenstabes muß zunächst Klarheit über den Aufbau der wichtigsten Teilungen gewonnen werden. Mit Ausnahme der Teilung L, die als einzige linear unterteilt ist, haben alle anderen Teilungen unterschiedliche Strichabstände. Wie man sich an den Bildern 19 und 20 überzeugen kann, werden die Abstände zwischen den Strichen nach dem rechten Ende des Stabes hin immer kleiner. Während der Raum zwischen 1 und 2 auf den Teilungen C und D etwa 30% der Stablänge ausmacht, beträgt der Abstand zwischen 9 und 10 nur etwa 5%. Daraus ergibt sich, daß die Einteilungsstriche innerhalb der Zahlen dort näher beieinander liegen müssen.
Die auf den Teilungen angebrachten Zahlen sind stets ohne Berücksichtigung eines Kommas abzulesen. Es war bereits weiter oben gesagt worden, daß der Rechenstab nur die Ziffernfolge einer Zahl bestimmt, während die Kommastellung sich aus einer Überschlagsrechnung ergibt. Demzufolge lautet die Einstellung beim Rechenstab oder das Ergebnis einer Rechnung nicht 1,37 oder 13,7, sondern zunächst 1–3–7 (eins – drei – sieben). Anstelle 56,3 ist mithin 5–6–3 und anstelle 0,0278 ist 2–7–8 einzustellen oder abzulesen.
Von den wichtigsten Teilungen haben A und B den gleichen Aufbau, nämlich von 1 bis 100, während wieder C und D übereinstimmen und von 1 bis 10 laufen. Die Teilung CI ist den Teilungen C und D entsprechend, nur ist sie gegenläufig, d.h., sie beginnt links bei 10 und endet rechts bei 1.

4.3.1. Aufbau der Grundteilungen C und D und der Teilung CI

Betrachten wir zunächst die Grundteilungen C und D!
Beim Normal-Rechenstab erkennen wir drei verschiedene Arten der Unterteilung, nämlich eine im Bereich zwischen 1 und 2, eine andere

zwischen 2 und 4 und schließlich eine dritte von 4 bis zum Ende der Teilung.
Der Abschnitt zwischen 1 und 2 ist in Bild 21 für den Normal-Rechenstab und den Taschen-Rechenstab wiedergegeben. Er ist in

Bild 21

Zehntel unterteilt (1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,7; 1,8; 1,9). Diese Zehntelstrecken haben wiederum Unterteilungen, die in Bild 21 zwischen 1 und 1,1 eingezeichnet sind, obwohl sie auch im Bereich zwischen 1,1 und 2 vorhanden sind. Beim Normal-Rechenstab sind die Zehntelabschnitte nochmals in 10 Teile geteilt. Bei der zweiten Unterteilung, die also den Raum zwischen 1 und 2 in Hundertstel einteilt, ist jeweils der 5. Teilstrich etwas größer eingezeichnet, wodurch die Übersichtlichkeit vergrößert wird. Beschriftet ist jedoch nur die Zehnteleinteilung, damit nicht durch zu viele Zahlen die Übersicht wieder verlorengeht.
In dem Teilabschnitt zwischen 1 und 2 können beim Normal-Rechenstab dreistellige Zahlenfolgen genau eingestellt werden, eine vierte Stelle muß geschätzt werden.

Einstellbar sind:
1–0–5, 1–0–6, 1–3–7,
1–6–8, 1–7–2, 1–9–4.

Geschätzt werden muß:
1–2–3–5, 1–4–2–7,
1–5–1–6, 1–9–1–8.

Beim Taschen-Rechenstab ist im gleichen Abschnitt zwischen 1 und 2 auch die Zehntelteilung vorhanden, jedoch meist nur das 5. Zehntel beschriftet. Die Zehntel sind wieder unterteilt in Fünftel, so daß der gesamte Abschnitt zwischen 1 und 2 in Fünfzigstel eingeteilt ist. Einstellbar sind mithin von dreiziffrigen Zahlenfolgen nur die mit einer geraden Zahl in der letzten Stelle, alle übrigen und vierziffrige Zahlenfolgen müssen bei der Einstellung geschätzt werden.
Der nächste Einteilungsabschnitt reicht beim Normal-Rechenstab von 2 bis 4. Er ist in Bild 22 wiedergegeben. Hier sind die Strecken von 2 bis 3 und von 3 bis 4 jeweils in 10 Teilabschnitte eingeteilt, von

denen jeder wiederum durch 4 Teilstriche in 5 Unterabschnitte aufgeteilt ist. Eingezeichnet ist diese zweite Unterteilung nur zwischen 2 und 2,1. Während also im Bereich zwischen 1 und 2 der Strichabstand der feinsten Unterteilung $\frac{1}{100}$ betrug, ist er jetzt $\frac{1}{50}$. Die

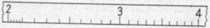


Bild 22

Schrittgröße zwischen jedem Strich hat sich also verdoppelt. Wir können beim Normal-Rechenstab dreistellige Ziffernfolgen genau einstellen, wenn die dritte Ziffer der Folge gerade ist, z. B.

2–0–2, 2–0–8, usw.
2–0–4, 2–1–0, 3–9–6,
2–0–6, 2–1–2, 3–9–8.

Ist sie dagegen ungerade, wie z. B. bei

2–0–1, 2–0–7, usw.
2–0–3, 2–0–9, 2–9–7,
2–0–5, 2–1–1, 3–9–9,

so muß geschätzt werden wie bei vierziffrigen Folgen.
Beim Taschen-Rechenstab reicht der nächste, gleichartig unterteilte Einteilungsabschnitt von 2 bis 5. Die feinste Unterteilung sind halbe Zehntel, so daß der Strichabstand ein Zwanzigstel beträgt. Die Zehntelstriche sind etwas länger als die von den Zwanzigsteln. Jeder 5. Zehntelstrich ist wieder ein klein wenig länger.
Einstellbar sind mithin nur dreiziffrige Folgen, deren letzte Ziffer eine 0 oder eine 5 ist:

2–0–5, 2–2–0, usw.
2–1–0, 2–2–5, 4–9–0,
2–1–5, 2–3–0, 4–9–5.

Die dritte gleichartige Einteilungsart beim Normalrechenstab finden wir zwischen 4 und 10. Sie ist aus Bild 23 zu erkennen. Die Abstände

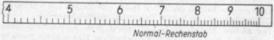


Bild 23

zwischen zwei benachbarten Zahlen (z. B. 4 und 5) sind in 10 Unterabschnitte aufgeteilt, wobei sich innerhalb jedes Unterabschnittes noch einmal ein etwas kürzerer Halbierungsstrich befindet. Der Strichabstand beträgt mithin ein Zwanzigstel.
Beim Normal-Rechenstab sind deshalb die dreiziffrigen Folgen einstellbar, die mit 0 oder 5 enden, wie etwa

4–0–5, 4–1–0, 4–1–5, usw. 9–9–0, 9–9–5.

Alle anderen dreiziffrigen Folgen müssen beim Einstellen oder Ablesen geschätzt werden, wie etwa

4–2–3, 5–6–8, 7–2–6 und 8–3–7.

Vierziffrige Folgen sind vor dem Einstellen auf dreiziffrige zu runden.
Beim Taschen-Rechenstab läuft der nächste gleichartig unterteilte Abschnitt von 5 bis 10. Die feinste Unterteilung beträgt hier jeweils ein Zehntel, so daß hier nur zweiziffrige Folgen genau eingestellt werden können, alle dreiziffrigen sind zu schätzen, alle vierziffrigen vorher zu runden.
Fassen wir zusammen, dann ergeben sich für die Strichabstände bei den Grundteilungen C und D in den einzelnen Bereichen die in der Übersicht eingetragenen Werte.

Rechenstab	1	2 3	4 5 6 7 8 9 10
Normal-	← $\frac{1}{100}$ (4) →	← $\frac{1}{50}$ (4) →	← $\frac{1}{20}$ (3) →
Taschen-	← $\frac{1}{50}$ (4) →	← $\frac{1}{20}$ (4) →	← $\frac{1}{10}$ (3) →

Die in Klammern stehenden Zahlen geben an, bis zu welcher Anzahl die Ziffernfolge noch berücksichtigt werden kann.

4.3.2. Aufbau der Quadratteilungen A und B

Die Teilungen A und B laufen von 1 bis 100. Sie sind untereinander gleich und enthalten zwei gleich lange Abschnitte von 1 bis 10 und von 10 bis 100. Jeder dieser Abschnitte ist jedoch nur halb so lang wie der entsprechende auf der C- oder D-Teilung. Deshalb können auch nicht so feine Unterteilungen angebracht werden wie auf den Normalskalen C und D. Es sind wieder drei Einteilungsarten zu unterscheiden, nämlich beim Normal-Rechenstab.

1. die von 1 bis 2, bzw. 10 bis 20,
2. von 2 bis 5, 20 bis 50, und
3. von 5 bis 10, 50 bis 100.

Der erste Abschnitt (1 bis 2 bzw. 10 bis 20) ist eingeteilt, wie der zweite Abschnitt bei den Teilungen C, D und CI. Der Strichabstand ist mithin ein Fünfzigstel.
Der zweite Abschnitt (2 bis 5 bzw. 20 bis 50) ist unterteilt wie der dritte Abschnitt der Teilungen C, D und CI. Der Strichabstand beträgt ein Zwanzigstel.
Der dritte Abschnitt schließlich (5 bis 10 bzw. 50 bis 100) ist nur noch in Zehntel eingeteilt.
Beim Taschen-Rechenstab ist die Unterteilung wegen der geringeren Länge noch gröber. Sie beträgt

zwischen 1 und 3 bzw. 10 und 30 ein Zwanzigstel,
3 und 6 bzw. 30 und 60 ein Zehntel und
6 und 10 bzw. 60 und 100 ein Fünftel.

In einer Übersicht zusammengefaßt ergeben sich für die Quadratteilungen A und B in den einzelnen Bereichen folgende Strichabstände und, in Klammern gesetzt, folgende Anzahlen der einstellbaren Ziffernfolgen:

Rechenstab	1	2	3 4 5 6 7 8 9 10
bzw.	10	20	30 40 50 60 70 80 90 100
Normal-	$\longleftarrow \frac{1}{50}\,(4) \longrightarrow$	$\longleftarrow \frac{1}{20}\,(3) \rightarrow$	$\longleftarrow \frac{1}{10}\,(3) \longrightarrow$
Taschen-	$\longleftarrow \frac{1}{20}\,(3) \longrightarrow$	$\leftarrow \frac{1}{10}\,(3) \rightarrow$	$\longleftarrow \frac{1}{5}\,(2) \rightarrow$

4.3.3. Aufbau der Kubikteilung K

Über der Teilung A befindet sich beim Normal-Rechenstab (Bild 20) und bei den meisten Taschen-Rechenstäben (Bild 19) die Teilung K, die von 1 bis 1000 reicht. Sie besteht aus drei gleich langen Teilen

von 1 bis 10, 10 bis 100 und 100 bis 1000.

Die Unterteilungen in den drei Abschnitten entsprechen genau denen der Quadratteilungen A und B.
Bei den Taschen-Rechenstäben, die ja nur halb so lang sind, liegt eine davon abweichende Unterteilung vor, die Abschnitte zwischen 1 und 2, bzw. 10 und 20 bzw. 100 und 200 betragen ein Zwanzigstel zwischen 2 und 4 bzw. 20 und 40 bzw. 200 und 400 ein Zehntel, zwischen 4 und 8 bzw. 40 und 80 bzw. 400 und 800 ein Fünftel und zwischen 8 und 10 bzw. 80 und 100 bzw. 800 und 1000 ein halb.

Zusammengefaßt ergeben sich für die Kubikteilung K in den einzelnen Bereichen folgende Strichabstände und (in Klammern) die Anzahlen der einstellbaren Ziffernfolgen:

Rechenstab	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
bzw.	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
bzw.	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000

Normal-	$\leftarrow \frac{1}{50}\,(4) \longrightarrow$	$\leftarrow \frac{1}{20}\,(3) \longrightarrow$	$\longleftarrow \frac{1}{10}\,(3) \longrightarrow$	
Taschen-	$\leftarrow \frac{1}{20}\,(3) \longrightarrow$	$\leftarrow \frac{1}{10}\,(3) \rightarrow$	$\leftarrow \frac{1}{5}\,(2) \longrightarrow$	$\rightarrow \frac{1}{2}\,(2) \longrightarrow$

4.4. Einstellungen auf den Teilungen

In den meisten Fällen deckt sich der Läuferstrich nicht mit einem Strich auf den Teilungen. Dann muß die letzte Ziffer der Folge, die abgelesen werden soll, geschätzt werden. Auch dann, wenn die Ziffernfolge einer Zahl, mit der in die Rechnung eingegangen wird, mehr als drei Ziffern hat, muß die Einstellung für die letzte geschätzt werden.
Da das Ablesen auf den Teilungen und insbesondere das Schätzen oft Schwierigkeiten macht, soll es, bevor mit den eigentlichen Rechnungen begonnen wird, geübt werden. Sicherheit im Gebrauch des Rechenstabes ist nicht zuletzt eine Sache des mühelosen Ablesens und Einstellens der Zahlen! Wir betrachten deshalb zunächst einige Fälle, bei denen die letzte Ziffer geschätzt werden muß. Die Bilder 24, 25 und 26 zeigen Ausschnitte aus der Normalteilung D des Rechenstabes von 25 cm Länge und je drei Einstellungen. Welche Ziffernfolgen wurden eingestellt?

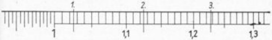


Bild 24

In Bild 24 sind im Bereich zwischen 1 und 2 die eingestellten Ziffernfolgen

1. 1–0–2–5
2. 1–1–2–4
3. 1–2–2–7

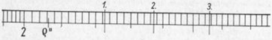


Bild 25

Bild 25 zeigt den Einstellungsabschnitt zwischen 2 und 4. Die eingestellten Ziffernfolgen lauten

1. 2–2–2–5
2. 2–3–7–0
3. 2–5–5–5

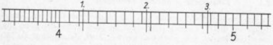


Bild 26

In Bild 26 ist der Einstellungsabschnitt zwischen 4 und 10 dargestellt. Die eingezeichneten Einstellungen entsprechen den Ziffernfolgen

1. 4–1–2
2. 4–4–7–5
3. 4–8–3

Für den Anfänger sei noch folgende Einstellungsübung bestimmt:
Der Läuferstrich wird auf 1,3 der Teilung A gestellt und dann die 1 der Teilung B der Zunge daruntergeschoben. Dadurch ist die Zunge etwas nach rechts verschoben. A 1 und B 1 sowie C 1 und D 1 stehen nicht mehr übereinander. In der ersten Spalte der nachfolgenden Tabelle sind verschiedene Zahlen der Teilung A angegeben, auf die der Läuferstrich eingestellt werden soll. Dann liest man unter ihm auf den verschiedenen Teilungen die Werte ab, die in den entsprechenden Spalten der Tabelle auf S. 53 angegeben sind.

4.5. Überschlagsrechnungen

Wir haben schon mehrfach darauf hingewiesen, daß die Rechnungen mit dem Rechenstab zunächst nur eine Ziffernfolge liefern, wie auch beim Einstellen der einzelnen Zahlen nur die Ziffernfolgen ohne deren Stellenzahl berücksichtigt werden. Wir können also mit einem

A	B	C	D	CI	K	L
Linke Stabseite						
1–6–0–0	1–2–2–5	1–1–1–0	1–2–6–4	9–0–2	2–0–2	1–0–2
2–1–5–0	1–6–5–5	1–2–8–7	1–4–6–6	7–7–7	3–1–4	1–6–6
2–6–2–5	2–0–2	1–4–2–2	1–6–2–1	7–0–3	4–2–6	2–1–0
2–8–0	2–1–6	1–4–6–8	1–6–7–3	6–8–2	4–6–8	2–2–3
3–4–4	2–6–5	1–6–2–8	1–8–5–5	6–1–4	6–3–8	2–6–8
3–6–2	2–7–8	1–6–8–8	1–9–0–1	5–9–9	6–8–8	2–7–9
4–3–5	3–3–5	1–8–3–0	2–0–8–5	5–4–7	9–0–6	3–1–9
4–7–0	3–6–2	1–9–0–3	2–1–7–0	5–2–6	1–0–2	3–3–6
5–4–7	4–2–1	2–0–5–0	2–3–3–8	4–8–7	1–2–8	3–6–9
6–9–2	5–3–2	2–3–1–0	2–6–3–0	4–3–3	1–8–2	4–2–0
7–2–3	5–5–6	2–3–6–0	2–6–9–0	4–2–3	1–9–4–5	4–3–0
8–5–6	6–5–8	2–5–7–0	2–9–2–5	3–8–9–0	2–5–0	4–6–6
9–0–1	6–9–4	2–6–3–5	3–0–0–5	3–7–9–0	2–7–2	4–7–7–5
Rechte Stabseite						
1–0–4–0	8–0–0	2–8–3–0	3–2–2–5	3–5–3–0	3–3–5	5–0–8
1–1–7–0	9–0–1	3–0–0–0	3–4–2–0	3–3–3–0	4–0–0	5–3–4
1–8–7–5	1–4–4–5	3–8–0–0	4–3–3	2–6–3–0	8–1–2	6–3–6
2–4–3	1–8–7–5	4–3–2	4–9–3	2–3–1–0	1–2–0	6–9–3
3–0–3	2–3–2	4–8–2	5–4–8	2–0–7–5	1–6–7	7–4–1
4–6–8	3–6–1	6–0–1	6–8–4	1–6–6–4	3–2–0	8–3–5
5–6–2	4–1–3	6–4–2	7–3–2	1–5–5–5	3–9–3	8–6–5
6–2–5	4–8–2	6–9–3	7–9–1	1–4–4–0	4–9–1	8–9–7
7–7–5	5–9–8	7–7–3	8–8–1	1–2–9–4	6–8–5	9–4–5
8–5–0	6–4–4	8–0–8	9–2–2	1–2–3–5	7–8–4	9–6–5
9–8–4	7–5–8	8–7–1	9–9–2	1–1–4–8	9–7–6	9–9–6

Rechenstab arbeiten und dabei genau bestimmen, daß ein Ergebnis z. B. die Ziffernfolge 1–5–5–5 hat, doch ist zunächst nicht bekannt, ob das 1,555 oder 155,5 oder 0,01555 heißt. Daraus ergibt sich die Notwendigkeit einer exakten Stellenwertbestimmung.
Es gibt zwar für einige Rechnungen eine mechanische Art der Stellenwertbestimmung, die wir im Anhang in 7.1. mitteilen werden, die wir aber nicht empfehlen, weil sie zum mechanischen Rechnen verführt und den Blick für die Größenordnungen nicht entwickelt. Doch gibt es eine nie versagende Methode der Stellenwertbestimmung, das ist die Überschlagsrechnung. Da sie für das Stabrechnen genauso wichtig ist wie die richtige Handhabung der Rechenstabregeln, soll hier auf Überschlagsrechnungen eingegangen werden.
Das ganze Geheimnis der Überschlagsrechnungen beruht darauf, daß man von den zunächst unübersichtlichen Zahlen Zehnerpotenzen abspaltet. Die übriggebliebenen einstelligen Zahlen werden so zu ganzen Zahlen abgeändert, daß man bequem mit ihnen rechnen kann und die dadurch entstehenden Fehler möglichst ausgeglichen werden. So wird aus

$$\begin{aligned} 17{,}3 &\to 1{,}73 \cdot 10 &&\to 2 \cdot 10 \\ 3130 &\to 3{,}13 \cdot 10^3 &&\to 3 \cdot 10^3 \\ 0{,}91 &\to 9{,}1 \cdot 10^{-1} &&\to 9 \cdot 10^{-1} \\ 0{,}0078 &\to 7{,}8 \cdot 10^{-3} &&\to 8 \cdot 10^{-3}. \end{aligned}$$

Das scheint eine sehr grobe Methode zu sein. Wir müssen aber bedenken, daß nur ein Stellenwert gewonnen werden soll und nicht eine Ziffernfolge, denn diese liefert der Rechenstab. Um eine einseitige Verfälschung des Ergebnisses zu vermeiden, empfiehlt es sich, bei den Änderungen nicht schematisch vorzugehen. Werden nämlich bei einem Produkt aus mehreren Faktoren alle Faktoren vergrößert, dann muß die Überschlagsrechnung einen zu großen Wert liefern. Deshalb sollte man nach einem gewissen Ausgleich streben. Wenn also einige Faktoren vergrößert worden sind, dann sollten einige andere bei der Überschlagsrechnung verkleinert werden.
Sehen wir uns doch diese Ratschläge an Beispielen an!

BEISPIELE

51. Ist $936 \cdot 0{,}0078 \cdot 32{,}5 \cdot 6840$ zu berechnen, dann wird man schreiben:

$$\begin{aligned} & 9{,}36 \cdot 10^2 \cdot 7{,}8 \cdot 10^{-3} \cdot 3{,}25 \cdot 10 \cdot 6{,}84 \cdot 10^3 \approx \\ \approx\ & 9 \cdot 10^2 \cdot 8 \cdot 10^{-3} \cdot 3 \cdot 10 \cdot 7 \cdot 10^3 = \\ =\ & 9 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 10^3 \approx \\ \approx\ & 70 \cdot 20 \cdot 10^3 = 14 \cdot 10^2 \cdot 10^3 = \\ =\ & 14 \cdot 10^5 = \underline{\underline{1400000}} \end{aligned}$$

52. Auch bei Brüchen verwenden wir dieselbe Methode.
Soll $\dfrac{820 \cdot 1817 \cdot 0{,}0062}{0{,}488 \cdot 29{,}3}$ berechnet werden, dann setzen wir für die Überschlagsrechnung an

$$\begin{aligned} & \frac{8{,}2 \cdot 10^2 \cdot 1{,}817 \cdot 10^3 \cdot 6{,}2 \cdot 10^{-3}}{4{,}88 \cdot 10^{-1} \cdot 2{,}93 \cdot 10} \approx \\ \approx\ & \frac{8 \cdot 2 \cdot 6}{5 \cdot 3} \cdot \frac{10^2 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3}}{10^{-1} \cdot 10} = \frac{32}{5} \cdot 10^2 \approx \\ \approx\ & 6 \cdot 10^2 = \underline{\underline{600}}. \end{aligned}$$

Bei den Überschlagsrechnungen kann es vorkommen, daß z. B. ein Ergebnis $9 \cdot 10^3$ herauskommt. Stellen wir bei der Durchrechnung unseres Beispiels am Rechenstab die Ziffernfolge 1–0–3 fest, dann muß das Ergebnis natürlich 10300 heißen.
Genau umgekehrt kann es passieren, daß die Überschlagsrechnung etwa $1{,}2 \cdot 10^{-2} = 0{,}012$ liefert, während die Stabrechnung die Ziffernfolge 9–8 gibt; dann lautet natürlich das Endergebnis 0,0098. Durch solche notwendige Zehnerübergänge darf man sich nicht verwirren lassen. Bei einiger Übung kommt man aber unbedingt zum richtigen Ergebnis, wenn man beim Überschlagen nicht zu großzügig verfährt.
Im Laufe unserer weiteren Rechnungen werden wir immer wieder auf Überschlagsrechnungen zurückkommen, so daß es schließlich nicht an Übung fehlen wird.

5. Verwendung des Rechenstabes

Die in 5.1., 5.2., 5.3., 5.4. und 5.5. zu beschreibenden Rechenoperationen können mit allen gängigen Rechenstäben ausgeführt werden. Es sind Taschen- und Normal-Rechenstäbe gleichermaßen verwendbar. Es ist ebenfalls gleichgültig, ob man die Beschreibungen mit einem Rechenstab nach dem System „Rietz", „Darmstadt" oder „Studio" nachprüft. Das Nachrechnen mit einem eigenen Rechenstab wird auf alle Fälle empfohlen, damit Sicherheit gewonnen wird. Man sollte beim Durcharbeiten des weiteren Textes unbedingt allmählich dazu übergehen, die Einstellungen auf dem Rechenstab selbständig vorzunehmen und mit den Bildern zu vergleichen.
In den folgenden Bildern werden zwei verschiedene Hinweispfeile eingezeichnet sein. Dabei bedeutet → den Einstellpfeil, der angibt, welche Zahl oder auf welche Zahl eingestellt worden ist, und →den Ablesepfeil, welcher angibt, welches Zwischen- oder Endergebnis abzulesen ist.

5.1. Multiplikation und Division

Multiplikationen und Divisionen sind entweder mit den Grundteilungen C und D oder mit den Quadratteilungen A und B ausführbar. Dabei verdienen die Grundteilungen C und D wegen der größeren Genauigkeit den Vorzug. Ist diese nicht entscheidend, dann kann man auch zur Einsparung von Zungenverschiebungen mit den Teilungen A und B rechnen. In 5.9. können Sie nachlesen, wie man durch die Einführung neuer Teilungen auch hier einen Ausweg gefunden hat.

5.1.1. Multiplikation

Die Multiplikationsaufgabe, mit der wir uns zunächst zu beschäftigen haben, lautet

$$a \cdot b = c.$$

Anstelle der allgemeinen Zahlensymbole a, b und c kann jede beliebige reelle Zahl gesetzt werden. Wir hätten auch schreiben können

$$b \cdot a = c,$$

denn die Reihenfolge der Faktoren ist beliebig. Diese Tatsache ist beim Rechenstab von großer Bedeutung, weil dann jede Rechnung mit der jeweils zweckmäßigsten Zahl begonnen werden kann. Welches die zweckmäßig zuerst zu verwendende Zahl ist, ergibt sich aus der jeweiligen Aufgabe. Auf alle Fälle wird man aber die Reihenfolge der Faktoren so wählen, daß die Zunge nicht zu weit aus dem Stabkörper herausgeschoben zu werden braucht, damit die sichere Führung der Zunge nicht verlorengeht.

BEISPIEL

53. Es seien $a = 23{,}2$ und $b = 3{,}64$ gegeben.

Wir haben die Strecken für $\lg a$ und $\lg b$ zusammenzusetzen, um die Länge von $\lg c$ zu erhalten. Da die Strecken für die Logarithmen immer von 1 abgemessen werden, stellen wir zunächst auf der Teilung D den Läuferstrich auf die Ziffernfolge 2–3–2–0 ein.
Die Strecke von D 1 bis zum Läuferstrich ist gleichbedeutend mit $\lg a$. Stellt man jetzt die 1 der Teilung C unter den Läuferstrich, dann beginnt am Ende der Strecke $\lg a$ die Strecke von $\lg b$ (Bild 27).

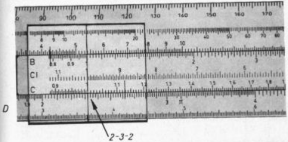


Bild 27

Verschiebt man nun den Läufer so weit nach rechts, daß der Strich über 3–6–4–0 auf der Teilung C zu stehen kommt, dann befindet man sich am Ende der Strecke von $\lg b$ und auch am Ende der Strecke von $\lg c$. Da aber auf dem Stab nicht mehr die Logarithmen, sondern nur die Numeri angegeben sind, können wir im Bild 28, auf D unter dem Läuferstrich sofort die Ziffernfolge des Ergebnisses 8–4–4 ablesen!

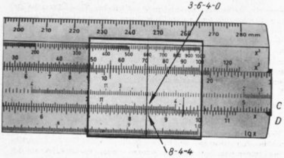


Bild 28

Die Überschlagsrechnung 20 · 4 zeigt uns, daß das Ergebnis
23,2 · 3,64 ≈ 84,4 ist.

Oben war erwähnt worden, daß die Reihenfolge, in der die Faktoren miteinander multipliziert werden, beliebig ist. Beim Rechenstab heißt das, daß die Reihenfolge des Aneinandersetzens der Strecken für die Logarithmen ebenfalls beliebig ist. Überzeugen Sie sich, daß bei dem obigen Beispiel dasselbe Ergebnis entsteht, wenn Sie die 1 von C über 3–6–4–0 von D stellen und unter dem Läuferstrich

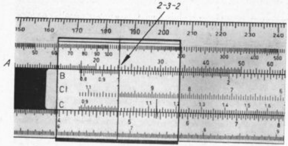


Bild 29

ablesen, wenn Sie diesen vorher über 2–3–2–0 von C stellten! Man hätte die Multiplikation auch mit den Teilungen A und B durchführen können. Dabei muß die Zunge mit B 1 unter 2–3–2–0 von A gestellt werden. Wir wählen unsere Ziffernfolge 2–3–2–0 auf dem rechten Teil der Teilung A (Bild 29). Verschieben wir jetzt den

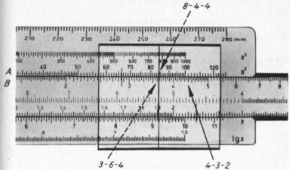


Bild 30

Läufer so weit nach rechts, daß der Strich die Ziffernfolge 3–6–4–0 auf dem linken Teil der Teilung B deckt, dann liest man auf A das Ergebnis 23,2 · 3,64 ≈ 84,4 ab (Bild 30).

Bei dem soeben gerechneten Beispiel schrieben wir

$$23{,}2 \cdot 3{,}64 \approx 84{,}4\,.$$

Wir setzten bewußt das Zeichen „nahezu gleich“, denn eigentlich ist

$$23{,}2 \cdot 3{,}64 = 84{,}448\,.$$

Da die meisten Ergebnisse beim Stabrechnen gerundet sind, soll für die Zukunft vereinbart werden, daß innerhalb der Rechenstabgenauigkeit das Gleichheitszeichen verwendet wird.

BEISPIEL

54. 151,5 · 62,5 = 9475

Würden wir das Beispiel mit den Teilungen A und B rechnen wollen, dann ergäben sich schon beim Einstellen des ersten Faktors Schwierigkeiten. Wir werden deshalb zweckmäßigerweise mit den Teilungen

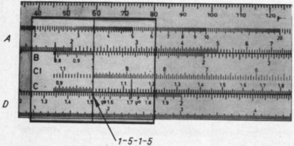


Bild 31

C und D rechnen. Über 1–5–1–5 auf D stellen wir die 1 von C (Bild 31) und verschieben dann den Läufer bis zur Deckung mit 6–2–5 auf C. Unter dem Läuferstrich lesen wir auf D das Ergebnis zunächst in der Ziffernfolge 9–4–7–5 (Bild 32) ab. Die Überschlagsrechnung $1{,}5 \cdot 10^2 \cdot 6 \cdot 10 = 1{,}5 \cdot 6 \cdot 10^3 = 9 \cdot 10^3 = 9000$ zeigt uns, daß das Produkt $151{,}5 \cdot 62{,}5 = \underline{\underline{9475}}$ lauten muß.

Nicht immer läßt sich der bei beiden Beispielen gezeigte Weg der Multiplikation durchführen.

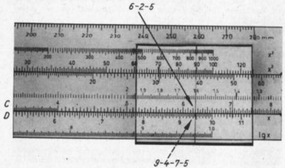


Bild 32

BEISPIEL

55. $9{,}2 \cdot 0{,}1765$

Sie überzeugen sich leicht, daß die Länge des Rechenstabes nicht ausreicht, um beide Strecken für $\lg a$ und $\lg b$ zu addieren. Der Maßstab müßte, wie in 3.2. beschrieben worden ist, verlängert werden. Statt dessen kann man aber mit dem rechten Ende des Rechenstabes arbeiten. Stellen wir C 10 über 9–2–0 der Teilung D (Bild 33), dann ist es dasselbe, als hätten wir C 1 über 9–2–0 des nicht verlängerten Rechenstabes gestellt, den man sich links vom Rechenstab denken muß. An dieses (nicht vorhandene) Ende der Strecke für $\lg a = \lg 9{,}2$

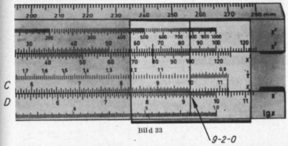


Bild 33

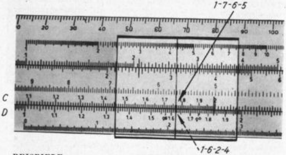
denken wir uns die Strecke für $\lg b$ angesetzt. Wir hätten von C 1 nach rechts bis C 1–7–6–5 zu gehen, bewegen aber jetzt den Läufer von C 10 nach links bis nach C 1–7–6–5 (Bild 34) und lesen unter dem Läuferstrich die Ziffernfolge 1–6–2–4 ab. Die Überschlagsrechnung liefert $10 \cdot 1{,}8 \cdot 10^{-1} = 1{,}8$. Mithin ist das Ergebnis:

$$9{,}2 \cdot 0{,}1765 = \underline{\underline{1{,}624}}.$$

Wir fassen zusammen:

Man multipliziert zwei Faktoren, indem man C 1 über die Ziffernfolge des einen Faktors auf der Grundteilung D stellt, dann den Läuferstrich bis zur Deckung mit der Ziffernfolge des anderen Faktors auf der Grundteilung C bringt und unter dem Läuferstrich auf D das Ergebnis abliest. Würde das Ergebnis außerhalb des rechten Stabendes liegen, dann stellt man C 10 über den einen Faktor auf D, verschiebt den Läufer bis zur Deckung mit der Ziffernfolge des anderen Faktors auf C und liest auf D das Ergebnis ab.

Werden die Teilungen A und B verwendet, dann ergeben sich die entsprechenden Regeln, nur sind bei den obigen Beschreibungen C mit B und D mit A zu vertauschen.



BEISPIELE

Bild 34

56. Der laufende Meter Flacheisen wiegt 1,27 kg. Wieviel wiegen $l_1 = 134$ m?

$$G = l_1 \frac{G}{l} = 134\ \text{m} \cdot 1{,}27\ \text{kg/m} = \underline{\underline{170{,}2\ \text{kg}}}$$

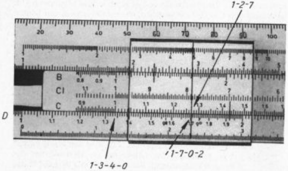


Bild 35

Bild 35 zeigt die Einstellung. Über 1–3–4–0 auf D steht C 1, der Läuferstrich ist über 1–2–7–0 von C gestellt. Unter dem Läuferstrich steht auf D die Ziffernfolge des Ergebnisses.
Stellt man C 1 über 1–2–7–0 von D, dann hat man im Rechenstab eine Berechnungstabelle für die Massen der laufenden Meter Flacheisen. Auf C stehen dann die laufenden Meter, darunter auf D die zugehörenden Massen. Siehe auch 5.5.2.!

57. An einem $r = 26{,}5$ cm langen Hebelarm greift eine Kraft von 18,3 kp an. Welches Drehmoment wird ausgeübt?

$$M = F \cdot r = 18{,}3\ \text{kp} \cdot 26{,}5\ \text{cm} = 485\ \text{kpcm} = \underline{\underline{4{,}85\ \text{kpm}}}$$

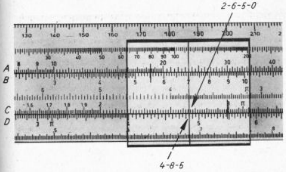


Bild 36

C 1 ist über 1–8–3–0 von D gestellt, und unter 2–6–5–0 von C wird auf D 4–8–5 abgelesen (Bild 36). Die Überschlagsrechnung liefert $20 \cdot 25 = 500$.

58. Ein Gleichstrommotor verbraucht bei einer Spannung von $U = 220$ V einen Strom $I = 7{,}8$ A. Welche Leistung nimmt der Motor auf?

$$P = U \cdot I = 220\ \text{V} \cdot 7{,}8\ \text{A} = 1716\ \text{W} = \underline{\underline{1{,}716\ \text{kW}}}.$$

Bild 37 zeigt die Einstellung: C 10 steht über 220 auf D, der Läuferstrich über 7–8–0 auf C, und auf D wird unter dem Läuferstrich die Ziffernfolge 1–7–1–6 abgelesen. Die Überschlagsrechnung ergibt $2 \cdot 10^2 \cdot 8 = 16 \cdot 10^2 = 1600$.

59. Ein Kraftfahrzeug verbraucht auf 100 km 9,35 l Benzin. Wieviel wird auf einer Strecke von $s_1 = 239$ km gebraucht?

$$V = \frac{V}{s}\, s_1 = \frac{9{,}35\ \text{l}}{100\ \text{km}} \cdot 239\ \text{km} = \underline{\underline{22{,}35\ \text{l}}}.$$

Steht C 10 über 9–3–5 von D, dann kann man unter den km-Angaben auf C den Benzinverbrauch in l auf D ablesen. Siehe auch 5.5.2.!

60. Eine Flasche Apfelsaft kostet 1,49 M. Was hat man für eine Kiste mit 25 Flaschen zu bezahlen?
$25 \cdot 1{,}49 = 37{,}25$. Bei Übung ist die letzte Stelle schätzbar. Man hat $\underline{\underline{37{,}25}}$ M zu bezahlen.

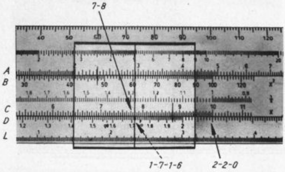


Bild 37

61. Eine Schraubenfeder hat eine Federkonstante von
$k = 4{,}38$ kp/cm.
Welche Kraft ist notwendig, um sie um $x = 4{,}3$ cm auszuziehen?
$F = k \cdot x = (4{,}38\ \text{kp/cm}) \cdot 4{,}3\ \text{cm} = 18{,}83\ \text{kp}$
Die benötigte Kraft beträgt $\underline{\underline{18{,}83\ \text{kp}}}$.

5.1.1.1. Hornerschema

Das Hornerschema ist eine Methode, mit der man z. B. die Werte von ganzen rationalen Funktionen

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

für bestimmte Werte der unabhängigen Veränderlichen x berechnen kann. Hierbei läßt sich in einfacher Weise der Rechenstab verwenden. Mit einer einmaligen Einstellung und einigen Zwischenrechnungen im Kopf kann die Aufgabe rasch erledigt werden.

Nehmen wir an, die ganze rationale Funktion dritten Grades habe den analytischen Ausdruck

$$y = 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5,$$

und für $x = 1{,}5$ sei der Funktionswert y zu berechnen, dann brauchen bei Anwendung des Hornerschemas nicht die Potenzen ermittelt, mit den Faktoren multipliziert und schließlich addiert zu werden. Eine einzige Rechenstabeinstellung genügt zur Berechnung. Dazu schreiben wir uns den analytischen Ausdruck der Funktion um, indem wir der Reihe nach immer wieder die Faktoren x ausklammern. Es wird

$$\begin{aligned} y &= 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5 = \\ &= (2x^2 + 3x - 4)\,x + 5 = \\ &= [(2x + 3)\,x - 4)]\,x + 5. \end{aligned}$$

Die Rechnung beginnt mit einer Multiplikation des Faktors 2 mit x. Zum Ergebnis ist 3 zu addieren und die Summe wieder mit x zu multiplizieren. Zieht man von diesem Produkt 4 ab, multipliziert schließlich die Differenz mit x und addiert am Ende 5, dann ist der Funktionswert y an der Stelle x berechnet.

Wir erkennen, daß bei dem Rechengang immer Multiplikationen mit dem feststehenden Faktor x auszuführen sind. Deshalb genügt es auch, beim Rechenstab C 1 fest über die Ziffernfolge des Faktors x auf D einzustellen.

Führen wir die Rechnung aus, dann ist es zweckmäßig, dies in Form einer Tabelle vorzunehmen. Wir schreiben in der ersten Zeile die Koeffizienten der Potenzen und beginnen bei der höchsten. In die zweite Zeile schreiben wir die Produkte mit dem Faktor x, und in die dritte Zeile kommen die Summen.

Das sieht für die oben angegebene Funktion und den Wert $x = 1{,}5$ folgendermaßen aus:

$$\begin{array}{lcccc} & 2 & 3 & -4 & 5 \\ x = 1{,}5 & - & 3 & 9 & 7{,}5 \\ \hline & 2_{\;1{,}5\cdot 2} & 6_{\;1{,}5\cdot 6} & 5_{\;1{,}5\cdot 5} & \underline{\underline{12{,}5}} \end{array}$$

Der Funktionswert von

$$y(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5$$

an der Stelle $x = 1{,}5$ ist

$$y(1{,}5) = \underline{\underline{12{,}5}}.$$

Natürlich ist das Verfahren nicht auf Funktionen dritten Grades beschränkt. Es kann auf ganze rationale Funktionen beliebig hohen Grades angewendet werden. Dabei muß aber beachtet werden, daß in der ersten Zeile, die die Koeffizienten der x-Potenzen enthält, alle Koeffizienten aufgeschrieben werden, auch wenn der eine oder andere Koeffizient Null sein sollte.

BEISPIEL

62. Es ist der Funktionswert der Funktion

$$y = 3x^4 - 2x^2 + x - 5$$

an der Stelle $x = 1{,}78$ zu berechnen.

$$\begin{array}{l|ccccc} & 3 & 0 & -2 & 1 & -5 \\ x = 1{,}78 & - & \to 5{,}34 & 9{,}50 & \to 13{,}35 & \to 25{,}54 \\ \hline & 3 \; {\scriptstyle 1{,}78 \cdot 3} & 5{,}34 \; {\scriptstyle 1{,}78 \cdot 5{,}34} & 7{,}50 & 14{,}35 & \underline{\underline{20{,}54}} \end{array}$$

Die Funktion hat an der Stelle $x = 1{,}78$ den Wert $\underline{\underline{20{,}54}}$.

5.1.2. Division

Die zu lösende Aufgabe lautet

$$\frac{a}{b} = c.$$

Von der Strecke für $\lg a$ muß die Strecke für $\lg b$ abgezogen werden, damit die Reststrecke mit $\lg c$ für das Ergebnis c übrigbleibt. Sehen wir uns die folgende praktische Rechnung an.

BEISPIEL

63. $a = 0{,}573, \quad b = 2{,}36$

Auf D wird der Läuferstrich über die Ziffernfolge 5–7–3 gestellt und die Zunge so weit nach rechts verschoben, daß die Ziffernfolge 2–3–6–0 auch unter dem Läuferstrich steht (Bild 38).

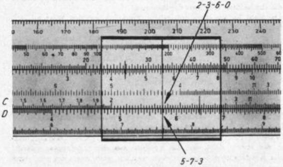


Bild 38

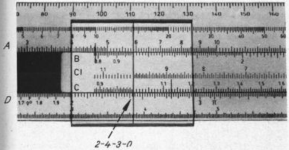


Bild 39

Unter C 1 lesen wir auf D das Ergebnis ab (Bild 39). Die Ziffernfolge lautet 2–4–3–0. Da die Überschlagsrechnung $\frac{0{,}6}{2} = 0{,}3$ liefert, lautet das Ergebnis

$$\frac{0{,}573}{2{,}36} = \underline{\underline{0{,}243}}.$$

Natürlich hätte man auch mit den Teilungen A und B rechnen können.

BEISPIEL

64. Für $a = 74{,}5$ und $b = 4{,}25$ ergibt sich die Einstellung der Bilder 40 und 41.

Über 7–4–5 auf der Teilung A (im rechten Teil) wird der Läuferstrich und darunter 4–2–5 von der Teilung B geschoben (Bild 40). Über B 1 wird auf A (Bild 41) das Ergebnis abgelesen.

$$\frac{74{,}5}{4{,}25} = \underline{\underline{17{,}5}}$$

Auch hier muß noch der Fall besprochen werden, daß die Strecke für den Logarithmus des Nenners größer ist als die für den Logarithmus des Zählers.

BEISPIEL

65. Die Aufgabe für $a = 18{,}85$ und $b = 32{,}3$ soll anhand der Bilder 42 und 43 erläutert werden.

Stellt man über die Ziffernfolge 1–8–8–5 auf D den Läuferstrich und darunter die Zunge so, daß die Ziffernfolge 3–2–3–0 auch unter dem Läuferstrich steht (Bild 42), dann kann man jetzt nicht mehr unter C 1 das Ergebnis ablesen. Denken wir uns aber die D-Skale um ihre ganze Länge nach links verschoben, dann

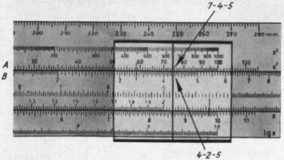


Bild 40

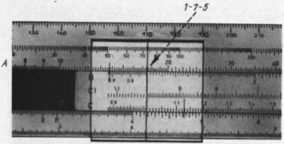


Bild 41

würde unter C 1 dieselbe Ziffernfolge stehen, die jetzt unter C 10 steht. Wir sind deshalb berechtigt, auch unter C 10 abzulesen, und finden (Bild 43) die Ziffernfolge 5–8–3.

Das Ergebnis ist mithin $\frac{18{,}85}{32{,}3} = \underline{\underline{0{,}583}}$.

Aus dem Gesagten ergibt sich, daß der Quotient bei jeder Zungeneinstellung ablesbar ist. Bei der Multpilikation kann man in manchen Fällen das Ergebnis nicht ablesen, weil die Teilung nicht ausreicht.

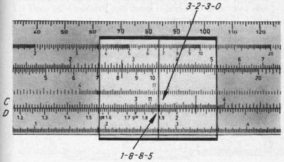


Bild 42

Dann muß die Zunge umgesetzt werden. Dies ist bei der Division nie notwendig. C 1 oder C 10 steht sicher über Werten der D-Teilung, so daß die Ziffernfolge des Ergebnisses in jedem Falle ablesbar ist. Das ist auch der Grund, warum man – wie später noch gezeigt werden muß – gern Multiplikationen in Divisionen umwandelt.

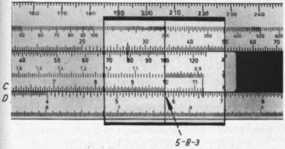


Bild 43

Fassen wir zusammen:

Divisionen werden dadurch ausgeführt, daß man den Läuferstrich über die Ziffernfolge des Zählers auf D stellt und dann die Zunge so weit verschiebt, daß die Ziffernfolge des Nenners ebenfalls unter dem Läuferstrich steht. Das Ergebnis wird unter C 1 oder C 10 auf D abgelesen.

Verwendet man die Teilungen A und B, dann ist entsprechend zu verfahren:

Unter die Ziffernfolge des Zählers auf A wird die Ziffernfolge des Nenners auf B geschoben und über B 1 oder B 10 oder B 100 auf A die Ziffernfolge des Ergebnisses abgelesen.

BEISPIELE

66. Wie groß ist die Beschleunigung, die ein Personenzug hat, wenn beim Anfahren in 150 s die Geschwindigkeit auf 9 m/s gesteigert werden kann!

$$a = \frac{v}{t} = \frac{9\ \text{m/s}}{150\ \text{s}} = \underline{\underline{0{,}06\ \text{m/s}^2}}$$

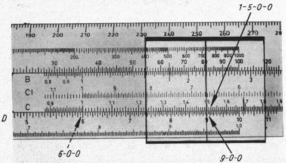


Bild 44

Bild 44 zeigt die Einstellung: Über 9–0–0 auf D steht 1–5–0–0 von C, und unter C1 wird 6–0–0 abgelesen.

Die Überschlagsrechnung ergibt

$$\frac{9}{1{,}5 \cdot 10^2} = \frac{9}{1{,}5} \cdot 10^{-2} = 6 \cdot 10^{-2} = 0{,}06.$$

67. Um einen Körper $h = 0{,}76$ m hoch zu heben, mußte eine Arbeit von 17,35 kpm aufgewendet werden. Welches Gewicht hat der Körper?

$$G = \frac{W}{h} = \frac{17{,}35\ \text{kpm}}{0{,}76\ \text{m}} = \underline{\underline{22{,}85\ \text{kp}}}$$

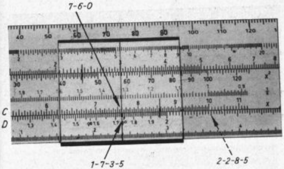


Bild 45

Aus Bild 45 entnehmen wir: Über 1–7–3–5 von D steht 7–6–0 von C. Unter C 10 wird 2–2–8–5 abgelesen.

68. An eine Spannungsquelle von $U = 220$ V ist ein Widerstand von $R = 900\ \Omega$ angeschlossen. Mit welcher Stärke I fließt der Strom?

$$I = \frac{U}{R} = \frac{220\ \text{V}}{900\ \Omega} = \underline{\underline{0{,}2445\ \text{A}}}$$

Über 2–2–0–0 auf D ist 9–0–0 von C gestellt worden. Unter C 10 wird 2–4–4–5 abgelesen (Bild 46).

ÜBUNGSAUFGABEN (Lösungen siehe S. 238)

1. Ein Stahlstab von $A = 15{,}3\ \text{mm}^2$ Querschnitt wird durch eine Kraft von $F = 10830$ kp gedehnt. Welche Zugspannung tritt dabei auf?

2. Der Motor eines Kraftwagens entwickelt eine Leistung von 42 PS. An den Antriebsrädern wird aber nur eine Leistung von 39,75 PS gemessen. Welchen Wirkungsgrad hat das Getriebe?

3. Das Statistische Jahrbuch der DDR zeigt 1962 bei 17137000 Einwohnern einen Stand der Spareinlagen in Höhe von 18636200000 M. Wie hoch ist der durchschnittliche Sparbetrag eines Bürgers der DDR?

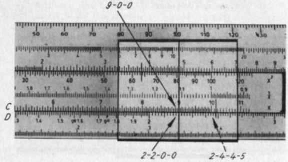


Bild 46

5.1.3. Verwendung der Reziprokteilung CI

Zwischen den Teilungen B und C liegt auf der Zunge des Rechenstabes meist die Teilung CI. Sie ist zur Teilung C gegenläufig, d. h., sie beginnt links mit 10 und endet rechts bei 1. Sonst sind die Teilungen C und CI im Aufbau gleich. Über 2 von der C-Teilung liegt 5 von der CI-Teilung, über 4 liegt 25, und über 8 liegt 1,25. Das Produkt der auf C und CI genau übereinanderliegenden Ziffernfolgen ergibt, wenn als Stellenwert Einer genommen werden, in jedem Fall 10. Da beim Rechenstab immer ohne Berücksichtigung der Zehnerpotenzen gearbeitet wird, könnten wir auch sagen, das Produkt übereinanderliegender Zahlen ergibt 1, oder die auf C und CI untereinanderstehenden Ziffernfolgen sind zueinander reziprok.

Sollen zu irgendwelchen Zahlen die Kehrwerte bestimmt werden, d. h., ist

$$\frac{1}{a} = b$$

zu bestimmen, so muß, wenn die Reziprokteilung nicht vorhanden ist, mit einer normalen Division mit den Teilungen C und D gearbeitet werden. Die Bilder 47 und 48 zeigen, wie man den Kehrwert von

$a = 1{,}65$ berechnet. Über D 1 wird die Ziffernfolge 1–6–5–0 von C gestellt (Bild 47). Unter C 10 liest man auf D (Bild 48) ab:

$$\frac{1}{1{,}65} = 0{,}606.$$

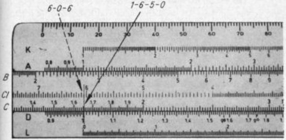


Bild 47

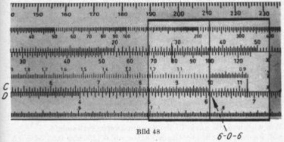


Bild 48

Natürlich hätte man auch 1–6–5–0 von C über D 10 stellen können Dann wäre unter C 1 abzulesen gewesen. Auch die Teilungen A und B hätten zur Bildung von Reziprokwerten verwendet werden können. Auf Bild 29 war B 1 unter 2–3–2–0 von A gestellt worden. Bei Bild 30 kann man unter A 100 ablesen, daß der Kehrwert von 23,2

$$\frac{1}{23{,}2} = 0{,}0432 \text{ beträgt und daß umgekehrt}$$

$$\frac{1}{0{,}432} = 23{,}2 \text{ ist.}$$

Wir halten fest:

> Die Kehrwerte von Zahlen, die über D 1 (D 10) stehen, sind unter C 10 (C 1) auf D zu finden. Auf der B-Teilung sind unter A 100 (A 10 oder A 1) die Kehrwerte der Zahlen zu finden, die über B 1 (B 10 oder B 100) stehen.

Wir werden auf diese Art der Berechnung von Kehrwerten in 5.6.2. noch einmal zurückkommen.
Einfacher ist die Berechnung der Kehrwerte, wenn der Rechenstab eine Reziprokteilung hat.
Bild 49 zeigt den Rechenstab in der Grundstellung; C 1 und D 1 sind zur Deckung gebracht. Über 1–6–5 von C steht der Läuferstrich. Unter ihm ist auf CI (Bild 49) der Kehrwert 6–0–6 abzulesen.
Prüfen Sie nach, daß über der Ziffernfolge 6–0–6 von C auf CI die Ziffernfolge 1–6–5 zu finden ist.

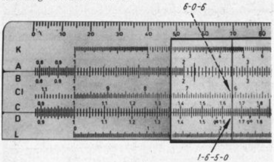


Bild 49

Wie wird nun die Skale CI der Reziprokwerte verwendet?
Soll irgendeine Zahl mit einem Faktor wie 0,125 oder 0,25 oder 0,5 malgenommen werden, dann wird ein einigermaßen geübter Rechner diese Multiplikation nicht ausführen, sondern die ursprünglich zu multiplizierende Zahl durch 8, 4 oder 2 teilen, weil das einfacher ist. Aus einer Multiplikation ist eine Division mit dem Kehrwert des Faktors geworden. Umgekehrt wird man, wenn durch 0,125 oder 0,25 oder 0,5 zu teilen ist, nicht durch $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}$ oder $\frac{1}{2}$ teilen, sondern mit 8, 4 oder 2 malnehmen. Hier ist also aus einer Division eine Multiplikation mit dem Kehrwert geworden.

Durch Anwendung der Reziprokteilung sind wir mithin stets in der Lage, aus einer Multiplikation eine Division zu machen und umgekehrt.
Das ist ein Vorteil, der zunächst nicht so einfach zu erkennen ist, aber spätestens in 5.1.4. Verwendung finden wird. Es läßt sich nämlich bei geschicktem Arbeiten mit der Reziprokteilung ein häufiges Verschieben der Zunge vermeiden. Da sich der Läufer leichter verschieben und einstellen läßt als die Zunge, wird es dazu beitragen, Ungenauigkeiten zu vermeiden, wenn anstelle der Zunge der Läufer bewegt wird.
Außerdem hat die Division, wie bereits auf Seite 70 ausgeführt worden ist, den Vorteil, daß man immer, unter C 1 oder C 10, das Ergebnis ablesen kann.

BEISPIELE

69. Es soll $a \cdot b = c$, $40750 \cdot 0{,}0284 = \underline{\underline{1157}}$ gerechnet werden.

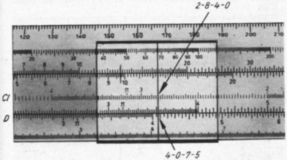


Bild 50

Der Läuferstrich wird über 4–0–7–5 von D gestellt und die Zunge so darübergeschoben, daß 2–8–4–0 von CI ebenfalls unter dem Läuferstrich steht (Bild 50). Unter C 1, das ist dasselbe wie CI 10, lesen wir auf D das Ergebnis 1–1–5–7 (Bild 51) ab.
Die Überschlagsrechnung ergibt $4 \cdot 10^4 \cdot 3 \cdot 10^{-2} = 12 \cdot 10^2 = 1200$.

70. $1107 \cdot 1{,}435 = \underline{\underline{1590}}$ (vgl. Bild 52).

Über 1107 auf D ist der Läuferstrich und 1–4–3–5 von CI ge-

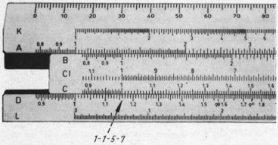


Bild 51

bracht worden. Unter C 10 (das ist auch CI 1) steht das Ergebnis 1–5–9–0.

Wir wollen uns den Vorteil der Umwandlung einer Multiplikation in eine Division mit dem Kehrwert noch an einem weiteren Beispiel ansehen.

71. 7,42 · 64,8

Beim Lösen dieser Aufgabe mit dem Rechenstab ist C 1 über 7–4–2 auf D zu stellen. Diese Aufgabe hat man mit größter

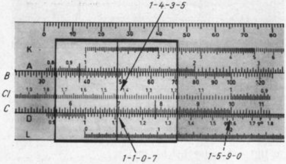


Bild 52

Sorgfalt ausgeführt, verschiebt den Läufer nach rechts und stellt fest, daß man den Läuferstrich gar nicht über 6–4–8 von C stellen kann. Auch die Rechnung 64,8 · 7,42 würde zu keinem Erfolg führen. Man muß also die Zunge nach links schieben, bis C 10 über 7–4–2 oder 6–4–8 steht. Die Einstellung der Endmarke der C-Teilung mußte zweimal, das erste Mal umsonst, vorgenommen werden. Das kann in keinem Fall eintreten, wenn man anstelle 7,42 · 64,8 die Divisionsaufgabe

$$7{,}42 : \frac{1}{64{,}8}$$

mit den Teilungen D und CI ausführt. Stellt man 6–4–8 von CI über 7–4–2 von D, dann muß an einer Stelle, entweder unter C 1 oder C 10, das Ergebnis ablesbar sein. In unserem Falle (Bild 53) lesen wir unter C 1 bzw. CI 10 ab:

$$7{,}42 \cdot 64{,}8 = \underline{\underline{481}}.$$

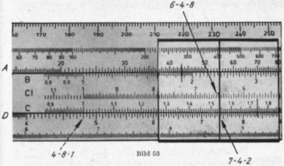


Bild 53

Über die Umwandlung einer Division in eine Multiplikation braucht an sich nichts Besonderes gesagt zu werden, da nach dem oben Gesagten klar sein dürfte, daß dabei kein Vorteil auftreten kann. Trotzdem soll der Vollständigkeit halber – die Umwandlung kann bei zusammengesetzten Rechnungen doch einmal auftreten – folgendes Beispiel betrachtet werden.

BEISPIEL

72. $\frac{29{,}3}{9{,}57} = \underline{\underline{3{,}06}}$

Wir rechnen $29{,}3 \cdot \frac{1}{9{,}57}$ und führen die Rechnung mit der Reziprokteilung durch. CI 10 wird mittels des Läuferstriches, den wir hier nicht entbehren können, über 2–9–3 von D gestellt. Unter 9–5–7 von CI (Bild 54) lesen wir auf D das Ergebnis ab.

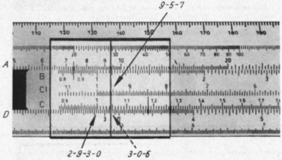


Bild 54

Wir fassen zusammen:

Bei der Verwendung der Reziprokteilung CI wird aus einer Multiplikation eine Division. Umgekehrt kann man mit Hilfe dieser Teilung aus einer Division eine Multiplikation machen, doch wird dieser Fall selten angewandt.

Man kann sich merken:

Stellt man stets Zahl unter Zahl, dann führt man
bei Verwendung der Teilungen C und D eine Division,
bei Verwendung der Teilungen D und CI eine Multiplikation aus.

BEISPIELE

73. Durch einen Widerstand von $R = 150\ \Omega$ fließt ein Strom von $I = 0{,}8$ A. Welche Spannung U liegt an?
Aus $U = IR$ ergibt sich $U = 0{,}8\ \text{A} \cdot 150\ \Omega = \underline{\underline{120\ \text{V}}}$.

Wir rechneten mit der Reziprokskale. Im Bild 55 steht über 1–5–0–0 von D der Läuferstrich und 8–0–0 von CI. Unter C 1 bzw. CI 10 ist die Ziffernfolge 1–2–0–0 abzulesen.

74. Welche Arbeit W wird vollbracht, wenn man mit einer Kraft $F = 9{,}36$ kp eine Last um $h = 8{,}59$ m hochhebt?

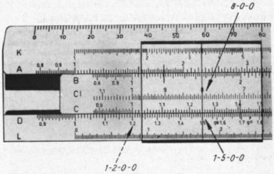


Bild 55

Es ergibt sich
$W = F \cdot h = 9{,}36\ \text{kp} \cdot 8{,}59\ \text{m} = \underline{\underline{80{,}4\ \text{kpm}}}.$

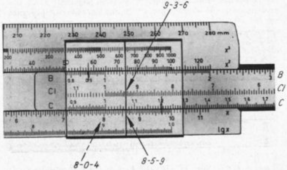


Bild 56

Es wurde mit der Reziprokteilung gerechnet. Bild 56 zeigt die Einstellung. Über 8–5–9 von D steht 9–3–6 von CI. Unter CI 10 bzw. C 1 lesen wir die Ziffernfolge 8–0–4 ab.

ÜBUNGSAUFGABEN (Verwenden Sie die Reziprokteilung!)

4. Welche Strecke kann ein Radfahrer, der eine Durchschnittsgeschwindigkeit von $v = 14{,}3\,\mathrm{km/h}$ fährt, in 4,75 h zurücklegen?
5. Bei einem Vorgelege ist das Übersetzungsverhältnis 1,75 : 1. Wie groß muß das getriebene Rad sein, wenn das treibende einen Durchmesser von 328 mm hat!
6. Kies habe eine Dichte von $\varrho = 2{,}3 \cdot 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$. Welche Masse haben $19{,}75\,\mathrm{m^3}$?

5.1.4. Mehrfache Multiplikationen

5.1.4.1. Drei Faktoren

Der Vorteil der Reziprokteilung CI wird besonders erkennbar, wenn mehrfache Multiplikationen wie

$$a \cdot b \cdot c = d$$

auszuführen sind.
Durch die Verwendung der Reziprokteilung kann eine Verschiebung der Zunge eingespart werden.

BEISPIEL

75. $1{,}56 \cdot 9{,}25 \cdot 1{,}37 = \underline{\underline{19{,}77}}$

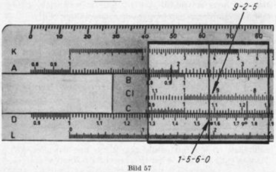


Bild 57

Der erste Teil der Aufgabe, die Multiplikation $1{,}56 \cdot 9{,}25$, soll mit den Teilungen D und CI gerechnet werden (Bild 57). Über 1–5–6–0 auf D wird 9–2–5 von CI gestellt. Das Produkt ist unter C 1 abzulesen. Jetzt kann sofort die Multiplikation des Produktes mit dem dritten Faktor c ausgeführt werden. Es braucht nur noch der Läufer bis nach 1–3–7 auf C verschoben zu werden (Bild 58). Unter dem Läuferstrich wird auf D das Ergebnis 1–9–7–7 abgelesen.

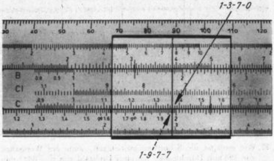


Bild 58

Die ganze Rechnung erfordert nur eine einmalige Einstellung am Anfang. Hätte man nur mit den Teilungen C und D gearbeitet, dann hätte die Zunge zweimal verschoben werden müssen. Da bei der Multiplikation bekanntlich die Reihenfolge der Faktoren beliebig ist, wird man sich bei der Verwendung der Reziprokteilung stets einen solchen Faktor als zweiten aussuchen, daß die zweite Multiplikation mit nur einer Läufereinstellung durchführbar ist.

BEISPIELE

76. Eine Baugrube mit senkrechten Wänden soll nach folgenden Maßen ausgehoben werden: Länge $l = 15{,}45$ m
Breite $b = 6{,}85$ m
Tiefe $h = 2{,}25$ m

Wieviel Kubikmeter sind auszuheben?

$$V = l \cdot b \cdot h = 15{,}45\,\mathrm{m} \cdot 6{,}85\,\mathrm{m} \cdot 2{,}25\,\mathrm{m} = \underline{\underline{238\,\mathrm{m}^3}}$$

Der Rechenweg ist: 6–8–5 von CI wird über 1–5–4–5 von D gestellt und der Läuferstrich anschließend bis 2–2–5–0 von C verschoben. Unter dem Läuferstrich steht auf D das Ergebnis (Bild 59).

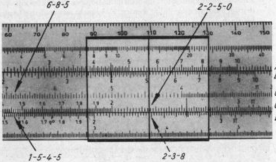


Bild 59

77. Wie groß ist die Schnittgeschwindigkeit, wenn ein Werkstück von 196 mm Durchmesser bei einer Drehzahl von $n = 362\ ^1/\text{min}$ bearbeitet wird? (Bild 60)

$$v = \pi \cdot d \cdot n = \pi \cdot 196 \cdot 362\ \frac{\text{mm}}{\text{min}} = 223\,000\ \frac{\text{mm}}{\text{min}} = 223\ \frac{\text{m}}{\text{min}}$$

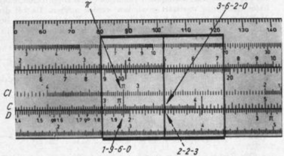


Bild 60

78. Ein Rundeisenstab von $q = 4{,}35\ \text{cm}^2$ Querschnitt hat eine Länge von $l = 2{,}36$ m. Welche Masse hat er, wenn die Dichte $\varrho = 7{,}3\ \text{g/cm}^3$ beträgt? (Bild 61)

$$m = q \cdot l \cdot \varrho = 4{,}53\ \text{cm}^2 \cdot 236\ \text{cm} \cdot 7{,}3\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} =$$
$$= 7810\ \text{g} = \underline{\underline{7{,}81\ \text{kg}}}$$

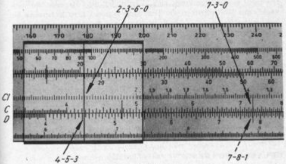


Bild 61

ÜBUNGSAUFGABEN

7. Welche Wärmemenge wird benötigt, um $m = 438$ g Glas der spezifischen Wärmekapazität $c = 0{,}174$ cal/g grd um $\Delta t = 128$ grd zu erwärmen?

8. Welche Wärmemenge in Kilokalorien erzeugt ein elektrischer Schmelzofen, der bei einer Leistung von $P = 4{,}35$ kW während einer Zeit $t = 2{,}25$ h brennt? (1 kWh = 860,1 kcal)

9. Welchen Flächeninhalt hat der Mantel eines geraden Kreiskegels mit einem Radius $r = 5{,}4$ cm und einer Mantellinie $s = 7{,}38$ cm?

Hier läßt sich ein Umsetzen der Zunge nicht vermeiden. Ohne Umsetzen der Zunge kann man mit den Teilungen DF, CF und CIF arbeiten. Siehe dazu 5.9.!

10. 362 · 0,0239 · 18,66

11. 7,42 · 124,3 · 0,416

12. 29,3 · 0,00606 · 0,535

5.1.4.2. Mehr als drei Faktoren

Sind mehr als drei Faktoren vorhanden, ist also ein Produkt der Form $a \cdot b \cdot c \cdot \ldots \cdot m \cdot n$
zu bilden, so würden, wenn nur mit den Teilungen C und D gerechnet werden kann, so viele Verschiebungen der Zunge notwendig sein, wie Faktoren zu a hinzukommen. Das bringt natürlich immer eine gewisse Ungenauigkeit mit sich. Verwendet man dagegen wechselweise zum Multiplizieren die Teilungen C und CI, so kann man bei geschickter Reihenfolge der Multiplikationen die Anzahl der Zungenverschiebungen auf die Hälfte herabdrücken.

BEISPIEL

79. $27{,}9 \cdot 0{,}0415 \cdot 323 \cdot 0{,}1165 \cdot 64{,}3 = \underline{\underline{2805}}$

Man wird zweckmäßigerweise so rechnen, daß 4–1–5 von CI über 2–7–9–0 auf D gestellt wird. Danach wird der Läufer über 3–2–3–0 von C geschoben. Jetzt erst kommt wieder eine Zungenverschiebung, und zwar so, daß 1–1–6–5 von CI unter den Läuferstrich kommt. Nach einer nochmaligen Verschiebung des Läufers über 6–4–3 von C liest man unter dem Strich auf D das Ergebnis 2–8–0–5 ab.

ÜBUNGSAUFGABEN

13. $4{,}55 \cdot 0{,}211 \cdot 196{,}6 \cdot 0{,}0747 \cdot 3{,}79$
14. $0{,}00675 \cdot 1{,}985 \cdot 24{,}7 \cdot 38{,}8 \cdot 13{,}45$

5.1.5. Kombinierte Multiplikation und Division

5.1.5.1. Produkt im Zähler

Es sollen Aufgaben der Form

$$\frac{a \cdot b}{c} = d$$

gelöst werden. Hier kann man mit den Grundteilungen C und D allein arbeiten. Dabei ist es stets vorteilhaft, mit der Division zu beginnen. Welcher der beiden Faktoren im Zähler der Dividend der Divisionsaufgabe werden soll, entscheidet die Aufgabe. Man sollte aber stets den wählen, der eine Umstellung der Zunge vermeiden läßt. Das wird nicht in allen Fällen möglich sein.

BEISPIEL

80. $\dfrac{8{,}1 \cdot 8{,}5}{9{,}5} = \underline{\underline{7{,}25}}$

Die Division $\dfrac{8{,}1}{9{,}5}$ ist in Bild 62 dargestellt. Über 8–1–0 auf D steht 9–5–0 von C. Das Zwischenergebnis wäre unter C 10 abzulesen.

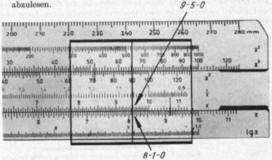


Bild 62

Es interessiert jetzt nicht, kann aber sofort zum Ausrechnen der nachfolgenden Multiplikation verwendet werden. Das zeigt Bild 63.
Da ist der Läufer über 8–5–0 von C verschoben. Unter dem Läuferstrich steht auf D das Ergebnis 7–2–5.

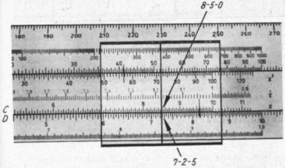


Bild 63

Ist die letzte Multiplikation mit der Zungenstellung der Division nicht ausführbar, weil der zweite Faktor im Zähler nicht mit der Skale D zur Deckung gebracht werden kann, dann stehen zwei Möglichkeiten zur Verfügung. Man kann entweder die Zunge umsetzen und wieder multiplizieren oder aber die Multiplikation durch eine Division mit der Skale CI ersetzen.

BEISPIEL

81. $\frac{42{,}7 \cdot 0{,}362}{11{,}3} = \underline{\underline{1{,}368}}$

Die Division $\frac{42{,}7}{11{,}3}$ liefert das Zwischenergebnis 3–7–8. Bild 64 zeigt, wie die Zunge umgesetzt worden ist und unter 3–6–2 von

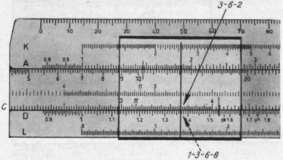


Bild 64

C auf D das Ergebnis 1–3–6–8 abgelesen werden kann. Bild 65 dagegen zeigt, daß 3–6–2 von CI über das Zwischenergebnis gestellt wurde. Das Endergebnis 1–3–6–8 steht dann auf D unter C 1.

ÜBUNGSAUFGABEN

15. $\frac{0{,}535 \cdot 0{,}024}{33{,}1}$

16. $\frac{565 \cdot 15{,}8}{0{,}446}$

17. $\frac{6{,}89 \cdot 32{,}5}{0{,}795}$

18. $\frac{14{,}3 \cdot 0{,}108}{1{,}97}$

19. $\frac{0{,}625 \cdot 9{,}16}{1{,}41}$

20. $\frac{718 \cdot 4{,}85}{212}$

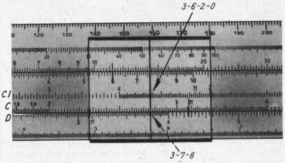


Bild 65

5.1.5.2. Produkt im Nenner

Wenn Aufgaben der Form

$$\frac{a}{b \cdot c} = d$$

vorliegen, dann wird es auch wieder darauf ankommen, Zungenverschiebungen zu vermeiden, die mehr Ungenauigkeit mit sich bringen als eine Läuferverschiebung. Es wird deshalb zweckmäßig sein, mit einer Division unter Verwendung der Teilungen C und D zu beginnen und die zweite Division in eine Multiplikation mit der Teilung CI zu verwandeln. Dann kommt man mit je einer Zungen- und Läufereinstellung aus.

BEISPIEL

82. $\frac{53{,}5}{87{,}5 \cdot 0{,}01375} = \underline{\underline{44{,}5}}$

Vergleiche Bild 66. Über 5–3–5 von D wird 8–7–5 von C geschoben. Unter C 10 könnte man auf D das Ergebnis dieser

Division (Pfeil ohne Bezeichnung) ablesen. Jetzt wird der Läufer bis 1–3–7–5 von CI verschoben. Unter ihm liest man auf D das Ergebnis 4–4–5 ab.

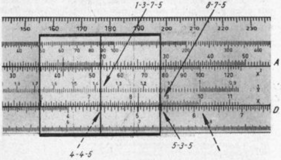


Bild 66

Auch hier wird es mitunter andere Rechenwege geben, die zu bevorzugen sind. Beim obigen Beispiel spielte die Reihenfolge keine ausschlaggebende Rolle. Hätte man zuerst durch 0,01375 geteilt, dann wäre die anschließende Division durch 87,5 mit der gleichen Zungenstellung möglich gewesen.
Läßt sich die vorgeschlagene Multiplikation mit dem Kehrwert des zweiten Faktors im Nenner nicht mit der Teilung CI durchführen, dann ist eine Zungenumstellung unvermeidbar.

BEISPIEL

83. $\frac{53{,}5}{87{,}5 \cdot 7{,}45} = \underline{\underline{0{,}0821}}$

Man wird zunächst wieder 53,5 durch 87,5 teilen. Jetzt ist aber ein Malnehmen mit $\frac{1}{7{,}45}$ nicht mehr sofort möglich. Dann setzt man entweder die Zunge um und multipliziert wieder mit $\frac{1}{7{,}45}$, oder man schiebt 7–4–5 von C über das Zwischenergebnis und liest unter C 10 auf D das Ergebnis ab wie bei einer gewöhnlichen Division.

ÜBUNGSAUFGABEN

21. $\frac{33{,}7}{2{,}08 \cdot 4{,}67}$ 22. $\frac{6{,}48}{0{,}502 \cdot 19{,}35}$ 23. $\frac{0{,}1865}{25{,}5 \cdot 21{,}9}$

24. $\frac{4{,}32}{60{,}6 \cdot 8{,}95}$ 25. $\frac{701}{39{,}1 \cdot 1{,}535}$ 26. $\frac{2690}{37{,}2 \cdot 0{,}815}$

5.1.5.3. Mehrere Faktoren im Zähler und Nenner

Aus dem bisher Gesagten ist zu erkennen, daß die unvermeidbaren Fehler beim Stabrechnen um so kleiner werden, je weniger Verschiebungen der Zunge und des Läufers vorgenommen worden sind. Diese lassen sich jedoch nicht unter ein Mindestmaß herabdrücken, weil sie von der Anzahl der im zu berechnenden Ausdruck vorkommenden Zahlen abhängen. Es lassen sich aber bei richtiger Ausnutzung der Teilungen die Verschiebungen der Zunge etwa auf die Hälfte herabdrücken. Das ist besonders wichtig, da die Zunge immer schwerer verschiebbar ist als der Läufer. Deshalb sind auch bei Zungenverschiebungen die Fehlerquellen größer als bei Bewegungen des Läufers.
Beim Ausrechnen von Produkten oder Quotienten wird man also abwechselnd multiplizieren und dividieren. Es wird auch dividiert, wenn man beim Stabrechnen mit Werten der CI-Teilung multipliziert, und umgekehrt wird multipliziert, wenn man mit Werten der CI-Teilung dividiert.
Eine allgemeingültige Anweisung über die Reihenfolge der zu erledigenden Rechenoperationen kann nicht gegeben werden. Es sollte jedoch immer mit einer Division begonnen werden. Danach sollte man unter günstigster Ausnutzung der Teilungen C, D und CI immer abwechselnd einen Faktor aus dem Zähler und Nenner in die Rechnung einbeziehen. Vorteilhaft ist es, wenn man sich bei umfangreichen Rechnungen (viele Faktoren im Zähler und Nenner) ein Programm für den Rechenweg macht.

ÜBUNGSAUFGABEN

27. $\frac{1{,}435 \cdot 20{,}9 \cdot 0{,}347}{4{,}16 \cdot 0{,}525}$ 28. $\frac{32{,}1 \cdot 0{,}485}{17{,}95 \cdot 0{,}615 \cdot 8{,}27}$

29. $\frac{72{,}3 \cdot 16{,}1 \cdot 0{,}935}{27{,}4 \cdot 3{,}03 \cdot 0{,}0428}$

5.2. Quadrate

5.2.1. Quadrieren

Während die Teilungen C und D von 1 bis 10 laufen, reichen die Teilungen A und B von 1 bis 100. Sie sind ebenfalls im logarithmischen Maßstab geteilt, nur sind jetzt äquivalente Teilungen auf derselben Länge von 25 cm untergebracht. Eine der Teilungen von A ist mithin halb so lang wie die Teilung D. Geht man also von D 1 um die Strecke $\lg a$ nach rechts, dann ist man auf der Teilung A von A 1 aus um $2 \lg a = \lg a^2$ nach rechts gegangen. Das heißt aber nichts anderes, als daß über einer Zahl a auf D auf A die dazugehörende Quadratzahl a^2 steht. Dasselbe gilt für die Teilungen C und B.
Der Übergang von einer unteren Teilung zu einer oberen geschieht mit dem Läuferstrich. Beim Übergang von D nach A kann man auch die Enden der Teilungen C und B verwenden, denn diese stehen ja auch genau übereinander. Auf der oberen Teilung erhält man eine Ziffernfolge, deren Stellenwert durch eine Überschlagsrechnung (nach Abspaltung der Zehnerpotenzen) ermittelt wird.

Bild 67 zeigt das Rechenbeispiel

$$a = 3 \qquad a^2 = 3^2 = 9.$$

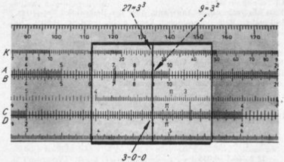


Bild 67

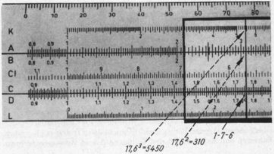


Bild 68

84. $17{,}6^2 = \underline{\underline{310}}$ (Bild 68)

Als Überschlagsrechnung genügt: $(2 \cdot 10)^2 = 4 \cdot 100 = 400$.

85. $37{,}4^2 = \underline{\underline{1400}}$

Die Überschlagsrechnung ergibt $40^2 = (4 \cdot 10)^2 = 1600$.

86. $924^2 = \underline{\underline{855\,000}}$

Die Überschlagsrechnung ergibt $(9 \cdot 10^2)^2 = 81 \cdot 10^4 = 810000$.

87. $0{,}214^2 = \underline{\underline{0{,}0458}}$

Die Überschlagsrechnung ergibt $(2 \cdot 10^{-1})^2 = 4 \cdot 10^{-2} = 0{,}04$.

88. $0{,}006\,54^2 = \underline{\underline{0{,}0000428}}$

Die Überschlagsrechnung ergibt $(6 \cdot 10^{-3})^2 = 36 \cdot 10^{-6} = 0{,}000036$.

ÜBUNGSAUFGABEN

30. $8{,}25^2$	31. $0{,}902^2$
32. $166{,}5^2$	33. $0{,}003\,47^2$
34. $44{,}4^2$	35. 1025^2

Bisher wurde das Quadrat einer Zahl durch den Übergang von den Teilungen D nach A bzw. C nach B gebildet. Man kann aber auch das Quadrat dadurch errechnen, daß man die Basis zweimal als Faktor setzt, daß man also eine Multiplikation vornimmt. Diesen umständlichen Weg wird man aber nur wählen, wenn eine größere Genauigkeit notwendig ist. Sind aber viele Quadrate zu bilden, dann ist der Übergang nach A bzw. B bestimmt zeitsparend.

5.2.2. Quadrieren, verbunden mit Multiplikation und Division

Nachfolgend sollen einige Verbindungen des Quadrierens mit Rechenoperationen wie Multiplikation und Division, die in der Praxis häufiger vorkommen, erörtert und an einigen Beispielen durchgerechnet werden.

5.2.2.1. Quadrat eines Produktes

Es soll ein Produkt quadriert, also

$$(a \cdot b)^2 = c$$

berechnet werden. Selbstverständlich ist die Multiplikation $a \cdot b$ mit den Teilungen D und CI durchzuführen und erst danach durch Übergang zu A oder B das Quadrat zu bilden. Treten noch weitere Faktoren auf, dann ist mit den Teilungen A und B weiterzurechnen.

BEISPIEL

89. (Bild 69). Es soll das Volumen eines zylinderförmigen Ringes (Torus) berechnet werden, dessen Zylinderdurchmesser $d = 0{,}7$ cm und dessen Ringdurchmesser $D = 4$ cm beträgt.

Das Volumen beträgt $V = \dfrac{\pi^2 d^2 D}{4}$.

Werden die Zahlenwerte und Maßeinheiten eingesetzt, dann ergibt sich

$$V = \frac{\pi^2 \cdot 0{,}7^2 \cdot 4}{4}\ \text{cm}^3 = \pi^2 \cdot 0{,}7^2\ \text{cm}^3 = (\pi \cdot 0{,}7)^2\ \text{cm}^3 = \underline{\underline{4{,}84\ \text{cm}^3}}.$$

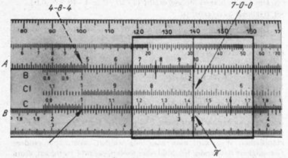


Bild 69

Über π von D steht 7–0–0 von CI. Der Pfeil ohne Zahlenangabe zeigt zu dem Produkt mit der Ziffernfolge 2–2–0. Davon wird durch den Übergang zu A das Quadrat gebildet. Hier ist der Läuferstrich nicht notwendig, da C 1, CI 10 und B 1 genau übereinanderstehen. Das Ergebnis 4–8–4 steht auf A über B 1.

5.2.2.2. Quadrat eines Quotienten

Es soll ein Quotient quadriert, also

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = c$$

berechnet werden. Auch hier wird die Division zunächst mit den Teilungen C und D vorgenommen und danach erst quadriert. Treten noch Faktoren zu dem Quadrat, so ist wieder mit A und B weiterzurechnen.

BEISPIEL

90. $\left(\dfrac{0{,}483}{3{,}27}\right)^2 = \underline{\underline{0{,}0218}}$

Über 4–8–3 von D steht 3–2–7 von C. Unter C 1 können wir als Zwischenergebnis den Quotienten ablesen. Über B 1 steht auf A die Ziffernfolge 2–1–8 des Ergebnisses. Die Überschlagsrechnung ergibt $\dfrac{0{,}45}{3} = 0{,}15$ und $0{,}15^2 = 0{,}0225$.

5.2.2.3. Quadrat und Faktor

Ein Quadrat soll mit einer Zahl multipliziert, also

$$a^2 \cdot b = c$$

gerechnet werden. Jetzt kann die Produktbildung nicht mehr mit C und D vorgenommen werden, weil sonst beim Übergang von D nach A der Faktor b ebenfalls quadriert würde.

Es wird deshalb a auf D eingestellt. Die Einstellung kann je nach der Zweckmäßigkeit hinsichtlich der nachfolgenden Multiplikation mit C 1 oder C 10 erfolgen. Dann steht über B 1 oder B 100 auf A der Wert von a^2. Jetzt braucht nur noch der Läufer so weit nach rechts oder links verschoben zu werden, daß er auf B die Ziffernfolge von b deckt. Dann steht auf A unter dem Läuferstrich das Ergebnis c.

BEISPIEL

91. (Bild 70) Man berechne die Kreisfläche, wenn der Radius $r = 3{,}37$ cm beträgt.

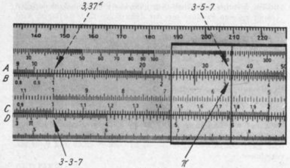


Bild 70

Aus $A = \pi r^2$ ergibt sich in unserem Fall $A = 3{,}37^2\,\pi$ cm².
Über 3–3–7 auf D steht C 1. Über B 1 steht auf A das Zwischenergebnis $3{,}37^2 = 11{,}35$. Der Läufer ist nach rechts bis zur Dekkung des Striches mit π verschoben. Unter dem Strich lesen wir auf A die Ziffernfolge 3–5–7–0 ab.
Die Kreisfläche beträgt 35,7 cm².

Eine zweckmäßigere Berechnung der Kreisflächen werden Sie in den Abschnitten 5.10.1.5. und 5.10.2.1. kennenlernen.

BEISPIEL

92. Bei einer hydraulischen Presse seien die Zylinderdurchmesser $d_1 = 12$ cm und $d_2 = 0{,}9$ cm. Die auf den Kolben 2 drückende Kraft sei $F_2 = 5$ kp. Mit welcher Kraft wird der Kolben 1 nach oben gedrückt?

Es gilt das Gesetz $\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 = \frac{F_1}{F_2}$ und nach F_1 umgestellt

$$F_1 = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 F_2.$$

Bild 71 zeigt die Einstellung unserer Rechnung von

$$F_1 = \left(\frac{12}{0{,}9}\right)^2 \cdot 5\ \text{kp} = 889\ \text{kp}.$$

Über 1–2–0–0 von D steht 9–0–0 von C. Unter C 10 könnte man auf D das Zwischenergebnis 1–3–3–4 ablesen. Darüber auf A, und zwar über B 100, steht die Quadratzahl 1–7–7–9. Diese wird

mit der 5 malgenommen. Das Ergebnis steht über B 5–0–0 auf A. Wir lesen die Ziffernfolge 8–8–9 ab.
Es mag zunächst verwundern, daß die letzte Multiplikation mit der rechten und nicht mit der linken Seite von B durchgeführt worden ist. Es ist aber gleichgültig, welche der beiden Zahlen im Bereich

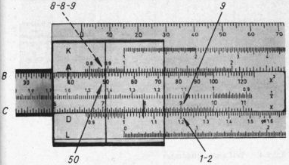


Bild 71

zwischen 1 und 100 als Faktor genommen wird. Man kann die 5 zwischen 1 und 10 oder auch die 50 zwischen 10 und 100 verwenden. Die Zehnerpotenzen spielen ja hier keine Rolle, denn die Stellenzahl wird durch eine Überschlagsrechnung bestimmt. Die Ziffernfolge, die man über 5 oder 50 abliest, ist die gleiche.
Die Überschlagsrechnung liefert

$$\frac{12}{0{,}9} \approx 13, \quad 13^2 \approx 170, \quad 170 \cdot 5 \approx 200 \cdot 5 = 1000.$$

Deshalb ist die übertragene Kraft $F_1 = 889$ kp.
Ein anderer Rechenweg, der auch nur eine Zungen- und eine Läufereinstellung benötigt, ist durch Bild 72 angegeben.
Über D 1–2–0–0 wird 9–0–0 (rot) von C gestellt. Unter C 1 steht der Quotient, über B 1 das Quadrat davon. Wird jetzt noch der Läufer auf B 5–0–0 geschoben, dann steht darüber auf A die Ziffernfolge 8–8–9. Wir kommen zum gleichen Ergebnis.

Man sieht mithin, daß es meist mehrere Wege gibt, eine Rechnung durchzuführen. Der eine wird diesen, der andere einen anderen Weg bevorzugen. Über den Vorzug des einen oder anderen Weges kann man natürlich streiten. Aber stets wird der von Vorteil sein, bei dem die wenigsten Verschiebungen, vor allem die wenigsten Verschiebungen der Zunge, vorgenommen werden müssen, weil sich dann die wenigsten Ungenauigkeiten einschleichen können.

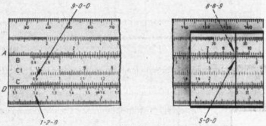


Bild 72

5.2.2.4. Teil eines Quadrates

Jetzt soll ein Teil eines Quadrates,

also $\frac{a^2}{b} = c$

bestimmt werden. Dabei kann die Einstellung von a nicht mit C 1 oder C 10 vorgenommen werden, da die Zunge zur Division noch einmal verstellt werden muß. Zur Teilung B wird im allgemeinen keine Reziprokteilung vorhanden sein. Deshalb ist so zu beginnen, daß der Läuferstrich über a auf D gestellt wird. Unter dem Läuferstrich steht auf A die Quadratzahl von a. Wird jetzt b von B ebenfalls unter den Läuferstrich gebracht, dann kann man über B 1, B 10 oder B 100 die Ziffernfolge des Ergebnisses ablesen.

BEISPIEL

93. (Bild 73). Wie groß ist die Leistung P, wenn in einem einfachen Stromkreis an einer Spannung von $U = 220$ V ein Widerstand von $R = 4600\ \Omega$ angeschlossen ist?

Aus $U = I \cdot R$ oder $I = \frac{U}{R}$ und $P = U \cdot I$ ergibt sich

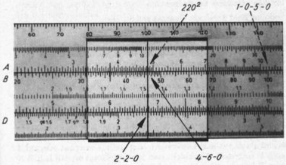


Bild 73

$$P = I \cdot U = \frac{U^2}{R} = \frac{(220\ \text{V})^2}{4600\ \frac{\text{V}}{\text{A}}}.$$

Über 2–2–0–0 auf D steht der Läuferstrich. Unter diesen ist 4–6–0 aus der rechten Hälfte von B geschoben worden. Über B 100 lesen wir die Ziffernfolge 1–0–5–0 ab. Überzeugen Sie sich, daß über B 10 die gleiche Ziffernfolge steht!

Die Überschlagsrechnung ergibt $\frac{(2 \cdot 10^2)^2}{5 \cdot 10^3} = \frac{4 \cdot 10^4}{5 \cdot 10^3} = 0{,}8 \cdot 10.$

Die Leistung im Stromkreis beträgt $P = \underline{\underline{10{,}5\ \text{W}}}$.

Verschieben Sie jetzt die Zunge nach rechts, daß nicht 4–6–0 der rechten, sondern 4–6–0 der linken Hälfte von B unter dem Läuferstrich steht! Sie werden sehen, daß Sie die gleiche Ziffernfolge des Ergebnisses 1–0–5–0 auch über B 10 und B 1 ablesen können. Immer können Sie das Ergebnis bei den A- und B-Teilungen zweimal ablesen, entweder über B 1 und B 10 oder über B 10 und B 100. Das ist ein Vorteil der Teilungen A und B. Es können damit Umstellungen der Zunge vermieden werden. Das gleicht in einem gewissen Maße die geringere Genauigkeit der Teilungen A und B gegenüber den Teilungen C und D aus.

5.2.2.5. Quadrat im Nenner

Soll eine Zahl durch ein Quadrat geteilt, also

$$\frac{a}{b^2} = c$$

gerechnet werden, benötigt man die Teilungen A und B zum Dividieren und die Teilungen C und D zum Quadrieren. Am einfachsten zu übersehen ist folgender Rechenweg:

Man stellt mit dem Läuferstrich a auf A ein. Dann verschiebt man die Zunge so lange, bis b von C (!) auch unter dem Läuferstrich steht. Dann steht nämlich auch b^2 von B unter dem Läuferstrich. Über B 1, B 10 oder B 100 kann man das Ergebnis ablesen.

Ein anderer Rechenweg, der aber nicht so einfach zu überschauen ist, läuft folgendermaßen:

b wird auf D mit dem Läuferstrich eingestellt. Damit hat man auf A auch b^2 eingestellt. Verschiebt man jetzt die Zunge so, daß B 1, B 10 oder B 100 ebenfals unter den Läuferstrich kommt, dann liest man auf B unter a von der Teilung A das Ergebnis ab.

Welche Überlegung berechtigte uns zu diesem Rechenweg?

Stellen wir die Gleichung $\frac{a}{b^2} = c$ um, dann gilt $a = cb^2$. Wenn wir die Zahl c bestimmen, die als Faktor zu b^2 die Zahl a ergibt, dann ist unsere Aufgabe gelöst. Tatsächlich hatten wir B 1, B 10 oder B 100 unter b^2 auf A eingestellt. Wir führen also eine Multiplikation aus.

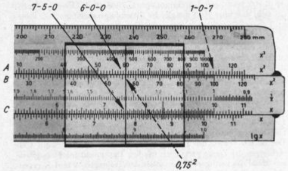


Bild 74

Unter a von der Teilung A steht dann genau der Faktor, der mit b^2 das Produkt a bildet.

BEISPIEL

94. Wie groß ist die Beleuchtungsstärke E, die eine Lampe von $I = 60$ cd in einer Entfernung von $r = 0{,}75$ m erzeugt, wenn die beleuchtete Fläche senkrecht zum Lichtstrom $\Phi = 60$ cd sr steht?

Aus $E = \frac{\Phi}{r^2}$ ergibt sich

$$E = \frac{60 \text{ cd sr}}{(0{,}75 \text{ m})^2} = \underline{\underline{107 \text{ Lux}}} \text{ (Bild 74.)}$$

Der Läuferstrich steht über 60 von A. Dann wurde die Zunge so weit nach links geschoben, daß 7–5–0 von C auch unter dem Läuferstrich steht. Über B 100 (auch über B 10) steht auf A das Ergebnis mit der Ziffernfolge 1–0–7.

Bild 75 zeigt den anderen Rechenweg.

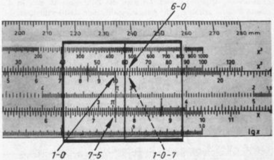


Bild 75

5.2.2.6. Faktor und Quadrat im Nenner

Schließlich soll noch der Rechenweg dafür angegeben werden, wenn der Kehrwert des Produktes eines Faktors mit einem Quadrat zu bilden ist. Es soll mithin

$$c = \frac{1}{ab^2}$$

berechnet werden. Hier kommt man mit je einer Zungen- und Läufereinstellung aus, wenn man das in 5.1.3. Gesagte sinnvoll anwendet. Man stellt den Läuferstrich über a der Teilung A und verschiebt die Zunge so, daß b der Teilung CI ebenfalls unter dem Läuferstrich steht. Damit hat man beim Übergang von CI nach B $\frac{a}{(1/b)^2} = ab^2$ berechnet, wenn man über B 1, B 10 oder B 100 auf der Teilung A abliest. Nun stehen aber unter A 1, A 10 oder A 100 auf B die Kehrwerte dieser Zahlen. Also ist das Ergebnis c unserer Aufgabe unter A 1, A 10 oder A 100 auf B abzulesen. Überprüfen Sie die Stabeinstellung an dem einfachen Beispiel $c = \frac{1}{3 \cdot 2^2} = \frac{1}{12} = 0{,}0833$! Sie lesen das Ergebnis unter A 1 und A 10 auf B ab.

5.3. Quadratwurzeln

5.3.1. Radizieren

Die dem Quadrieren entgegengesetzte Rechenoperation ist das Ziehen einer Quadratwurzel. Es wird die Zahl gesucht, die, in die zweite Potenz erhoben, die Ausgangszahl, den Radikanden, ergibt. Das Ziehen der Quadratwurzel ist beispielsweise notwendig, wenn von einer gegebenen quadratischen Fläche die Seitenlänge bestimmt werden soll.

Während beim Quadrieren von den Teilungen D und C zu den Teilungen A und B übergegangen worden ist, geschieht das Ziehen einer Quadratwurzel durch den Übergang von A nach D oder von B nach C.

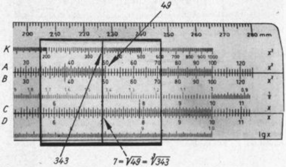


Bild 76

Bild 76 zeigt die Rechnung $\sqrt{49} = 7$ und
Bild 77 die Rechnung $\sqrt{3{,}3} = 1{,}817$.

Daß wir das Radizieren an zwei Beispielen zeigten, soll verdeutlichen, daß das Wurzelziehen etwas komplizierter ist als das Quadrieren. Oben war mehrfach gesagt worden, daß es beim Rechnen mit dem Rechenstab nur auf die Ziffernfolge ankommt, und daß bei Verwendung der Teilungen A und B sogar zwei Ablesemöglichkeiten bestehen. Diese Aussagen müssen jetzt beim Wurzelziehen etwas eingeschränkt werden.

BEISPIEL

95. $\sqrt{9{,}0} = \underline{\underline{3}}$

$\sqrt{90{,}0} = \underline{\underline{9{,}49}}$

$\sqrt{900{,}0} = \underline{\underline{30}}$

$\sqrt{9000{,}0} = \underline{\underline{94{,}9}}$

$\sqrt{90000{,}0} = \underline{\underline{300}}$

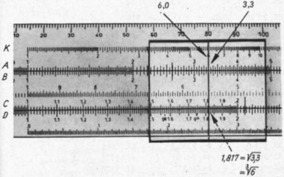


Bild 77

Obwohl die Radikanden immer die Ziffernfolge 9 haben, ergeben sich offensichtlich für die Wurzelwerte zwei verschiedene Ziffernfolgen. Um zum richtigen Ergebnis zu kommen, teilen wir vom

Radikanden Zehnerpotenzen mit geraden Exponenten ab, so daß immer nur einstellige oder zweistellige Faktoren übrigbleiben. Die Umschreibung unseres obigen Beispieles ergibt mithin

$$\begin{array}{llllll}
\sqrt{9} & = \sqrt{09'} & = \sqrt{9} & = 3 & \text{einstellig} \\
\sqrt{90} & = \sqrt{90'} & = \sqrt{90} & = 9{,}49 & \text{zweistellig} \\
\sqrt{900} & = \sqrt{9'00} & = \sqrt{9 \cdot 10^2} & = 30 & \text{einstellig} \\
\sqrt{9000} & = \sqrt{90'00} & = \sqrt{90 \cdot 10^2} & = 94{,}9 & \text{zweistellig} \\
\sqrt{90000} & = \sqrt{9'00'00} & = \sqrt{9 \cdot 10^4} & = 300 & \text{einstellig} \\
\sqrt{900000} & = \sqrt{90'00'00} & = \sqrt{90 \cdot 10^4} & = 949 & \text{zweistellig}
\end{array}$$

Jetzt sehen wir klarer. Die Wurzeln, bei denen im Radikanden vor der Zehnerpotenz eine einstellige Zahl stehenbleibt, werden beim Stabrechnen dadurch gezogen, daß man auf A aus dem Bereich zwischen A 1 und A 10 nach unten nach D geht. Ist der Faktor vor der Zehnerpotenz dagegen eine zweistellige Zahl, dann wird er zwischen A 10 und A 100 eingestellt und der Wurzelwert auf D abgelesen.

BEISPIELE

Es ergeben sich durch Einstellung zwischen A 1 und A 10

96. $\sqrt{3} = \underline{\underline{1{,}732}}$ $\qquad \sqrt{3'00} = \underline{\underline{17{,}32}}$

97. $\sqrt{2'43} = \underline{\underline{15{,}62}}$ $\qquad \sqrt{1{,}76} = \underline{\underline{1{,}326}}$

98. $\sqrt{5'72'00} = \underline{\underline{239{,}3}}$ $\qquad \sqrt{7'48} = \underline{\underline{27{,}3}}$

zwischen A 10 und A 100

99. $\sqrt{30} = \underline{\underline{5{,}475}}$ $\qquad \sqrt{3000} = \underline{\underline{54{,}75}}$

100. $\sqrt{24{,}3} = \underline{\underline{4{,}93}}$ $\qquad \sqrt{17{,}6} = \underline{\underline{4{,}19}}$

101. $\sqrt{57'20} = \underline{\underline{75{,}7}}$ $\qquad \sqrt{74{,}8} = \underline{\underline{8{,}65}}$

ÜBUNGSAUFGABEN

36. $\sqrt{87'60}$ 37. $\sqrt{1'39'00}$ 38. $\sqrt{6'42'00'00}$
39. $\sqrt{19{,}6}$ 40. $\sqrt{186{,}3}$ 41. $\sqrt{248}$
42. $\sqrt{3970}$ 43. $\sqrt{4160}$ 44. $\sqrt{786}$
45. $\sqrt{93\,570}$ 46. $\sqrt{8377}$ 47. $\sqrt{423\,300}$
48. $\sqrt{39\,700}$

Auch beim Berechnen von Quadratwurzeln aus Dezimalzahlen wollen wir dieses Verfahren der Abspaltung von Zehnerpotenzen mit geradem Exponenten beibehalten. Nur werden hier Zehnerpotenzen mit negativen geraden Exponenten abzuspalten sein.

BEISPIELE

Es ergeben sich durch Einstellung zwischen A 1 und A 10

102. $\sqrt{5} = \underline{\underline{2{,}235}}$ $\qquad \sqrt{0{,}05} = \underline{\underline{0{,}2235}}$

103. $\sqrt{3{,}48} = \underline{\underline{1{,}868}}$ $\qquad \sqrt{0{,}03'48} = \underline{\underline{0{,}1868}}$

104. $\sqrt{1{,}03} = \underline{\underline{1{,}014}}$ $\qquad \sqrt{0{,}01'03} = \underline{\underline{0{,}1014}}$

zwischen A 10 und A 100

105. $\sqrt{0{,}50} = \underline{\underline{0{,}707}}$ $\qquad \sqrt{0{,}00'50} = \underline{\underline{0{,}0707}}$

106. $\sqrt{0{,}34'8} = \underline{\underline{0{,}59}}$ $\qquad \sqrt{0{,}00'34'8} = \underline{\underline{0{,}059}}$

107. $\sqrt{0{,}10'3} = \underline{\underline{0{,}321}}$ $\qquad \sqrt{0{,}00'10'3} = \underline{\underline{0{,}0321}}$

ÜBUNGSAUFGABEN

49. $\sqrt{0{,}571}$ 50. $\sqrt{0{,}0634}$ 51. $\sqrt{0{,}04020}$
52. $\sqrt{0{,}000319}$ 53. $\sqrt{0{,}0000415}$ 54. $\sqrt{0{,}235}$
55. $\sqrt{0{,}00765}$ 56. $\sqrt{0{,}0416}$ 57. $\sqrt{0{,}000527}$
58. $\sqrt{0{,}1355}$ 59. $\sqrt{0{,}0001355}$ 60. $\sqrt{0{,}925}$
61. $\sqrt{0{,}0905}$ 62. $\sqrt{0{,}0875}$ 63. $\sqrt{0{,}825}$

BEISPIELE

108. Wie groß ist die Seitenlänge a, wenn ein quadratischer Platz eine Fläche von 15500 m² hat?

$a = \sqrt{a^2} = \sqrt{15\,500\ \text{m}^2} = 124{,}5\ \text{m}$

Die Seitenlänge des quadratischen Platzes beträgt $\underline{\underline{124{,}5\ \text{m}}}$.

109. Mit welcher Geschwindigkeit kommt ein Dachziegel auf der Straße an, wenn er von einem $h = 19{,}5$ m hohen Hause herunterfällt?

Aus $v = \sqrt{2gh}$ ergibt sich zunächst

$$2gh = 2 \cdot 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 19{,}5\ \text{m} = 382{,}5\ \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

und damit $v = \sqrt{382{,}5\ \text{m}^2/\text{s}^2} = 19{,}55$ m/s.

Der Dachziegel kommt mit einer Geschwindigkeit von $\underline{\underline{19{,}55\ \text{m/s}}}$ auf der Straße an.

110. Wie lange würde ein Gegenstand von einem $h = 167$ m hohen Turm fallen, wenn man den Luftwiderstand nicht berücksichtigt?

Aus $t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$ ergibt sich zunächst

$$\frac{2h}{g} = \frac{2 \cdot 167\ \mathrm{m}}{9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 34{,}1\ \mathrm{s}^2$$

und damit $t = \sqrt{34{,}1\ \mathrm{s}^2} = 5{,}84$ s.
Der Gegenstand würde $\underline{\underline{5{,}84\ \mathrm{s}}}$ lang fallen.

5.3.2. Radizieren, verbunden mit Multiplikation und Division

Nachfolgend sollen bei einigen Rechenoperationen wie Multiplikation und Division, die in Verbindung mit Quadratwurzeln auftreten, die vorteilhaftesten Rechenwege anhand einiger Beispiele beschrieben werden.

5.3.2.1. Faktor und Wurzel

Es sollen Wurzeln mit einem Faktor malgenommen, d. h.

$$a\sqrt{b} = c$$

gerechnet werden. Hier erfolgt zunächst ein Übergang von A nach D, wobei $\sqrt{b}$ ausgerechnet wird. Die nachfolgende Multiplikation mit a kann mit der C-Teilung ausgeführt werden. Dann ist es zweckmäßig, den Übergang von A nach D mit B 1/C 1 oder B 100/C 10 auszuführen, weil sich die Multiplikation dann sofort anschließen kann. Wird aber die Multiplikation durch eine Division mit Werten der Skale CI ersetzt, dann erfolgt der Übergang am besten mit dem Läuferstrich, unter den dann der Faktor a von CI gestellt wird. Unter C 1 oder C 10 liest man dann auf D das Ergebnis ab. Der zuletzt genannte Weg hat den Vorteil, daß das Ergebnis immer sofort ablesbar ist, während man im ersten Fall mitunter die Zunge nochmals verschieben muß.

BEISPIEL

111. Für nichtrelativistische Elektronenbeschleunigung ergibt sich wegen $mv^2/2 = eU$ aus der Beschleunigungsspannung U mit der spezifischen Elektronenladung $e/m = 1{,}759 \cdot 10^8$ As/g eine

Elektronengeschwindigkeit $v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$; v/km s^{-1} = $592{,}5\sqrt{U/\mathrm{V}}$.

Wie groß ist die Elektronengeschwindigkeit bei einer Beschleunigungsspannung $U = 450$ V?

$v = 592{,}5\sqrt{U} = 592{,}5\sqrt{450}$; $\quad v = \underline{\underline{12\,560\ \mathrm{km/s}}}$

Bild 78 zeigt die Einstellung: Über 4–5–0 von A steht der Läuferstrich und unter diesem 5–9–2–5 von CI. Unter C 1 steht auf D das Ergebnis.

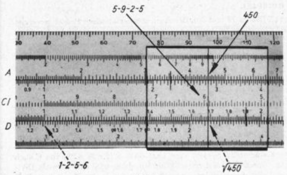


Bild 78

Beginnt man die Rechnung damit, daß man 5–9–2–5 auf D einstellt, dann müßte auf C der andere Faktor stehen. Da dieser aber $\sqrt{450}$ ist, muß 4–5–0 auf B eingestellt werden. Unter dem Läuferstrich steht dann nicht nur 4–5–0 von B, sondern auch $\sqrt{450}$ von C und darunter wieder auf D das Ergebnis.
Prüfen Sie das nach!

5.3.2.2. Teil einer Wurzel

Es soll eine Wurzel durch eine Zahl geteilt,

$$\frac{\sqrt{a}}{b} = c$$

gerechnet werden. Hier ist es am zweckmäßigsten, a auf A mit dem Läuferstrich einzustellen und die Zunge so weit zu verschieben, daß auch b von C daruntersteht. Dann ergibt sich das Resultat der Rechnung unter C 1 oder C 10 auf D.
Natürlich könnte man auch das Ziehen der Wurzel mit B 1/C 1 oder B 100/C 10 vornehmen. Dann wäre aber mit b von CI zu multiplizieren. Hier müßte vorher entschieden werden, wo das Ergebnis abzulesen sein wird, damit man weiß, welches Ende der Zunge zum Wurzelziehen zu verwenden ist. Diesen Weg wird man aber kaum einschlagen, da Divisionen beim Rechenstab bequemer auszuführen sind als die Multiplikationen.

BEISPIEL

112. (Bilder 79 und 80). Bei einem mathematischen Pendel berechnet man die Frequenz aus der Pendellänge l und der Erdbeschleunigung g durch die Gleichung

$$f = \frac{\sqrt{\frac{g}{l}}}{2\pi}.$$

Wie groß ist die Frequenz bei $l = 0{,}36$ m und $g = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$?

Zunächst muß der Radikand berechnet werden. Das geschieht zweckmäßigerweise mit den Teilungen A und B. Bild 79 zeigt, daß auf A der Zähler 9–8–1 eingestellt und 3–6–0–0 von B daruntergeschoben ist. Über B 100 steht auf A das Zwischenergebnis, der Radikand 27,25. Darüber wird der Läuferstrich eingestellt. Schiebt man jetzt 6–2–8 ($2\pi \approx 6{,}28$) von C auch unter den Läuferstrich (Bild 80), dann wird eine normale Division durchgeführt und unter C 10 auf D das Ergebnis 8–3–2 abgelesen.

Das Pendel hat eine Frequenz von $\underline{\underline{0{,}832\,^1\!/\mathrm{s}}}$.

5.3.2.3. Wurzel im Nenner

Soll eine Zahl durch eine Wurzel geteilt, d.h.

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = c$$

gerechnet werden, dann wird man, weil eine Division durchzuführen ist, die Wurzel durch einen Übergang von B nach C ziehen.

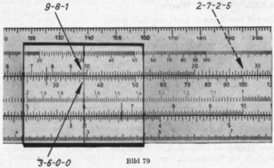


Bild 79

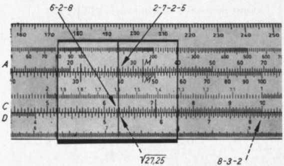


Bild 80

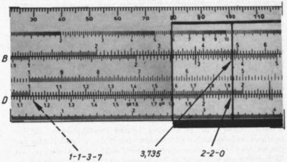


Bild 81

a wird durch den Läufer auf D eingestellt und dann die Zunge so weit verschoben, daß b von B auch unter dem Läuferstrich steht. Das Ergebnis wird unter C 1 oder C 10 auf D abgelesen.

BEISPIEL

113. In einem Wechselstromkreis sind bei der Frequenz $\nu = 50\,^1\!/\mathrm{s}$ und der Spannung $U = 220$ V ein ohmscher Widerstand $R = 1100\ \Omega$ und eine Kapazität $C = 2\ \mu\mathrm{F}$ hintereinanderge-

schaltet. Der resultierende Widerstand ist $R_S = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$.

Wie groß ist in diesem Stromkreis die Stromstärke I?

Das Quadrat des kapazitiven Widerstandes ergibt sich zu

$$R_C{}^2 = \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2 = \left(\frac{1}{2\pi\nu C}\right)^2 = \left(\frac{1}{100\pi\,\frac{1}{\mathrm{s}}\,2\cdot 10^{-6}\,\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{V}}}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{10^4\,\mathrm{V}}{2\pi\,\mathrm{A}}\right)^2 = (1592\ \Omega)^2 = 2{,}525\cdot 10^6\ \Omega^2.$$

Die Berechnung erfolgt durch Einstellen von 2π über D 1 und durch den Übergang von C 10 nach A.

$$\text{Damit wird } R_S{}^2 = R^2 + R_C{}^2 = R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2 =$$
$$= (1{,}21\cdot 10^6 + 2{,}525\cdot 10^6)\ \Omega^2 =$$
$$= 3{,}735\cdot 10^6\ \Omega^2.$$

$$\text{Aus } I = \frac{U}{R_S} = \frac{220\ \mathrm{V}}{\sqrt{3{,}735\cdot 10^6\ \Omega^2}} = 0{,}1137\ \mathrm{A}$$

erhalten wir die gesuchte Stromstärke zu $I = \underline{\underline{0{,}1137\ \mathrm{A}}}$.

Über 2–2–0 von D steht 3–7–3–5 von B und unter C 1 auf D das Ergebnis 1–1–3–7 (Bild 81).

5.3.2.4. Wurzel aus einem Produkt

Soll die Wurzel aus einem Produkt, also

$$\sqrt{a\cdot b} = c$$

berechnet werden, so ist das Produkt mit den Teilungen A und B zu bilden und dann mit dem Läuferstrich von A nach D überzugehen. Da am Ende der Rechnung die Wurzel zu ziehen und der Radikand bekanntlich nicht beliebig zwischen A 1 und A 10 oder A 10 und A 100 einzustellen ist, ist es nötig, bei der Produktbildung auf der richtigen Teilungshälfte zu arbeiten, damit die Wurzel richtig bestimmt wird. Oben hatten wir gesehen, daß durch Abspalten von Zehnerpotenzen mit geraden Exponenten ein- oder zweistellige Faktoren übrigbleiben. Daran erinnern wir uns und stellen Ziffernfolgen von einstelligen Faktoren zwischen A 1 und A 10 ein, während für zweistellige die rechte Teilungshälfte zwischen A 10 und A 100 zu verwenden ist.

BEISPIEL

114. Der Höhensatz besagt, daß in einem rechtwinkligen Dreieck das Rechteck aus den Projektionen der Katheten auf die Hypotenuse flächengleich ist dem Quadrat über der Höhe. Es gilt also (Bild 82): $h^2 = pq$

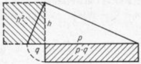


Bild 82

Wie groß ist die Höhe in einem rechtwinkligen Dreieck, wenn die Projektion einer Kathete auf die $c = 8{,}2$ cm lange Hypotenuse $q = 2{,}05$ cm lang ist?

Aus $q = 2{,}05$ cm und $c = 8{,}2$ cm ergibt sich $p = 6{,}15$ cm, denn $p + q = c = 8{,}2$ cm. Wir errechnen

$$h = \sqrt{pq} = \sqrt{6{,}15\ \mathrm{cm}\cdot 2{,}05\ \mathrm{cm}} = \underline{\underline{3{,}55\ \mathrm{cm}}}.$$

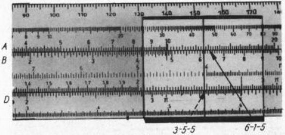


Bild 83

Bild 83 zeigt die Einstellung von B 1 unter 2–0–5–0 auf der linken Seite von A und des Läuferstriches über 6–1–5 auf der linken Hälfte von B. Auf D steht das Ergebnis 3–5–5–0.

Wenn in einem entsprechenden Beispiel $c = 32{,}5$ cm und $q = 12{,}3$ cm sind, also $p = 20{,}2$ cm, dann ergibt sich

$$h = \sqrt{12{,}3\cdot 20{,}2\ \mathrm{cm}^2} = \underline{\underline{15{,}75\ \mathrm{cm}}}.$$

Hier ist die Multiplikation $p\cdot q$ mit Zahlen zwischen A 10 und A 100 durchzuführen, während der Radikand zwischen A 1 und A 10 liegt.

5.3.2.5. Kehrwert der Wurzel eines Produktes

Es soll jetzt der Kehrwert einer Wurzel aus einem Produkt, d. h.

$$\frac{1}{\sqrt{ab}}$$

berechnet werden. Hier kann man im Prinzip den gleichen Rechenweg wie in 5.2.2.4. einschlagen. Dann hätte man aber $1/c$ berechnet. Bildet man noch den Kehrwert, dann ist c gefunden. Für die Kehrwertberechnung wurde bereits früher gesagt, daß für eine Zahl von D unter C 10 der Kehrwert über D 1 auf C steht. Natürlich steht er auch für eine Zahl unter C 1 über D 10 auf C.

Bilden wir also das Produkt $a \cdot b$ mit den Skalen A und B, dann ist das Zwischenergebnis mit dem Läuferstrich festzuhalten und die Zunge so zu verschieben, daß entweder C 1 oder C 10 unter dem Läuferstrich steht. Das Ergebnis $\frac{1}{\sqrt{ab}} = c$ ist dann über D 10 oder D 1 auf C ablesbar.

BEISPIEL

115. Man berechne $\frac{1}{\sqrt{1{,}25 \cdot 48{,}5}} = 0{,}1285.$

Bild 84 zeigt B 1 unter 4–8–5 auf der rechten Hälfte von A und den Läuferstrich über 1–2–5–0 der linken Hälfte von B. Das Zwischenergebnis $\sqrt{1{,}25 \cdot 48{,}5} = 7{,}78$ interessiert nicht. Wird jetzt (Bild 85) C 1 unter den Läuferstrich geschoben, dann

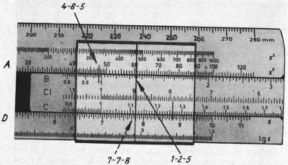


Bild 84

ist über D 10 das Ergebnis 1–2–8–5 ablesbar. Hat man auf dem Rechenstab eine Teilung CI, dann kann der Kehrwert von Zahlen aus C bekanntlich dort abgelesen werden. Dazu ist aber notwendig, daß das Zwischenergebnis (in unserem Fall 7–7–8) auf C ablesbar ist. Verschiebt man also die Zunge nicht so, daß C 1 oder C 10 unter dem Läuferstrich steht, sondern so, daß D 1 und C 1 sich decken, dann steht das Zwischenergebnis nicht nur auf D, sondern auch auf C und damit das Endergebnis 1–2–8–5 auf CI (Bild 86).

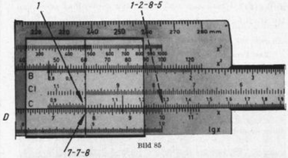


Bild 85

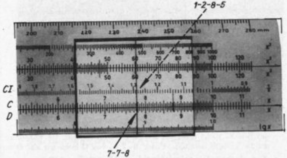


Bild 86

5.3.2.6. Wurzel aus einem Quotienten

Soll die Wurzel aus einem Quotienten, d. h.

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = c$$

berechnet werden, wird die Division $\frac{a}{b}$ mit den Teilungen A und B durchgeführt und anschließend mit dem Läuferstrich oder mit den Endmarken B 1/C 1 oder B 100/C 10 auf der Teilung D das Ergebnis abgelesen.

BEISPIEL

116. Die Schwingungsdauer eines mathematischen Pendels errechnet sich aus der Gleichung $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Wie groß ist sie, wenn das Pendel $l = 1{,}45$ m lang ist und die Erdbeschleunigung $g = 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ beträgt?

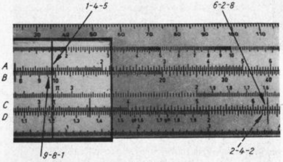


Bild 87

Unter 1–4–5–0 von der linken Hälfte von A steht 9–8–1 auf der linken Hälfte von B. Das Ergebnis für $\sqrt{\frac{1{,}45}{9{,}81}} = 0{,}385$ ist im Bild 87 nicht mehr zu sehen. Es wird ja nur als Faktor zu $2\pi \approx 6{,}28$ benötigt. Unter 6–2–8 von C lesen wir auf D 2–4–2–0 ab. Die Schwingungsdauer beträgt $T = \underline{\underline{2{,}42\ \text{s}}}$.

5.3.2.7. Wurzel und Faktor im Nenner

Ist schließlich der Kehrwert des Produktes eines Faktors mit einer Wurzel, d. h.,

$$c = \frac{1}{a\sqrt{b}}$$

zu berechnen, dann kommt man wieder mit je einer Zungen- und Läufereinstellung aus, wenn man die Rechenmöglichkeiten von 5.1.3. geschickt ausnutzt. Der Läuferstrich wird über *b* der Teilung A gestellt. Verschiebt man dann die Zunge so, daß *a* von CI ebenfalls unter dem Läuferstrich steht, dann liest man über D 1 oder D 10 auf B das Ergebnis ab.

Kontrollieren Sie die Einstellung an dem einfachen Beispiel $c = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6} = 0{,}1667$! Unter C 10 steht auf D der Nenner 6 und über D 10 auf C der gesuchte Kehrwert.

5.3.3. Berechnungen nach dem Lehrsatz des Pythagoras

Wir wollen schließlich noch zeigen, wie man mit dem Rechenstab, allerdings unter Einschluß einer kleinen Zwischenrechnung im Kopf, Berechnungen nach dem Lehrsatz des Pythagoras durchführen kann. Der Lehrsatz lautet, wenn *c* die Hypotenuse und *a* und *b* die Katheten eines rechtwinkligen Dreieckes sind:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Es wird a^2 ausgeklammert und *a* vor die Wurzel gezogen:

$$c = \sqrt{a^2\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)} = a\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = a\sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}.$$

Die Berechnung der Hypotenuse erfolgt in drei Schritten:

1. Über *b* auf D wird *a* von C geschoben und über B 1 oder B 10 auf A das Ergebnis $\left(\frac{b}{a}\right)^2$ abgelesen.
2. Zu diesem Zwischenergebnis addiert man 1.
3. Die soeben erhaltene Zahl wird stellenrichtig mit dem Läuferstrich auf A eingestellt und *a* auf CI ebenfalls unter den Läuferstrich gestellt. Unter C 1 oder C 10 erhält man auf D das Endergebnis. Fehlt die CI-Teilung, dann wird mit B 1/C 1 oder B 100/C 10 nach D gegangen und *a* auf C eingestellt.

BEISPIEL

117. Von einem rechtwinkligen Dreieck seien die Katheten $a = 3{,}25$ cm und $b = 4{,}64$ cm bekannt. Wie lang ist die Hypotenuse?

1. $\left(\frac{b}{a}\right) = \left(\frac{4{,}64}{3{,}25}\right)^2 = 2{,}04$
2. $2{,}04 + 1 = 3{,}04$
3. $c = 3{,}25\sqrt{3{,}04} = 5{,}67$

Die Hypotenuse ist $\underline{\underline{5{,}67 \text{ cm}}}$ lang.

Eine andere Berechnungsmethode, bei der nur eine Zungeneinstellung und zwei Läufereinstellungen nötig sind, verläuft folgendermaßen:

1. Der Wert der kleineren Kathete, nehmen wir an, es sei a, wird auf D eingestellt und C 1 darübergeschoben.
2. Der Läuferstrich wird über b auf D (!) geschoben und unter ihm auf B (!) das Zwischenergebnis $\left(\frac{b}{a}\right)^2$ abgelesen.
3. Das Zwischenergebnis wird um 1 vermehrt.
4. Das um 1 vermehrte Zwischenergebnis wird auf B eingestellt und mit dem Läuferstrich nach D zum Endergebnis übergegangen.

Wie kann man diese eigenartig anmutende Rechenanweisung verstehen? Bei 2. wurde die Zahl ermittelt, die mit a malgenommen, b ergibt. Das ist aber die Zahl $\frac{b}{a}$. Da sie auf C steht, muß ihre Quadratzahl auf B stehen. Geht man 4. von B nach C, dann findet man dort $\sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$. Diese Zahl muß aber gerade mit a multipliziert werden, damit man c erhält.

BEISPIEL

118. Man berechne aus $a = 1{,}414$ und $b = 1{,}73$ die Länge der Hypotenuse c.

1. und 2. liefert auf C 1–2–3–0 und auf B 1–4–9–5.

3. $1{,}495 + 1 = 2{,}495$

4. auf D 2–2–3–5

Die Hypotenuse hat die Länge $c = \underline{\underline{2{,}235}}$ cm.

Ganz entsprechend ist der Rechenverlauf, wenn nach einer der beiden Katheten gefragt ist.

Aus $a^2 = c^2 - b^2$ errechnet man

$$a = \sqrt{c^2\left(1 - \frac{b^2}{c^2}\right)} = c\sqrt{1 - \frac{b^2}{c^2}} = c\sqrt{1 - \left(\frac{b}{c}\right)^2}.$$

Man sieht, daß anstelle der oben im Kopf durchzuführenden Addition eine Subtraktion zu erledigen ist.

BEISPIEL

119. Zur Hypotenuse $c = 11{,}3$ cm und Kathete $b = 5{,}25$ cm soll die Kathete a berechnet werden.

Wir rechnen: $\left(\frac{b}{c}\right)^2 = \left(\frac{5{,}25}{11{,}3}\right)^2 = 0{,}464^2 = 0{,}216$

$1 - 0{,}216 = 0{,}784$

$a = 11{,}3 \cdot \sqrt{0{,}784}$ cm $= 10{,}0$ cm

Die Kathete a hat die Länge $\underline{\underline{10{,}0 \text{ cm}}}$.

Ein anderer Berechnungsweg ergibt sich aus dem Sinussatz. Siehe dazu Abschnitt 5.6.1.2. auf Seite 141!

5.4. Kuben und Kubikwurzeln

5.4.1. Kuben

Bereits in 4.2. und 4.3.3. hatten wir auf die Teilung K hingewiesen und deren Unterteilung erklärt. Die drei untereinander gleichen Abschnitte von K sind auf der ganzen Skalenlänge untergebracht. Die Grundteilung D ist mithin dreimal so lang wie jeder Abschnitt von K. Eine Ziffernfolge b habe auf K von K 1 aus einen Abstand der $\lg b$ entspricht. Senkrecht unter b gibt es dann auf D eine Ziffernfolge a, die den gleichen Abstand von D 1 hat wie die Ziffernfolge b von K 1. Da aber die D-Teilung dreimal so lang ist wie ein Abschnitt auf der K-Teilung, gilt

$$\lg b = 3 \lg a = \lg a^3.$$

Wenn die Logarithmen gleich sind, müssen die Numeri auch gleich sein:

$$b = a^3 \quad \text{bzw.} \quad a = \sqrt[3]{b}.$$

Damit ist bereits erklärt, daß durch einen Übergang mittels des Läuferstriches von D nach K aus den Zahlen von D die Kubikzahlen oder 3. Potenzen gebildet werden.

Bild 67 (Seite 90) zeigt deshalb nicht nur $a^2 = 9$ von $a = 3$, sondern auch $a^3 = 3^3 = 27$.

Bild 68 gibt von

$$a = 17{,}6 \quad \text{sowohl} \quad a^2 = 310 \quad \text{als auch} \quad a^3 = 5450.$$

Die Ermittlung der Stellenzahl geschieht wie bei den Quadratzahlen dadurch, daß Zehnerpotenzen abgespalten werden. Jedoch ist beim Bilden der Kubikzahlen jetzt der Exponent der abgespaltenen Zehnerpotenz zu verdreifachen. Damit die Rechnungen etwas erleichtert werden, seien hier die 3. Potenzen der Zahlen von 1 bis 10 nochmals mitgeteilt.

$1^3 = 1$	$2^3 = 8$	$3^3 = 27$
$4^3 = 64$	$5^3 = 125$	$6^3 = 216$
$7^3 = 343$	$8^3 = 512$	$9^3 = 729$
$10^3 = 1000$		

Haben wir 3. Potenzen zu berechnen, dann bilden wir z. B.:

$$20^3 = (2 \cdot 10)^3 = 8 \cdot 10^3 = 8000$$
$$355^3 = (3{,}55 \cdot 10^2)^3 = 44{,}7 \cdot 10^6 = 44\,700\,000$$

Auch bei Dezimalzahlen verfahren wir entsprechend:

$$0{,}15^3 = (1{,}5 \cdot 10^{-1})^3 = 3{,}375 \cdot 10^{-3} = 0{,}003\,375$$
$$0{,}092^3 = (9{,}2 \cdot 10^{-2})^3 = 780 \cdot 10^{-6} = 0{,}00078$$

BEISPIELE

120. $1{,}2^3 = \underline{\underline{1{,}725}}$	121. $2{,}78^3 = \underline{\underline{21{,}5}}$
122. $4{,}15^3 = \underline{\underline{71{,}5}}$	123. $68{,}2^3 = \underline{\underline{317\,000}}$
124. $721^3 = \underline{\underline{375\,000\,000}}$	125. $8{,}11^3 = \underline{\underline{532}}$
126. $52{,}6^3 = \underline{\underline{145\,000}}$	127. $0{,}31^3 = \underline{\underline{0{,}0298}}$
128. $0{,}46^3 = \underline{\underline{0{,}0973}}$	129. $0{,}515^3 = \underline{\underline{0{,}137}}$
130. $0{,}062^3 = \underline{\underline{0{,}000238}}$	131. $0{,}111^3 = \underline{\underline{0{,}00137}}$
132. $0{,}0222^3 = \underline{\underline{0{,}0000109}}$	133. $0{,}0093^3 = \underline{\underline{0{,}000000805}}$
134. $0{,}78^3 = \underline{\underline{0{,}475}}$	135. $0{,}0815^3 = \underline{\underline{0{,}000541}}$
136. $0{,}00835^3 = \underline{\underline{0{,}000000582}}$	

Die Rechnungen, bei denen 3. Potenzen als Faktoren oder Divisoren vorkommen, lassen sich nicht in so einfacher Weise vornehmen wie bei den 2. Potenzen, weil eine zu K korrespondierende Teilung auf der Zunge fehlt. Das gilt z. B. für die Berechnungen von $c = \frac{1}{a \cdot b^3}$ und $c = \frac{a^3}{b}$. Für einige andere Aufgaben sollen nachfolgend in Kurzfassung die notwendigen Stabeinstellungen angegeben werden, die sich dann ergeben, wenn die Teilung K auf dem Stabkörper angebracht ist. Befindet sie sich auf der Zunge, dann muß der Rechenvorgang entsprechend umgedacht werden.

5.4.1.1. Kubus eines Produktes

Der Kubus eines Produktes, d.h.,

$$c = (a \cdot b)^3$$

wird berechnet, wenn zunächst das Produkt mit den Teilungen C und D oder besser durch eine Division mit D und CI ermittelt wird. Man liest dann mit dem Läuferstrich über dem Produkt bzw. über C 1 oder C 10 auf K das Ergebnis ab.

5.4.1.2. Kubus eines Quotienten

Soll die 3. Potenz eines Quotienten, d.h.,

$$c = \left(\frac{a}{b}\right)^3$$

berechnet werden, dann berechnet man zunächst mit den Teilungen D und C den Quotienten und geht mittels des Läuferstriches von C 1 oder C 10 zur Teilung K.

5.4.1.3. Kubus und Faktor

Ist $c = a \cdot b^3$

zu berechnen, dann stellt man a auf der Teilung K mit dem Läuferstrich ein, verschiebt die Zunge so, daß C 1 oder C 10 ebenfalls unter den Läuferstrich kommen. Rückt man jetzt den Läufer über b der Teilung C, führt also eine Multiplikation aus, dann liest man auf K das Ergebnis c ab. Man hätte die Multiplikation auch durch eine Division mit der Teilung CI ersetzen können.

5.4.1.4. Kubus im Nenner

Muß eine Zahl durch eine Kubikzahl geteilt werden, ist also

$$c = \frac{a}{b^3}$$

zu berechnen, dann wird mit den Teilungen K und C eine Division durchgeführt. a wird auf K eingestellt und durch b von der Teilung C geteilt, indem man b von C auch unter den Läuferstrich stellt. Das Ergebnis steht dann über C 1 oder C 10 auf der Teilung K.

5.4.1.5. Kehrwert des Kubus eines Produktes

Schließlich soll noch für die Bildung des Kehrwertes eines Produktes, d. h., für

$$c = \frac{1}{(a \cdot b)^3}$$

der Rechenweg angegeben werden. Stellt man a von C über D 1 oder D 10, dann liest man unter C 10 oder C 1 den Kehrwert und darüber auf K den Wert $1/a^3$ ab. Verschiebt man den Läufer nach b von der CI-Teilung und geht gleich zu K über, dann wurde $1/a^3$ mit $1/b^3$ zum Ergebnis c multipliziert.

5.4.2. Kubikwurzeln

Quadratwurzeln hatten wir gezogen durch den Übergang von A nach D und B nach C. Beim Ziehen der Kubikwurzeln haben wir nur eine Möglichkeit, nämlich den Übergang von K nach D.
Bild 76 (Seite 100) zeigt deshalb nicht nur $\sqrt{49} = 7$, sondern auch

$$\sqrt[3]{343} = 7$$

und entsprechend Bild 77 auch

$$\sqrt[3]{6} = 1{,}817.$$

BEISPIELE

137. $\sqrt[3]{6{,}25} = \underline{\underline{1{,}842}}$ 138. $\sqrt[2]{16{,}9} = \underline{\underline{2{,}565}}$
139. $\sqrt[3]{56{,}5} = \underline{\underline{3{,}84}}$ 140. $\sqrt[3]{69{,}0} = \underline{\underline{4{,}12}}$
141. $\sqrt[3]{194} = \underline{\underline{5{,}78}}$ 142. $\sqrt[3]{445} = \underline{\underline{7{,}63}}$
143. $\sqrt[3]{535} = \underline{\underline{8{,}12}}$ 144. $\sqrt[3]{675} = \underline{\underline{8{,}775}}$
145. $\sqrt[3]{905} = \underline{\underline{9{,}675}}$

Die Berechnung der 3. Wurzeln von Zahlen über 1000 oder unter 1 muß wieder dadurch vorgenommen werden, daß Zehnerpotenzen abgespalten werden, denn die Teilung K enthält nur die 3. Potenzen von 1 bis 1000. Da auch aus den Zehnerpotenzen die 3. Wurzeln gezogen werden müssen, ist es unbedingt nötig, daß nur Zehnerpotenzen abgespalten werden, die einen Exponenten haben, der durch 3 teilbar ist.

$$\sqrt[3]{8} = 2 \qquad \sqrt[3]{80} = 4{,}31 \qquad \sqrt[3]{800} = 9{,}28$$

sind mithin noch auf den Teilungen K und D ablesbar. Aber für andere Wurzeln schreibt man z. B.

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{8000} &= \sqrt[3]{8 \cdot 10^3} = 2 \cdot 10 = 20 \\
\sqrt[3]{80000} &= \sqrt[3]{80 \cdot 10^3} = 4{,}31 \cdot 10 = 43{,}1 \\
\sqrt[3]{800000} &= \sqrt[3]{800 \cdot 10^3} = 9{,}28 \cdot 10 = 92{,}8
\end{aligned}$$

und bei Dezimalbrüchen

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{0{,}8} &= \sqrt[3]{800 \cdot 10^{-3}} = 9{,}28 \cdot 10^{-1} = 0{,}928 \\
\sqrt[3]{0{,}08} &= \sqrt[3]{80 \cdot 10^{-3}} = 4{,}31 \cdot 10^{-1} = 0{,}431 \\
\sqrt[3]{0{,}008} &= \sqrt[3]{8 \cdot 10^{-3}} = 2 \cdot 10^{-1} = 0{,}2
\end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich die Regel, daß die Einstellung der Zahlen auf der K-Teilung nach Abspaltung der Zehnerpotenzen zu erfolgen hat bei
einstelligen Zahlen auf K zwischen K 1 und K 10,
zweistelligen Zahlen zwischen K 10 und K 100
und dreistelligen Zahlen zwischen K 100 und K 1000.

BEISPIELE

146. $\sqrt[3]{1570} = \underline{\underline{11{,}63}}$ 147. $\sqrt[3]{4850} = \underline{\underline{16{,}93}}$
148. $\sqrt[3]{38500} = \underline{\underline{33{,}8}}$ 149. $\sqrt[3]{110000} = \underline{\underline{47{,}9}}$
150. $\sqrt[3]{9550} = \underline{\underline{21{,}2}}$ 151. $\sqrt[3]{225000000} = \underline{\underline{608}}$
152. $\sqrt[3]{0{,}76} = \underline{\underline{0{,}912}}$ 153. $\sqrt[3]{0{,}164} = \underline{\underline{0{,}547}}$
154. $\sqrt[3]{0{,}0375} = \underline{\underline{0{,}335}}$ 155. $\sqrt[3]{0{,}00405} = \underline{\underline{0{,}1594}}$
156. $\sqrt[3]{0{,}00021} = \underline{\underline{0{,}0594}}$ 157. $\sqrt[3]{0{,}000062} = \underline{\underline{0{,}0396}}$

Die Rechnungen, bei denen 3. Wurzeln als Faktoren auftreten, beginnt man, weil die K-Teilung meist auf dem Stabkörper steht, am besten mit dem Ziehen der 3. Wurzel durch den Übergang von K nach D und rechnet dann wie gewöhnlich mit den Teilungen C, D und CI weiter.
Da die K-Teilung meist nur einmal vorhanden ist, lassen sich manche Rechnungen, z. B. $c = \sqrt[3]{a \cdot b}$ und $c = \dfrac{1}{\sqrt[3]{a \cdot b}}$ nicht ohne Unterbrechung des Rechenganges durchführen. Für einige andere Aufgaben soll nachfolgend der Rechengang in Kurzfassung geschildert werden.

5.4.2.1. Kubikwurzel und Faktor

Ist eine Kubikwurzel mit einem oder mehreren Faktoren malzunehmen, d.h., ist

$$c = a \cdot \sqrt[3]{b}$$

auszurechnen, dann stellt man b auf K ein und hat dann auf D den

Faktor $\sqrt[3]{b}$, mit dem alle weiteren Multiplikationen mit den Teilungen C oder CI ausgeführt werden können.
Bei 3 Faktoren ergibt sich folgendes:

BEISPIEL

158. $\sqrt[3]{245} \cdot 0{,}01435 \cdot 6{,}5 = \underline{\underline{0{,}584}}$ (Bild 88)

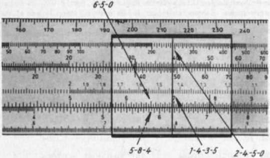


Bild 88

Der Läuferstrich steht über 2–4–5–0 auf dem rechten Drittel von K. Darunter steht 1–4–3–5 von CI. Unter 6–5–0 von C steht auf D das Ergebnis 5–8–4.
Steht die Teilung K in der Mitte der Zunge, dann rechnet man zunächst 6,5 · 0,1435 mit Hilfe der Teilungen D und CI. Das Ergebnis steht unter C 10. Jetzt braucht nur noch der Läuferstrich über 2–4–5–0 im rechten Drittel von K geschoben zu werden. Dann nimmt man das unter C 10 stehende Zwischenergebnis mit $\sqrt[3]{245}$ mal und erhält auf D das Endergebnis.

5.4.2.2. Kubikwurzel und Divisor

Soll eine 3. Kubikwurzel durch eine Zahl geteilt werden, d. h., soll

$$c = \frac{\sqrt[3]{a}}{b}$$

gerechnet werden, dann ist der Rechengang einfach dadurch auszu-

führen, daß man a auf K einstellt, damit auf D die $\sqrt[3]{a}$ erhält, den Divisor b von C unter den Läuferstrich schiebt und unter C1 oder C 10 auf D das Ergebnis abliest.

5.4.2.3. Kubikwurzel im Nenner

Ganz entsprechend verläuft der Rechengang, wenn durch eine 3. Wurzel geteilt werden soll, d. h., wenn

$$c = \frac{b}{\sqrt[3]{a}}$$

auszurechnen ist. Hier rechnet man wie in 5.4.2.2. den Quotienten $\frac{\sqrt[3]{a}}{b}$ aus. Da aber über D 1 oder D 10 auf C die Kehrwerte der Zahlen von D unter C 10 bzw. C 1 stehen, liest man das Ergebnis c jetzt über den Enden der Teilung D auf C ab.

BEISPIEL

159. $\frac{146}{\sqrt[3]{17{,}8}} = \underline{\underline{0{,}558}}$

Divisionen durch eine 3. Wurzel rechnet man mit Rechenstäben, die die K-Teilung auf der Zunge haben, wie eine gewöhnliche Division. Man stellt 1–7–8–0 auf K (auf der Zunge) und damit $\sqrt[3]{17{,}8} = 2{,}61$ auf der Teilung C über 1–4–6–0 von D. Unter C 10 steht dann auf D das Ergebnis.

5.4.2.4. Kubikwurzel aus einem Quotienten

Soll die 3. Wurzel aus einem Quotienten, d. h.,

$$c = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$$

berechnet werden, dann ist zur Erläuterung des Rechenganges folgende Überlegung notwendig: Gesucht ist die Zahl $c = \sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$ die mit $\sqrt[3]{b}$ malgenommen $\sqrt[3]{a}$ ergibt:

$$\sqrt[3]{b} \cdot c = \sqrt[3]{a}$$

Bedenkt man, daß durch den Übergang von K nach D die 3. Wurzel gezogen wird, dann ergibt sich nachfolgende Einstellung: Auf K stellt man b ein und erhält unter dem Läuferstrich auf D den Wert

$\sqrt[3]{b}$. Jetzt schiebt man die Zunge mit C 1 oder C 10 unter den Läuferstrich und dann den Läufer über a von der Teilung K. Dann steht unter dem Läuferstrich auf C das Ergebnis

$$c = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$$

weil $\sqrt[3]{a}$ auf D abzulesen ist. Prüfen Sie die Einstellung am Beispiel $\sqrt[3]{\frac{125}{8}} = 2{,}5$ nach!

5.4.2.5. Kehrwert des Produktes eines Faktors mit einer Kubikwurzel

Schließlich soll noch erläutert werden, wie man den Kehrwert des Produktes eines Faktors mit einer Kubikwurzel, d. h.,

$$c = \frac{1}{a \cdot \sqrt[3]{b}}$$

berechnet. Man geht von b auf K mit dem Läuferstrich nach D und schiebt a von CI darüber, bildet also das Produkt $a \cdot \sqrt[3]{b}$.
Man liest aber nicht unter C 1 oder C 10 ab, sondern über D 10 oder D 1, weil noch der Kehrwert zu bilden ist.

5.4.3. Zusammenarbeit der Teilungen A und K

Bezeichnet man die auf D eingestellten Zahlen mit a, dann stehen genau senkrecht darüber auf A die Zahlen a^2 und darüber auf K die Zahlen a^3.
Bekanntlich bilden wir durch den Übergang
von D nach A die Quadratzahl von a, also a^2,
von D nach K die Kubikzahl von a, also a^3,
von A nach D die Quadratwurzel von a^2, also a, und
von K nach D die Kubikwurzel von a^3, also a.
Was geschieht nun beim Übergang von A nach K und umgekehrt?
Wir denken uns einen Übergang zur Teilung D noch dazwischengeschaltet. Nennen wir die auf A eingestellte Zahl b, dann gilt für den Übergang

$$\text{A} \to \text{D:} \qquad b \to \sqrt{b} = b^{1/2},$$
$$\text{D} \to \text{K:} \qquad b^{1/2} = \sqrt{b} \to b^{3/2} = \sqrt{b^3}.$$

Damit haben wir die Möglichkeit, von einer auf A eingestellten Zahl b die Potenz $b^{3/2} = \sqrt{b^3}$ zu bilden, wenn wir von A nach K gehen. Das heißt, es ist

$$\text{A} \to \text{K:} \qquad b \to b^{3/2} = \sqrt{b^3}.$$

Entsprechend verläuft ein Übergang von K nach A. Nennen wir die auf K eingestellte Zahl c. Jetzt liefern uns

$$\text{K} \to \text{D:} \qquad c \to \sqrt[3]{c} = c^{1/3},$$
$$\text{D} \to \text{A:} \qquad \sqrt[3]{c} = c^{1/3} \to \sqrt[3]{c^2} = c^{2/3}.$$

Wir bilden also von den auf K eingestellten Zahlen c die Potenz $c^{2/3} = \sqrt[3]{c^2}$ durch einen Übergang von K nach A, so daß also

$$\text{K} \to \text{A:} \qquad c \to c^{2/3} = \sqrt[3]{c^2} \text{ gilt.}$$

BEISPIELE

160. Bild 89 zeigt auf K $c = 58$,
A 15
D 3,87

denn es gilt $(15)^{3/2} = 58$, weil $(\sqrt{15})^3 = 3{,}87^3 = 58$

und $(58)^{2/3} = 15$, weil $(\sqrt[3]{58})^2 = 3{,}87^2 = 15$.

161. Das dritte KEPLERsche Gesetz lautet: Die Quadrate der Umlaufzeiten der einzelnen Planeten verhalten sich wie die 3. Potenzen ihrer mittleren Entfernung von der Sonne. Wie groß ist die mittlere Entfernung der Venus von der Sonne, wenn die Erde mit einer mittleren Entfernung von $r_1 = 149 \cdot 10^6$ km eine Umlaufdauer von $T_1 = 365{,}26$ Tagen und die Venus eine Umlaufdauer von $T_2 = 224{,}70$ Tagen hat?

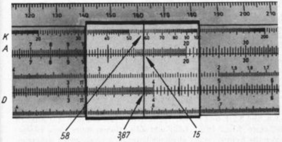


Bild 89

Aus $\frac{T_2^2}{T_1^2} = \frac{r_2^3}{r_1^3}$

ergibt sich $r_2^3 = r_1^3 \frac{T_2^2}{T_1^2}$ oder

$$r_2 = r_1 \sqrt[3]{\frac{T_2^2}{T_1^2}} = r_1 \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{2/3} =$$
$$= 149 \cdot 10^6 \text{ km} \cdot \left(\frac{224{,}70}{365{,}26}\right)^{2/3} =$$
$$= 149 \cdot 10^6 \cdot 0{,}615^{2/3} \text{ km} =$$
$$= 149 \cdot 10^6 \cdot 0{,}722 \text{ km} = 107{,}6 \cdot 10^6 \text{ km}.$$

Die mittlere Entfernung der Venus von der Sonne beträgt 107,6 · 10^6 km.

Die Einstellung der 0,615 auf K erfolgt zwischen K 100 und K 1000 und die Ablesung der 0,722 auf A zwischen A 10 und A 100.

5.5. Spezielle Rechnungen

In diesem Abschnitt sollen bestimmte Rechnungen, die immer wieder vorkommen, behandelt werden. Es handelt sich dabei um das Aufstellen von Wertetabellen für Funktionen, um Proportionen mit ihren Anwendungen, Berechnung von Kreissektoren, Umrechnungen von Winkeln aus dem Gradmaß ins Bogenmaß oder Neugradmaß und um Prozentrechnung.

5.5.1. Reziproke Werte

Die Berechnung der reziproken Werte von irgendwelchen Zahlen ist dann besonders einfach, wenn der Rechenstab eine CI-Teilung besitzt. Es stehen, wie in 4.3.1. und 5.1.3. bereits mitgeteilt worden ist, genau über den Werten von C auf der Teilung CI die Kehrwerte und umgekehrt. Der Übergang erfolgt am besten mit dem Läuferstrich.
Etwas schwieriger ist, es, wenn die CI-Teilung fehlt. Dann muß die Zunge des Rechenstabes benutzt werden. Zu den Werten unter C 1 oder C 10 auf der Teilung D stehen die Ziffernfolgen der Kehrwerte über D 10 oder D 1 auf der C-Teilung.
Eine andere Methode, Kehrwerte zu bilden, ergibt sich bei Rechenstäben, die doppelt-logarithmisch geteilte Skalen LL haben. Vgl. 5.7.3. und 5.7.4. und Bilder 126, 131, 132, 133, 138 und 145! Auf den Teilungen LL_{00}, LL_{01}, LL_{02} und LL_{03} stehen unter dem Läuferstrich die Kehrwerte der ebenfalls unter dem Läuferstrich stehenden Zahlen von LL_0, LL_1, LL_2 und LL_3 und umgekehrt.

5.5.2. Konstante Verhältnisse

Häufig sind konstante Verhältnisse (z. B. bei Tabellen) zu berechnen. Hier haben wir im Rechenstab das ideale Rechengerät. Mit einer einzigen Zungeneinstellung und Läuferverschiebungen können wir bequem die gewünschten Werte berechnen.
Bild 90 zeigt bei einem Taschenrechenstab die Einstellung für das konstante Verhältnis $\frac{2}{3}$. Unter 2 von A ist 3 von B geschoben worden. Jetzt stehen alle weiteren Zahlenpaare mit dem konstanten Verhältnis $\frac{2}{3}$ übereinander. Es gilt mithin

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \cdots \quad \text{aber auch}$$
$$\frac{2}{3} = \frac{3}{4{,}5} = \frac{7}{10{,}5} = \frac{5{,}5}{8{,}25} = \cdots$$

Diese Rechnung ist nicht nur mit den Teilungen A und B durchführbar, sondern auch mit den Teilungen D und C. Wir wählen aber im Bild 90 die Teilungen A und B, das wird sich häufig empfehlen, weil damit alle Zahlen zwischen 1 und 10, d. h. alle Ziffernfolgen erfaßt werden können, während bei den Teilungen C und D eine Umstellung der Zunge notwendig werden kann. Vergleichen Sie dazu auch den Abschnitt 5.4.!
Müssen beispielsweise irgendwelche Größen von einer Einheit in eine andere umgerechnet werden, so geschieht das ebenfalls mit einer Einstellung der Zunge.

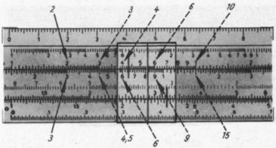


Bild 90

Da 1 Zoll (inch) $= 2{,}54$ cm gilt, haben wir, wenn 2–5–4 unter A 1 gestellt wird, eine Umrechnungstabelle (Bild 91), bei der auf A die Maßzahlen für Zoll und auf B die Maßzahlen für cm stehen.

Liegen konstante Verhältnisse der Form $y = \frac{x}{a}$ vor, wobei a konstant und y abhängig von x veränderlich ist, so stellen wir zweckmäßig $\frac{1}{a}$

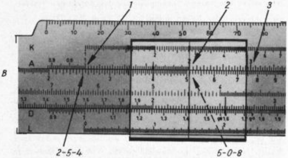


Bild 91

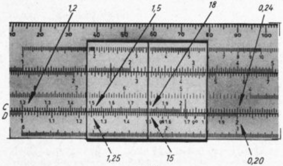


Bild 92

dadurch ein, daß wir a über D 1 oder D 10 stellen. Dann stehen unter allen Werten von x auf C auf der Teilung D die y-Werte.

Bild 92 zeigt für $y = \frac{x}{1{,}2}$

$$\begin{array}{ll} x_1 = 1{,}5 & y_1 = 1{,}25 \\ x_2 = 18 & y_2 = 15 \\ x_3 = 0{,}24 & y_3 = 0{,}20 \quad \text{usw.} \end{array}$$

Ganz entsprechend können wir bei

$$y = \frac{a}{x} \quad (a \text{ konstant}) \text{ rechnen.}$$

Hier stellen wir C 1 oder C 10 über a von D und finden zu allen Werten von x auf CI genau darunter die zugehörigen y-Werte auf D.

Bild 93 zeigt für $y = \frac{11{,}5}{x}$

$$\begin{array}{ll} x_1 = 0{,}9 & y_1 = 12{,}8 \\ x_2 = 6 & y_2 = 1{,}92 \\ x_3 = 72 & y_3 = 0{,}1598. \end{array}$$

Im ersten Beispiel berechneten wir die direkte Proportion

$$y : x = 1 : 1{,}2$$

und im zweiten Beispiel die indirekte Proportion

$$y : \frac{1}{x} = 11{,}5 : 1.$$

Allgemein braucht der Zähler bzw. der Nenner der rechten Seite der

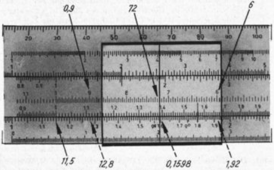


Bild 93

Proportionen nicht 1 zu sein. Es könnte ganz allgemein gelten

$$y : x = a : b \quad \text{bzw.} \quad y : \frac{1}{x} = c : d$$

Wir wollen die Anwendung des Rechenstabes für solche Proportionen an einigen Beispielen erläutern.

BEISPIELE

162. Ein Wartburg verbraucht für die Strecke von 100 km 9,4 l Kraftstoff. Welche Strecke kann er mit 5 l zurücklegen? Die aufzustellende Proportion lautet

$$\frac{x}{5\,\text{l}} = \frac{100\,\text{km}}{9{,}4\,\text{l}}$$

und, nach x aufgelöst, ergibt sich

$$x = \frac{5 \cdot 100}{9{,}4}\,\text{km} = 53{,}2\,\text{km}.$$

Man kann noch rund $\underline{\underline{53\,\text{km}}}$ weit fahren.

Stellt man das Verhältnis $\frac{100}{9{,}4}$ ein, dann hat man über den auf C einzustellenden Benzinmengen auf D die Strecken in km, die damit gefahren werden können.

163. Stoppt man bei einer Eisenbahnfahrt für den Abstand zweier Kilometersteine von $s = 200$ m die dazu benötigte Zeit t, dann kann man daraus die Geschwindigkeit des Zuges in Kilometer je Stunde berechnen. Welche Geschwindigkeit hatte der Zug, wenn er für die Strecke von 200 m die Zeit von 10,5 s brauchte?

$$v = \frac{200\,\text{m}}{10{,}5\,\text{s}} = \underline{\underline{19{,}05\,\text{m/s}}}$$

Es gilt die Proportion

$$\frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}} = \frac{200\,\text{m}}{10{,}5\,\text{s}}.$$

Mithin ist für die Zeit $t = 1\,\text{h} = 3600\,\text{s}$:

$$\text{Weg} = \frac{200\,\text{m}}{10{,}5\,\text{s}} \cdot 3600\,\text{s} = 19{,}05 \cdot 3600\,\text{m} = 19{,}05 \cdot 3{,}6\,\text{km} =$$

$$= \underline{\underline{68{,}6\,\text{km}}}$$

164. Die Herstellung von 750 Stühlen kostet 7010,– M. Welchen Preis muß man bei der Berechnung einer Wohnzimmereinrichtung in Ansatz bringen, wenn man rechnet, daß dazu 6 Stühle gehören?

Es ergibt sich die Proportion

$$\frac{\text{Preis}}{7010\,\text{M}} = \frac{6}{750} \quad \text{und damit}$$

$$\text{Preis} = \frac{6 \cdot 7010}{750}\,\text{M} = \underline{\underline{56{,}10\,\text{M}}}.$$

165. Bei parallelgeschalteten Widerständen sind die fließenden Stromstärken den Widerständen umgekehrt proportional. Wie groß ist der Widerstand R_1, wenn durch ihn $I_1 = 2{,}4$ A fließen, während durch den parallelgeschalteten Widerstand $R_2 = 16{,}8\,\Omega$ der Strom $I_2 = 1{,}95$ A fließt?

$$\text{Aus} \quad \frac{R_1}{R_2} = \frac{I_2}{I_1} \quad \text{ergibt sich}$$

$$R_1 = \frac{I_2}{I_1} R_2 = \frac{1{,}95\,\text{A}}{2{,}4\,\text{A}}\ 16{,}8\,\Omega = \underline{\underline{13{,}65\,\Omega}}.$$

166. Zur Berechnung des Flächeninhalts eines Kreissektors mit einem bestimmten Öffnungswinkel bedient man sich der Proportionen. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Kreissektors mit dem Öffnungswinkel von 36,4° bei einem Kreisradius von $r = 4{,}75$ cm?
Es ergibt sich aus dem Verhältnis des Flächeninhaltes zum Öffnungswinkel und der Kreisfläche zum Vollwinkel die Proportion

$$\frac{A}{36{,}4^\circ} = \frac{\pi r^2}{360^\circ} \quad \text{und}$$

$$A = \frac{\pi r^2 \cdot 36{,}4^\circ}{360^\circ} = \pi \cdot 4{,}75^2 \cdot \frac{36{,}4^\circ}{360^\circ}\,\text{cm}^2 = \underline{\underline{7{,}16\,\text{cm}^2}}.$$

Wir rechneten: π auf D, darüber 3–6–0–0 von C, Läuferstrich über 3–6–4–0 von C. Unter den Läuferstrich 4–7–5 von CI. Unter 4–7–5 von C steht auf D das Ergebnis.

Der Umrechnungsfaktor $\frac{\text{Öffnungswinkel}}{360^\circ}$ ist für alle Sektoren mit gleichem Winkel fest und gilt für alle Berechnungen der Kreissektoren verschiedener Radien.
Besonders wichtig sind die Proportionen bei der Umrechnung des Gradmaßes bei Winkeln in das Bogenmaß und umgekehrt.

BEISPIELE

167. Es sei der Winkel 35° in das Bogenmaß umzurechnen.
Es ergibt sich die Proportion

$$\frac{\widehat{\alpha}}{\pi} = \frac{35^\circ}{180^\circ} \quad \text{und}$$

$$\widehat{\alpha} = \pi \cdot \frac{35^\circ}{180^\circ} = 0{,}611 .$$

Der Winkel von 35° hat ein Bogenmaß $a = \underline{\underline{0{,}611}}$.

Der Bruch $\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{0{,}01747}{1^\circ}$ kann als feststehender Faktor für alle Umrechnungen der Winkel vom Grad- ins Bogenmaß verwendet werden. Vgl. dazu auch 5.6.3.!

168. Das Bogenmaß eines Winkels sei 1,275. Wie groß ist das Gradmaß?
Aus der Proportion

$$\frac{\beta}{180^\circ} = \frac{1{,}275}{\pi} \quad \text{ergibt sich}$$

$$\beta = \frac{1{,}275}{\pi}\, 180^\circ = 73{,}1^\circ .$$

Der Winkel, dessen Bogenmaß 1,275 beträgt, hat im Gradmaß die Größe von $\underline{\underline{73{,}1^\circ}}$.

Hier kann der feststehende Faktor $\frac{180^\circ}{\pi}$ für alle entsprechenden Rechnungen verwendet werden.
Beachten Sie eine andere Art der Umrechnung vom Winkelmaß in Bogenmaß in 5.6.3. und 5.10.1.!
Eine weitere Umrechnung, die gelegentlich vorgenommen werden muß, ist die von Altgrad (Vollwinkel = 360°) in Neugrad (Vollwinkel = 400^g) und umgekehrt.

BEISPIELE

169. Zu einem Winkel $\alpha = 67^\circ$ soll die Maßzahl in Neugrad berechnet werden.
Es ergibt sich die Proportion

$$\frac{\alpha}{67^\circ} = \frac{400^g}{360^\circ}$$

$$\alpha = 67^\circ \cdot \frac{400^g}{360^\circ} = \underline{\underline{74{,}4^g}}.$$

Der Faktor $\frac{400^g}{360^\circ}$ bleibt bei allen diesen Umrechnungen konstant.

170. Es soll zu einem Winkel $\beta = 117^g$ die Maßzahl in Altgrad berechnet werden.
Die Proportion lautet

$$\frac{\beta}{117^g} = \frac{360^\circ}{400^g} \text{ und ergibt}$$

$$\beta = 117^g \cdot \frac{360^\circ}{400^g} = \underline{\underline{105{,}3^\circ}}.$$

Auch dieser Faktor $\frac{360^\circ}{400^g}$ ist für alle solchen Umrechnungen konstant.

5.5.3. Berechnung von Tabellenwerten

Vielfach müssen fortlaufende Tabellen berechnet werden, denen nichtlineare Funktionen zugrunde liegen. Für die konstanten Verhältnisse haben wir dies im letzten Abschnitt bereits an einigen Beispielen besprochen. Jetzt sollen solche Tabellen erörtert werden, die umfangreichere Rechnungen erfordern.

BEISPIELE

171. Die Kreisfläche soll bei verschiedenen Durchmessern berechnet werden. Aus der Formel für die Kreisfläche ergibt sich

$$A = \frac{\pi}{4}\, d^2 = 0{,}785\, d^2 .$$

Zur Berechnung wird es zweckmäßig sein, die Faktoren umzustellen und mit den Teilungen A und C (indirekt also auch mit B) zu rechnen. B 100 wird über 7–8–5 von A gestellt. Über den Durchmessern d auf der Teilung C stehen jetzt auf der Teilung A die Kreisflächen.
Man erhält für

$$d_1 = 1{,}5 \text{ cm} \qquad A_1 = 0{,}785 \cdot 1{,}5^2 \text{ cm}^2 = \underline{\underline{1{,}766 \text{ cm}^2}}$$
$$d_2 = 2{,}25 \text{ cm} \qquad A_2 = 0{,}785 \cdot 2{,}25^2 \text{ cm}^2 = \underline{\underline{3{,}975 \text{ cm}^2}}$$
$$d_3 = 3{,}76 \text{ cm} \qquad A_3 = 0{,}785 \cdot 3{,}76^2 \text{ cm}^2 = \underline{\underline{11{,}1 \text{ cm}^2}}$$
$$d_4 = 0{,}74 \text{ cm} \qquad A_4 = 0{,}785 \cdot 0{,}74^2 \text{ cm}^2 = \underline{\underline{0{,}43 \text{ cm}^2}}$$

Beachten Sie dazu auch das Rechnen mit festen Marken in 5.10.1.5. und 5.10.2.1.!

172. Bei einem Schwingkreis ergibt sich die Frequenz aus der Schwingungsformel $\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$, wobei L die Induktivität und C die Kapazität angeben. Nehmen wir an, daß für eine feste Induk-

tivität von $L = 4{,}25\ \mu\mathrm{H} = 4{,}25 \cdot 10^{-6}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{A}}$ für veränderliche Kapazitäten die Frequenz zu berechnen ist, dann ergibt sich folgende Formelumstellung:

$$v = \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{\sqrt{L}}\,\frac{1}{\sqrt{C}}, \quad \text{wegen} \quad \frac{1}{2\pi} = 0{,}159$$

$$v = \frac{0{,}159}{\sqrt{L}}\,\frac{1}{\sqrt{C}} \quad \text{und weiter mit } L = 4{,}25 \cdot 10^{-6}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{A}}$$

$$v = \frac{0{,}159}{\sqrt{4{,}25 \cdot 10^{-6}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{A}}}}\,\frac{1}{\sqrt{C}} = \frac{77{,}2}{\sqrt{C}}\sqrt{\frac{A}{\mathrm{Vs}}}\,.$$

Jetzt haben wir eine einfache Rechnung. Auf D stellen wir 7–2–7 mit dem Läuferstrich ein und verschieben die Zunge so, daß die Werte für die Kapazität C auf der Teilung B unter dem Läuferstrich stehen. Dann kann man unter C 1 oder C 10 auf D die Ergebnisse ablesen.

Es ergeben sich für

a) $C_1 = 28\ \mathrm{pF} = 28 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{V}}$

$$v_1 = \frac{77{,}2}{\sqrt{28 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{V}}}}\sqrt{\frac{A}{\mathrm{Vs}}} = \frac{77{,}2 \cdot 10^{6}}{\sqrt{28}}\,\frac{1}{\mathrm{s}} =$$

$$= 14{,}57 \cdot 10^{6}\,\frac{1}{\mathrm{s}} = \underline{\underline{14{,}57\ \mathrm{MHz}}}$$

b) $C_2 = 42{,}5\ \mathrm{pF} = 42{,}5 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{V}}$

$$v_2 = \frac{77{,}2 \cdot 10^{6}}{\sqrt{42{,}5}}\,\frac{1}{\mathrm{s}} = 11{,}84 \cdot 10^{6}\,\frac{1}{\mathrm{s}} = \underline{\underline{11{,}84\ \mathrm{MHz}}}$$

c) $C_3 = 117{,}8\ \mathrm{pF} = 117{,}8 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{V}}$

$$v_3 = \frac{7{,}72 \cdot 10^{6}}{\sqrt{117{,}8}}\,\frac{1}{\mathrm{s}} = 7{,}1 \cdot 10^{6}\,\frac{1}{\mathrm{s}} = \underline{\underline{7{,}1\ \mathrm{MHz}}}$$

d) $C_4 = 0{,}45\ \mu\mathrm{F} = 0{,}45 \cdot 10^{-6}\,\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{V}}$

$$v_4 = \frac{77{,}2 \cdot 10^{3}}{\sqrt{0{,}45}}\,\frac{1}{\mathrm{s}} = 115 \cdot 10^{3}\,\frac{1}{\mathrm{s}} = \underline{\underline{115\ \mathrm{kHz}}}$$

5.6. Winkelfunktionen

(Beachten Sie hierzu auch Tafel 2 am Ende des Buches!)

Von diesem Abschnitt an sind die zu beschreibenden Rechenoperationen auf manchen Schulrechenstäben und manchen Taschenrechenstäben nicht mehr ausführbar, weil die entsprechenden Teilungen fehlen.

Bei Rechenstäben nach dem System „Rietz“ befinden sich auf der Rückseite der Zunge 2 oder 3 Skalen, die der Bestimmung der Winkelfunktionen dienen. Bei Stäben nach dem System „Darmstadt“ wird die Zungenrückseite für andere Teilungen benötigt. Deshalb sind die Teilungen für die Winkelfunktionen auf der Unterkante, der Rückseite oder Vorderseite des Stabkörpers angebracht. Sie tragen die Bezeichnung

S oder sin für die Sinusteilung,

T oder tan für die Tangensteilung,

ST oder sin/tan für die Sinus-Tangens-Teilung.

Auf modernen Rechenstäben ist anders bezeichnet worden, nämlich

S oder ∢ sin

T oder ∢ tan

Diese Kennzeichnung ist zwar auch noch nicht richtig, sie soll aber andeuten, daß diese Teilungen die Winkelwerte der Sinus- bzw. Tangensfunktion enthalten.

Rechenstäbe, bei denen ∢ sin und ∢ tan auf der Zungenrückseite angebracht sind, können in zweierlei Weise benutzt werden. Entweder wir lassen die Zunge in Normalstellung und stellen die Winkel in den rückwärtigen Ausfräsungen des Stabkörpers ein, drehen den Stab herum und lesen auf der Vorderseite die Funktionswerte ab, oder aber wir schieben die Zunge gewendet (mit der Rückseite nach vorn) in den Stabkörper ein. In diesem Falle zeigt der Rechenstab auf seiner Vorderseite eine Funktionstabelle, aus der wir die Werte für die trigonometrischen Funktionen mit Hilfe des Läufers ablesen können.

Mit gewendeter Zunge entsprechen dann die Rechenstäbe nach dem System „Rietz“ den Rechenstäben, bei denen die ∢ sin- und ∢ tan-Teilungen auf dem Stabkörper angebracht sind.

Die beiden Ausfräsungen auf der Rückseite des Stabkörpers können sich an verschiedenen Stellen befinden, je nachdem, mit welchen

Teilungen die ∢ sin- bzw. ∢ tan-Teilungen zusammenarbeiten. Von Fall zu Fall ist zu untersuchen, welche Ausfräsung in Betracht kommt. Es war gesagt worden, daß die zwei oder drei Teilungen die Argumente der Winkelfunktionen enthalten. Wo werden nun die Werte der Winkelfunktionen abgelesen? Bei den älteren Rechenstab-Systemen und bei Taschenrechenstäben, wenn die Teilung ST oder ∢ sin/tan fehlt, wird mit den Teilungen A und B zusammengearbeitet. Bei neueren Rechenstäben werden die Werte der trigonometrischen Funktionen auf den Grundskalen C und D abgelesen. Einfacher ist es bei der Tangenseinteilung, sie arbeitet immer mit den Skalen C und D zusammen. Da wir jedoch mechanisches Merken vermeiden wollen, denn eine formale Regel ist schnell vergessen, wollen wir uns lieber für bestimmte Winkel die Werte der einzelnen Winkelfunktionen einprägen. Stellen wir dann am Rechenstab die entsprechenden Winkel ein, dann ist leicht zu entscheiden, welche Teilung das Ablesen der trigonometrischen Funktionswerte erlaubt.

Zum Einprägen kommen in Betracht:

$\sin 0° = 0$ (auf dem Rechenstab nicht einstellbar!)

$$\sin 30° = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

$$\sin 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0{,}707$$

$$\sin 60° = \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0{,}866$$

$$\sin 90° = 1$$

Auf der Tangensskale:

$\tan 0° = 0$ (auf dem Rechenstab nicht einstellbar!)

$$\tan 30° = \frac{1}{3}\sqrt{3} = 0{,}5774$$

$$\tan 45° = 1$$

Außerdem müssen wir uns einprägen:

Die Beträge der Sinus- und Cosinuswerte liegen zwischen 0 und 1. Die Beträge der Tangens- und Cotangenswerte liegen zwischen 0 und ∞. Werden auf A oder B die Werte der Sinus- oder Cosinusfunktion abgelesen, so sind die Werte der Teilung stets durch 100 zu teilen. Wird auf C oder D abgelesen, dann ist durch 10 zu teilen, denn stets sind die Werte (mit Ausnahme von $\sin 90° = \cos 0° = 1$) Dezimalzahlen der Art

0, ...

Etwas komplizierter ist es bei der Tangensfunktion. Die Teilung gestattet nur Winkelwerte bis 45° einzustellen. Die Werte für größere Winkel müssen durch Umrechnung gewonnen werden. Um dies zu vermeiden, haben moderne Rechenstäbe eine zweite Teilung für ∢ tan erhalten.

Da die Funktionswerte von tan 0° bis tan 45° zwischen 0 und 1 liegen, müssen auch hier die Werte Dezimalzahlen von der Form

0, ... sein.

Die Winkelwerte sind bei den einzelnen Typen der Rechenstäbe unterschiedlich angegeben. Während die älteren Modelle noch die Unterteilung der Grade in Minuten bevorzugen, sind bei den neueren Modellen die Grade dezimal unterteilt. Um Ihnen die Umrechnung zu erleichtern, sei kurz mitgeteilt, daß man leicht eine Gegenüberstellung von Minute und Bruchteilen von Graden erhält, wenn man B 100 unter A 60 stellt. Dann stehen unter den Minuten auf A die Hundertstel Grad auf B.

Da im folgenden Abschnitt Winkelangaben sowohl in Minuten und Sekunden als auch in Bruchteilen von Grad benötigt werden, seien folgende Beziehungen in Erinnerung gebracht:

$$1' = \frac{1°}{60} = 0{,}01667°$$

$$1'' = \frac{1°}{3600} = 0{,}000278°$$

$$0{,}1° = 6'$$

$$0{,}01° = 36''$$

5.6.1. Verwendung der Sinusteilung

Die Skale beginnt mit 5° 44′ (sin 5° 44′ = 0,1),
sie endet mit 90° (sin 90° = 1).

Betrachten wir zunächst die Einteilung der Skale bei einem Normalrechenstab!

Im Raum zwischen 6° und 10° ist bei älteren Modellen jeder Grad in 12 Teile eingeteilt. Jeder Teilstrich entspricht mithin 5′. Die 10., 20., 40. und 50. Minute ist durch einen längeren Strich hervorgeho-

ben und die 30. Minute durch einen noch etwas längeren Strich. Von 10° bis 20° haben wir eine Unterteilung in 6 Teile je Grad, also 10′. Die 30. Minute ist wieder durch einen längeren Strich hervorgehoben. Von 20° bis 40° sind die Grade nicht mehr einzeln angeschrieben, sondern nur durch einen längeren Strich erkennbar. Die Einteilung läuft jetzt von 20′ zu 20′. Noch gröber wird die Unterteilung zwischen 40° und 60°. Dort sind nur die ganzen Grade durch längere Striche und die halben Grade aufgetragen. Zwischen 60° und 80° haben wir schließlich nur noch die Grade markiert. Dann folgen nur noch 82,5°, 85° und 90°.
Bei modernen Rechenstäben ist die sin-Teilung dezimal geteilt. Zwischen 5,5° und 20° beträgt der Strichabstand $^1/_{10}$°, zwischen 20° und 40° ist er $^1/_5$°, zwischen 40° und 60° sogar $^1/_2$°. Dann sind nur noch ganze Grade abgetragen. Zwischen 80° und 90° ist nur noch 85° markiert. Bei den Stäben „Reiss – Darmstadt – Record" und „Reiss – Duplex" liegt die Grenze zwischen den 0,1°- und 0,2°-Teilungen bei 15°, die zwischen den 0,2°- und 0,5°-Teilungen bei 30°. Ab 60° betragen die Strichabstände 1° und ab 70° sogar 5°. Die Sinusteilungen werden in Verbindung mit den Teilungen C und D der Vorderseite des Rechenstabes verwendet.
Andere, meist ältere Rechenstäbe haben eine andere Unterteilung, die in Verbindung mit den Teilungen A und B des Rechenstabes verwendet werden. Davon soll am Ende dieses Abschnittes gesprochen werden.
Haben wir die Zunge des Rechenstabes (System „Rietz") umgedreht und 90° genau unter A 100 gestellt, dann stehen wie bei den Rechenstäben, die die ∢-sin-Teilung auf dem Stabkörper tragen, unter (bei manchen Konstruktionen über) jedem Winkelwert auf der ∢-sin-Teilung auf der Teilung D die zugehörigen Werte für den Sinus, wenn wir den Faktor 0,1 berücksichtigen. Zum Ablesen verwenden wir den Läuferstrich oder (beim System „Darmstadt" aus Holz) den Läuferstrich und den Hilfsstrich für die Unterkante des Rechenstabes oder (beim System „Darmstadt" aus Metall) den Läuferstrich und den Läuferstrich der Läuferrückseite.
Die Grundteilungen C und D enthalten mithin alle Sinuswerte für die Winkel zwischen 5,72° (5° 43′) und 90°. Die Sinuswerte liegen dabei zwischen 0,1 und 1,0. Haben wir beim System „Rietz" die Zunge nicht umgedreht und arbeiten wir mit der rechten Ausfräsung auf der Rückseite des Rechenstabes, dann lesen wir die Sinuswerte auf der Skale C über 10 D ab.

5.6.1.1. Werte der Sinusfunktion

Wir wollen sin 40° bestimmen. Wir verschieben die Zunge so, daß sich 40° mit dem oberen Strich in der rechten Ausfräsung auf der Stabrückseite decken (Bild 94).

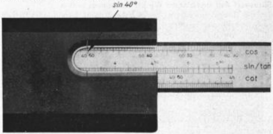


Bild 94

Dann lesen wir über D 10 ab 6–4–3
sin 40° = 0,643 (Bild 95).

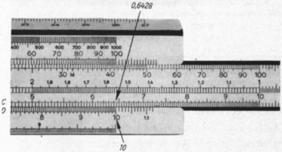


Bild 95

ÜBUNGSAUFGABEN

Man berechne:

64. sin 7° 35′ 65. sin 8,15° 66. sin 15° 10′

67. sin 17,85° 68. sin 27° 50′ 69. sin 36,7°
70. sin 56,3° 71. sin 73,5°

In der umgekehrten Richtung müssen wir gehen, wenn wir aus dem Sinuswert den zugehörigen Winkel bestimmen wollen.
Ist die Zunge umgedreht eingeschoben, dann stehen unmittelbar über den Sinuswerten der Skale D die Winkelwerte. Wir lesen z. B. ab 0,1794 = sin 10° 20′ (Bild 96).

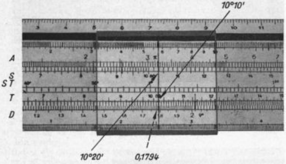


Bild 96

Denselben Wert erhalten wir, wenn wir bei normaler Zungenstellung 1–7–9–4 von C über D 10 stellen und auf der Rückseite am oberen Strich der rechten Ausfräsung den Winkel ablesen.

ÜBUNGSAUFGABEN

Man bestimme die Winkel von folgenden Sinuswerten:

72. 0,235 73. 0,323 74. 0,434
75. 0,540 76. 0,625 77. 0,706

Bei Rechenstäben, die die ∢-sin-Teilung auf dem Stabkörper tragen, z. B. System „Darmstadt" (Metall), ist die Ablesung der Sinuswerte genauso vorzunehmen wie bei umgedrehter Zunge beim System „Rietz". Bild 96 ist also für die Ablesung bei solchen Rechen-

stäben typisch. Etwas anders verläuft die Ablesung bei Rechenstäben des Systems „Darmstadt" (Holz). Hier befindet sich die Teilung für die Winkelwerte zur Sinusfunktion auf der Unterkante des Stabkörpers. Abgelesen wird wieder mit dem Läufer und der

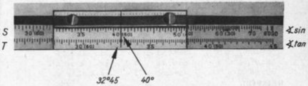


Bild 97

D-Teilung. Bringt man den Strich an der Unterkante des Läufers mit dem Winkelwert zur Deckung, dann liest man unter dem Läuferstrich auf D den zugehörigen Sinuswert ab. Die Bilder 97 und 98 zeigen die Einstellung

sin 40° = 0,643

Am rechten Ende der ∢-sin-Skale drängen sich die Werte zusammen. Damit ist ein genaues Einstellen von Winkelwerten erschwert. Wie

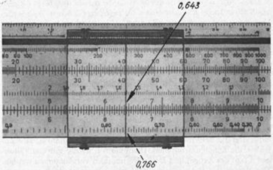


Bild 98

man trotzdem für Winkel zwischen 60° und 90° Werte der Sinusfunktion mit hinreichender Genauigkeit ermittelt, lesen Sie in 5.6.6.

5.6.1.2. Sinussatz

Berechnungen nach dem Sinussatz sind mit dem Rechenstab wie Proportionen (vgl. Seite 125) zu rechnen. Der Sinussatz lautet:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b}.$$

BEISPIEL

173. $\alpha = 49°$, $\beta = 76°$, $a = 15$ cm. Es sind die übrigen Dreiecksseiten b und c sowie der Winkel zu berechnen (Bild 99).

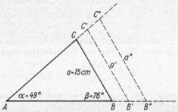


Bild 99

Da die Winkelsumme im Dreieck 180° beträgt, ergibt sich

$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 180° - 125° = 55°.$$

Die Berechnungen mit dem Sinussatz sind beim Rechenstab dann besonders einfach und bequem, wenn die S-Teilung auf dem Stabkörper ist. Dann können alle Rechnungen mit den Teilungen C und S ausgeführt werden. Trägt die Rückseite der Zunge die S-Teilung, dann sind die Berechnungen etwas umständlich. Deshalb ist zu empfehlen, die Zunge umzudrehen. Dann können wieder mit den Teilungen S (auf der Zunge) und D alle Rechnungen vorgenommen werden. Der Vorteil des Rechenstabes wird beim Sinussatz noch aus einem

anderen Grunde besonders deutlich. Mit einer einzigen Einstellung kann man nämlich alle entsprechenden Seiten ähnlicher Dreiecke (Bild 99) berechnen.

Wir haben $\sin\alpha = \sin 49° = 0{,}755$ bestimmt. Jetzt stellen wir auf D mit dem Läufer $\sin\beta = \sin 76° = 0{,}97$ ein und schieben 7–5–5 von C darüber. Unter den auf C eingestellten Werten für a, a', a'' usw. lesen wir auf D die Werte von b, b', b'' usw. ab. Aus $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\gamma}{c}$ errechnet man c, c', c'', usw. Es ergeben sich z. B.:

$a = 15$ cm	$b = 19{,}25$ cm	$c = 16{,}25$ cm
$a' = 20$ cm	$b' = 25{,}70$ cm	$c' = 21{,}70$ cm
$a'' = 36{,}5$ cm	$b'' = 46{,}8$ cm	$c'' = 39{,}60$ cm
usw.		

Gewisse Schwierigkeiten ergeben sich bei stumpfwinkligen Dreiecken. Hier muß beachtet werden, daß $\sin\alpha = \sin(180° - \alpha)$. Liegt z. B. folgende Aufgabe vor:

$$x = \frac{\sin 115°}{\sin 30°} \cdot 6{,}5 \text{ cm},$$

dann müssen wir rechnen

$$x = \frac{\sin 65°}{\sin 30°} \cdot 6{,}5 \text{ cm}.$$

Auch hier ergeben sich noch Schwierigkeiten. Über 9–0–6 von D ($\sin 65° = 0{,}906$) stellen wir 5–0–0 von C ($\sin 30° = 0{,}5$). Jetzt ist unter 6–5–0 von C kein Wert für x ablesbar. Wir könnten die Zunge umsetzen und finden $x = 11{,}78$ cm. Es wäre aber auch wegen der grundsätzlich gleichen Berechnung in ähnlichen Dreiecken möglich, unter 1–3–0–0 von C $(2 \cdot 6{,}5)$ den Wert $2x = 23{,}55$ cm abzulesen. Am Ende von 5.3.3. war aus der Hypotenuse und einer Kathete die andere Kathete berechnet worden. Die Berechnung ist auch mittels des Sinussatzes möglich. Sie ist sogar noch einfacher und liefert daneben noch die Basiswinkel des rechtwinkligen Dreieckes.

Unter Verwendung der auf Seite 115 vorgegebenen Zahlen $c = 11{,}3$ cm und $b = 5{,}25$ cm ergibt sich folgende Einstellung: Über D 10 oder 90° der S-Teilung stellt man 1–1–3 von C. Am zweckmäßigsten verwendet man die rechte Überteilung. Wenn diese nicht vorhanden ist, kann man auch 1–1–3 von CF (vgl. 5.9.!) verwenden. Verschiebt man den Läufer bis der Strich über 5–2–5 von C oder CF steht, dann liest man auf der S-Teilung $\beta = 27{,}7°$ ab. Dann ist $\alpha = 62{,}3°$. Stellt man nunmehr den Läufer über $62{,}3°$ von S, dann erhält man auf C bzw. CF die Länge der Kathete $a = 10{,}0$ cm.

5.6.1.3. Werte der Cosinusfunktion

Werden die Werte der Cosinusfunktion zu Winkeln zwischen 0° und 84° 16′ gesucht, so benutzen wir die Beziehung

$$\cos \alpha = \sin (90° - \alpha),$$

die wir auch beim Aufschlagen in der Logarithmentafel verwenden. Da die Cosinusfunktion die Cofunktion der Sinusfunktion ist, haben beide den gleichen Wert, wenn wir vom jeweiligen Winkel zum zugehörigen Komplementwinkel übergehen.
Stellen wir die oben erwähnten charakteristischen Werte zusammen, so erhalten wir

$\sin 0° = \cos 90° = 0$ (auf dem Rechenstab nicht einstellbar!)

$\sin 30° = \cos 60° = 0{,}5$ $\quad \sin 45° = \cos 45° = 0{,}707$
$\sin 60° = \cos 30° = 0{,}868$ $\quad \sin 90° = \cos 0° = 1$

Die Funktionswerte sind gegenläufig und bei 45° einander gleich. Es ist mithin

$$\sin 40° = \cos 50°.$$

Die Bilder 94 und 95 zeigen deshalb nicht nur

$$\sin 40° = 0{,}643,$$

sondern auch

$$\cos 50° = 0{,}643.$$

Bild 96 zeigt ebenfalls beim System „Rietz", allerdings bei umgedrehter Zunge, nicht nur

$$\sin 10° 20' = 0{,}1794,$$

sondern auch

$$\cos 79° 40' = 0{,}1794.$$

Diese Einstellung ist vollkommen der entsprechend, die man mit Rechenstäben erhalten würde, die die sin-Teilung auf der Vorder- oder Rückseite des Stabkörpers tragen.

Die Bilder 97 und 98 dagegen zeigen die Einstellung beim System „Darmstadt" (Holz), wo die sin-Teilung an der Unterkante des Stabkörpers angebracht ist. Beide Bilder zeigen sowohl

$$\sin 40° = 0{,}643$$

als auch

$$\cos 50° = 0{,}643.$$

Bei manchen Rechenstäben sind die Winkel für die Cosinusfunktion in roten Zahlen oder in Klammern gesetzt gegenläufig zu den Winkeln für die Sinusfunktion angegeben. Ist das nicht der Fall, so müssen wir beim Bestimmen der Cosinuswerte die Komplementwinkel zum gegebenen Winkel berechnen und an Stelle $\cos \alpha$ dann $\sin (90° - \alpha)$ einstellen.
Eine andere Methode, Werte der Cosinusfunktion zu bestimmen, wird im Abschnitt 5.6.4. beschrieben.

BEISPIELE

174. $\cos 62{,}5° = \sin (90° - 62{,}5°) = \sin 27{,}5°$
Wir stellen sin 27,5° ein, und erhalten
$\sin 27{,}5° = \cos 62{,}5° = \underline{\underline{0{,}462}}$

175. $\cos 45° 20' = \sin (89° 60' - 45° 20') = \sin 44° 40'$
Wir stellen sin 44° 40′ ein und erhalten
$\sin 44° 40' = \cos 45° 20' = \underline{\underline{0{,}702}}$

ÜBUNGSAUFGABEN

Man berechne:

78. cos 24,5°	79. cos 49,1°	80. cos 62° 50′
81. cos 72,35°	82. cos 80° 35′	83. cos 83,28°

5.6.1.4. Verschiedene Anwendungen

$I \cdot x = ab \sin \alpha \qquad y = ab \cos \alpha$

Produkte dieser Art finden wir bei Wechselstromberechnungen. Bekanntlich berechnen sich Wirkleistung und Blindleistung des Wechselstromes nach den Gleichungen

$$P_W = U \cdot I \cos \varphi,$$
$$P_B = U \cdot I \sin \varphi.$$

BEISPIEL

176. $U = 220$ V; $I = 8{,}2$ A; $\varphi = 62{,}5°$

Die Rechnung läuft etwas unterschiedlich, je nachdem, wo die trigonometrischen Teilungen angebracht sind.
Betrachten wir zunächst die Systeme, bei denen die Teilungen auf der Rückseite der Zunge liegen.

Verschieben wir die Zunge so, daß 62,5° der ∢-sin-Skale unter die Marke in der rückwärtigen Ausfräsung kommt, dann ist auf der Vorderseite über D 10 auf C die Ziffernfolge 8–8–7 abzulesen, d. h.,

$$\sin 62{,}5^\circ = 0{,}887 .$$

Über D 10 ist aber auch auf CI die Ziffernfolge 1–1–2–7 abzulesen. Wir wissen, daß dieser Wert

$$\frac{1}{\sin 62{,}5^\circ} = \frac{1}{0{,}887} = 1{,}127$$

bedeutet und auch unter C 1 auf D abgelesen werden kann.

Die Berechnung der Blindleistung kann nun folgendermaßen vor sich gehen:

$$P_B = 220\text{ V} \cdot 8{,}2\text{ A} \cdot \sin 62{,}5^\circ =$$
$$= 220\text{ V} \cdot 8{,}2\text{ A} \cdot 0{,}887 = \frac{220 \cdot 8{,}2}{1{,}127}\text{ W}.$$

Die letzte Umstellung wollen wir ausnutzen!
Ohne die Zunge zu verschieben, lösen wir die Teildivision

$$\frac{8{,}2}{1{,}127} = 7{,}275 .$$

Das Ergebnis steht über 8–2–0 von D auf C (Bild 100).
In Wirklichkeit liegt dieser Division die Überlegung zugrunde, welche Zahl man mit 1,127 malnehmen muß, damit 8,2 herauskommt.
Nachdem in 7,275 das Produkt $8{,}2 \cdot \sin 62{,}5^\circ$ berechnet ist, ist nur noch die Multiplikation mit 220 nötig. Stellen wir dazu 220 auf D ein und schieben 7–2–7–5 von CI darüber, dann ist unter C 1 das Ergebnis 1–6–0–0 abzulesen. Die Blindleistung beträgt somit

$$P_B = \underline{\underline{1600}}\text{ Watt.}$$

Bei der Berechnung der Wirkleistung P_W wäre entsprechend vorzugehen. Wir ermitteln $\cos 62{,}5^\circ = \sin (90^\circ - 62{,}5^\circ) = \sin 27{,}5^\circ = 0{,}462$ und rechnen entsprechend weiter

$$\frac{1}{\cos 62{,}5^\circ} = \frac{1}{0{,}462} = 2{,}165$$

$$8{,}2 \cdot \cos 62{,}5^\circ = \frac{8{,}2}{2{,}165} = 3{,}79$$

$$P_W = 220\text{ V} \cdot 8{,}2\text{ A} \cdot \cos 62{,}5^\circ = \underline{\underline{833\text{ W}}}.$$

Viel einfacher und damit auch übersichtlicher wird die Rechnung, wenn die S-Teilung auf dem Stabkörper angebracht ist.
Ein Herumdrehen der Zunge wie beim Sinussatz ist hier kein Ausweg, da dann eine Teilung zum Multiplizieren fehlt.

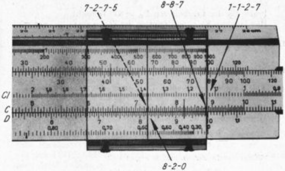


Bild 100

Betrachten wir also die obige Rechnung beim Rechenstab-Modell „Darmstadt", wo die S- und T-Teilungen am Stabkörper untergebracht sind!

Da $P_B = 220\text{ V} \cdot 8{,}2\text{ A} \sin 62{,}5^\circ$
$P_W = 220\text{ V} \cdot 8{,}2\text{ A} \cos 62{,}5^\circ$

zu berechnen ist, liegt ein Produkt aus 3 Faktoren vor, von denen wir mindestens eine Multiplikation in eine Division umwandeln.
Gehen wir von 62,5° auf S nach D, dann haben wir berechnet $\sin 62{,}5^\circ = 0{,}887$.
Dann verschieben wir die Zunge so, daß 8–2–0 von CI auch unter dem Läuferstrich steht. Nun steht unter C 1 das Ergebnis von $8{,}2 \cdot \sin 62{,}5^\circ$. Diesmal läßt sich ein nochmaliges Verschieben der Zunge nicht vermeiden. Bringt man C 10 an die Stelle, wo

C 1 stand, dann liest man unter 2–2–0 von C auf D das bereits bekannte Ergebnis 1–6–0–0 ab.

Für die letzte Multiplikation mußte die Zunge in ihrer ganzen Länge umgesetzt werden. Das ist zeitraubend und verlangt mehrere Handgriffe. Wandelt man aber die letzte Multiplikation mit 2–2–0 in eine Division um, dann spart man Zungenweg und eine Läufereinstellung ein. Dazu schiebt man 2–2–0 von CI über das unter C 1 durch den Läuferstrich festgehaltene Zwischenergebnis. Wieder unter C 1 steht auf D das Endergebnis.

Prüfen Sie das Ergebnis von $P_W = 833$ W nach!

Hier kommen Sie ohne Umsetzen der Zunge aus!

II. $$c = \frac{a \cdot \cos\alpha}{b}$$

BEISPIEL

177. Eine Lampe strahlt einen Lichtstrom von $\Phi = 500$ cd sr ab. Es soll die Beleuchtung auf einer $r = 4{,}5$ m entfernten ebenen Fläche berechnet werden, auf die der Lichtstrom unter einem Winkel von $\alpha = 32°$ einfällt. Es gilt die Gleichung

$$E = \frac{\Phi \cos\alpha}{r^2}.$$

Setzen wir die Zahlen ein, so ergibt sich

$$E = \frac{500 \cdot \cos 32°}{4{,}5^2}\ \text{lx} = \frac{500 \sin 58°}{4{,}5^2}\ \text{lx}.$$

Die Division durch die Quadratzahl wird zweckmäßigerweise durch eine zweimalige Division durch 4,5 ersetzt.

Es ergibt sich in Stichworten folgender Rechenweg:

Von 58° auf S nach 8–4–8 auf D, darüber 4–5–0 von C, Läufer über 5–0–0 von C, Zunge so weit nach rechts, daß 4–5–0 von C unter dem Läuferstrich steht. Unter C 1 lesen wir auf D die Ziffernfolge 2–0–9–5 ab. Damit lautet das Ergebnis

$$E = \frac{500\ \text{cd sr}\ \cos 32°}{(4{,}5\ \text{m})^2} = 20{,}95\ \text{lx}.$$

Machen Sie sich selbst klar, welche Rechenoperationen bei unserem nur durch Stichworte angedeuteten Rechenweg eingeschlagen sind!

III. $$c = \frac{a \cdot \sin^2\alpha}{b}$$

BEISPIEL

178. Ein Ball werde mit einer Anfangsgeschwindigkeit von $v_0 = 30$ m/s unter einem Winkel $\alpha = 40°$ gegenüber der Horizontalen geworfen. Wie hoch fliegt der Ball?

Die Formel für die Steighöhe lautet

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

Wir setzen $g \approx 9{,}8$ m/s².

Der Winkel $\alpha = 40°$ wird wie sonst auf der Rückseite der Zunge (sin-Teilung) eingestellt. Die Werte für $\sin\alpha$ lesen wir über D 10 auf C ab. Unter A 100 können wir aber sofort $\sin^2\alpha$ auf B ablesen.

Wir finden

$$\sin 40° = 0{,}6425$$
$$\sin^2 40° = 0{,}413.$$

Diesen unter A 100 stehenden Wert kann man nicht weiterverwenden, er ist auf D oder A neu einzustellen. Dann hätte man auch v_0 mit $\sin\alpha$ malnehmen und dann quadrieren können.

Verwendet man Rechenstäbe, die die Skalen $\sphericalangle$ sin und $\sphericalangle$ tan auf dem Rechenstabkörper tragen, erfolgt der Übergang von $\sphericalangle$ sin mit dem Läufer nach der D-Teilung zur Bestimmung von $\sin\alpha$ und nach der A-Teilung zur Bestimmung von $\sin^2\alpha$.

Rechnet man mit den einzelnen ermittelten Werten, dann ist

$$h = \frac{30^2 \cdot 0{,}413}{2 \cdot 9{,}8}\ \text{m} = \frac{900 \cdot 0{,}413}{19{,}6}\ \text{m} = 18{,}96\ \text{m} \approx 19{,}0\ \text{m}.$$

Die Multiplikation führen wir in gewohnter Weise mit den Teilungen C und D oder wegen des Quadrates mit den Teilungen A und B aus.

Damit ist aber der Vorteil des Stabrechnens nicht voll wahrgenommen. Man sollte sich stets überlegen, wie man ohne Zwischenrechnungen in einem Rechengang das Endergebnis ermitteln kann. Deshalb ist folgender Rechengang zweckmäßiger:

Auf S wird $\alpha = 40°$ eingestellt und mit dem Läufer zu D übergegangen. sin 40° ist bestimmt. Unter den Läuferstrich wird 3–0–0–0 von CI geschoben. Das ist die Produktbildung $30 \cdot \sin 40°$. Das Ergebnis steht unter C 1 auf D. $(30 \cdot \sin 40°)^2$

steht dann über B 1 auf A, da durch Übergang von D nach A quadriert wird. Wird jetzt noch 1–9–6–0 von B unter diesen Wert auf A geschoben, dann steht über B 100 auf A das Ergebnis

$h \approx 19{,}0$ m.

5.6.1.5. Nochmals Werte der Sinusfunktion

Bei einigen Rechenstäben wird die Sinusteilung mit den Teilungen A oder B auf der Vorderseite des Stabkörpers zusammen verwendet. Es sind mithin die Sinus zwischen 0,01 und 1 bestimmbar, d.h., die Zahlenwerte auf A oder B sind immer durch 100 zu teilen. Die Winkel auf der Rückseite der Zunge umfassen die Werte zwischen 34′ und 90°. Dabei ist allerdings die Einstellgenauigkeit kleiner. Zwischen 35′ und 10° beträgt der Strichabstand 5′, zwischen 10° und 20° jeweils 10′ und zwischen 20° und 40° jeweils 30′. Zwischen 40° und 70° sind nur noch die Grade markiert. Dann beträgt jeder Strichabstand 2°. Zwischen 80° und 90° ist keine Unterteilung mehr vorhanden. Haben wir die Zunge gewendet, dann stehen die Sinus auf der Teilung A direkt über den Winkelwerten auf der Zunge, wenn wir A 1 mit 34′ und A 100 mit 90° zur Deckung brachten. Benutzen wir dagegen die Ausfräsung auf der Rückseite, dann sind die Winkelwerte auf die Strichmarke der Ausfräsung zu stellen. Die Sinus lesen wir dann unter A 100 auf der B-Skale ab.

5.6.2. Verwendung der Tangensteilung

Die ∢-tan-Skale befindet sich beim System „Rietz“ an der unteren Kante der Zungenrückseite, bei anderen Systemen auf dem Rechenstabkörper und beim System „Darmstadt“ (Holz) unter der ∢sin-Teilung auf der Unterkante des Körpers. Die ∢-tan-Teilung reicht von 5,72° (5° 43′) bis 45°. Winkel unter 5,72° (5° 43′) sind hier nicht einstellbar. Betrachten wir zunächst wieder die Einteilung!
Von 5° 43′ bis 20° haben wir bei älteren Modellen für jedes Grad eine Unterteilung in 12 Teile zu je 5′, wobei meist die 10., 30. und 50. Minute durch einen größeren Strich und die 20. und 40. Minute durch einen noch größeren hervorgehoben sind. Zwischen 20° und 45° sind die Grade nicht mehr einzeln gekennzeichnet und nur noch in 6 Teile zu je 10′ eingeteilt, wobei die 30. Minute jeweils durch einen größeren Strich gekennzeichnet ist.
Bei modernen Rechenstäben ist die Unterteilung wieder dezimal. Zwischen 5,5° und 30° beträgt der Strichabstand $^1/_{10}$°, zwischen 30° und 45° nur noch $^1/_5$°.

Bei den Reiss-Stäben liegt die Einteilungsgrenze zwischen 0,1° und 0,2° bei 15°.
Die ∢-tan-Teilungen arbeiten mit den Teilungen C und D zusammen.

5.6.2.1. Werte der Tangensfunktion für Winkel zwischen 5,72° (5° 43′) und 45°

Beim System „Rietz“ haben wir wieder zwei Einstellmöglichkeiten. Bleibt die Zunge in der Normallage, dann müssen wir die Ausfräsung auf der linken Rückseite des Stabkörpers zur Einstellung der Winkel verwenden. Über D 1 lesen wir auf C die zugehörenden Tangenswerte ab. Da diese für den oben angegebenen Winkelbereich zwischen 0,1 und 1,0 liegen, haben wir mit Ausnahme von tan 45° = 1,0 immer zu schreiben

$\tan\alpha = 0, \ldots$

Bild 101 zeigt die Einstellung von 8°. Auf Bild 102 steht über D 1 auf C

$\tan 8° = \underline{\underline{0{,}1405}}.$

BEISPIELE

179. tan 12° 15′ = $\underline{\underline{0{,}2170}}$	180. tan 14,45° = $\underline{\underline{0{,}2575}}$
181. tan 19° 55′ = $\underline{\underline{0{,}3625}}$	182. tan 23,05° = $\underline{\underline{0{,}425}}$
183. tan 29° 25′ = $\underline{\underline{0{,}563}}$	184. tan 41,7° = $\underline{\underline{0{,}890}}$

Drehen wir die Zunge um und stellen 45° über D 10, dann entspricht die Handhabung des Systems „Rietz“ genau der, die bei Rechen-

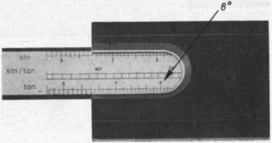


Bild 101

stäben, bei denen der Stabkörper die ∢-tan-Teilung trägt, üblich ist. Unter den Winkelwerten stehen die Tangenswerte zu diesen Winkeln. Bild 96 (Seite 135) zeigt außer

$$\sin 10^\circ\, 20' = 0{,}1794$$

auch $\tan 10^\circ\, 10' = 0{,}1794.$

Die Bilder 97 und 98 zeigen beim System „Darmstadt" (Holz) auf der ∢-tan-Teilung die Einstellung des Winkels 32° 45′ und damit

$$\tan 32^\circ\, 45' = 0{,}643.$$

BEISPIEL

185. Das obere Ende eines Turmes wird unter einem Winkel von $\alpha = 18^\circ\, 35'$ gegenüber der Waagerechten anvisiert. Die Entfernung bis zum Fuß des Turmes ist unbekannt. Die Turmhöhe beträgt $h = 50$ m.

Aus der Skizze (Bild 103) entnehmen wir $\tan \alpha = \frac{h}{x}$. Dann ist

$$x = \frac{h}{\tan \alpha} = \frac{50 \text{ m}}{\tan 18^\circ\, 35'}.$$

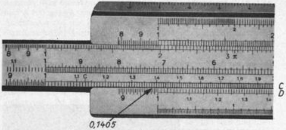


Bild 102

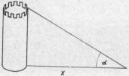


Bild 103

Wir stellen auf der Tangensteilung 18° 35′ unter den Einstellstrich (Bild 104) und lesen auf der Vorderseite über 1 auf C die Ziffernfolge 3–3–6–0 ab (Bild 105):

$$\tan 18^\circ\, 35' = 0{,}3360.$$

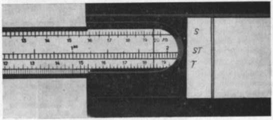


Bild 104

Unter der Zahl 5 auf C lesen wir auf D das Ergebnis der nachfolgenden Multiplikation mit 50 ab (Bild 105): 1–4–8–8. Die Entfernung beträgt $x = 148{,}8$ m.

Die Richtigkeit unserer Rechnung ergibt sich auch aus folgender Überlegung:
Unter C 10 steht auf D das Ergebnis 1 : tan 18° 35′ = 2,98. Dieser Wert wird mit 50 multipliziert.

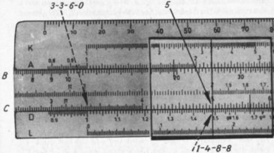


Bild 105

Würde man bei dem Beispiel die Entfernung x kennen und aus dem Erhebungswinkel α die Höhe des Turmes berechnen wollen, dann wäre

$$h = x \tan \alpha .$$

Für $x = 150$ m und $\alpha = 18° 35' = 18{,}58°$ ergibt sich

$$h = 50{,}4 \text{ m}.$$

Man braucht bei einem Rechenstab, der die T-Teilung auf dem Stabkörper trägt, nur den Läuferstrich über 18° 35′ oder 18,58° von T zu stellen und die Zunge so zu verschieben, daß auch C 1 unter dem Läuferstrich steht. Dann liest man unter 150 von C das Ergebnis ab.

Einfach ist es auch, mit dem soeben verwendeten Rechenstab aus den Katheten eines rechtwinkligen Dreieckes einen der anliegenden Winkel zu berechnen. Wegen

$$\frac{a}{b} = \tan \alpha$$

braucht man nur mit C und D die Division auszuführen und dann von D nach T zu gehen, um den Winkel α abzulesen.

Für $\alpha = 13{,}85$ und $b = 23{,}3$ ergibt sich

$$\tan \alpha = 0{,}594 \quad \text{und} \quad \alpha = 30{,}7° = 30° 42'.$$

Beim System „Rietz" ergeben sich Schwierigkeiten.

Man muß die Division

$$\frac{13{,}85}{23{,}3} = 0{,}594$$

ausführen, dann die Ziffernfolge 5–9–4 über C 1 einstellen und in der rückwärtigen Ausfräsung des Stabkörpers den Winkel ablesen.

In 5.3.3. war gezeigt worden, wie man mit dem Lehrsatz des Pythagoras aus den Katheten eines rechtwinkligen Dreieckes die Hypotenuse berechnet. Unter Verwendung der trigonometrischen Teilungen, sofern diese auf dem Stabkörper angebracht sind, soll hier ein anderer Weg der Rechnung gezeigt werden. Dabei haben wir noch die Möglichkeit, die fehlenden Winkel des Dreieckes zu bestimmen.

Aus $a = 3{,}25$ cm und $b = 4{,}64$ cm eines rechtwinkligen Dreieckes sollen die Hypotenuse c und die Basiswinkel berechnet werden. Ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit kann angenommen werden, daß $a < b$. Ist das nicht der Fall, dann wird der Winkel β und nicht α zuerst berechnet.

Mit den Teilungen D und CI wird $\tan \alpha = a/b$ bestimmt. C1 steht über 3–2–5 von D, der Läuferstrich über 4–6–4 von CI.

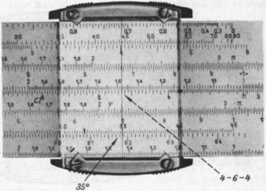


Bild 106

Auf der Teilung T lesen wir ab, daß $\alpha = 35°$ (Bild 106). Dann ist $\beta = 55°$. Aus $a/c = \sin \alpha$ ergibt sich $c = a/\sin \alpha$ und mit CI die Berechnung bei gleicher Zungenstellung. Man stellt den Läuferstrich über 35° der S-Teilung und liest auf CI 5–6–7 ab. Die Hypotenuse ist $c = 5{,}67$ cm lang (Bild 107).

Woraus ergibt sich die Stabeinstellung? C 1 steht über $a = 3{,}25$ cm von D, der Läuferstrich über 35° von S oder $\sin 35° = 0{,}573$ von D (Bild 107). Auf C haben wir also die Zahl (1–7–6–5), die mit a malgenommen $\sin \alpha$ ergibt.

Das ist wegen $\sin \alpha = a/b$ die Zahl $1/c$. Folglich muß auf CI die Zahl c die Hypotenuse, stehen.

5.6.2.2. Werte der Tangensfunktion für Winkel zwischen 45° und 84,28° (84° 17′)

Die Winkel zwischen 45° und 84° 17′ sind bei den meisten Rechenstäben rot oder in Klammern neben den Winkeln bis zu 45° angegeben. Sie beginnen rechts bei 45° und nehmen nach links zu.

Beim Ablesen der Tangenswerte beachten wir, daß sie für Winkel über 45° größer als 1,0 sind.

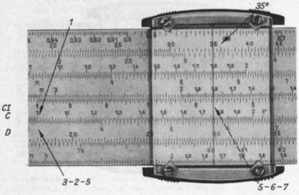


Bild 107

Befindet sich beim Rechenstab nach dem System „Rietz“ die Zunge in Normallage, dann werden wieder die Winkel in der linken rückwärtigen Ausfräsung des Rechenstabkörpers eingestellt. Die Ablesung der Tangenswerte erfolgt jetzt aber auf der D-Teilung unter C 10.

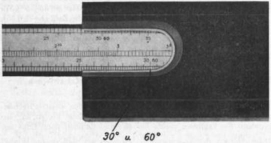


Bild 108

Bild 108 zeigt die Einstellung der Winkel 30° und 60°, während Bild 109

über D 1 tan 30° = 0,577

und unter C 10 tan 60° = 1,732

abzulesen gestattet.

Mit gewendeter Zunge ist jetzt schlechter zu arbeiten. Wir können unter den Winkelwerten für 45° bis 84° 17′ auf der D-Teilung nur die Kehrwerte der entsprechenden Tangenswerte ablesen, es sei denn auf dem Stabkörper befindet sich noch eine DI- Teilung.

Bei Rechenstäben, bei denen der Stabkörper die ∢ tan-Teilung trägt, sind die Tangenswerte für Winkel über 45° auf der Reziprokteilung von C, also auf CI, abzulesen, nachdem CI 1 mit D 10 zur Deckung gebracht worden ist.

Bei neuen Rechenstäben findet man zwei T-Teilungen auf dem Stabkörper. Die eine Teilung (T_1) enthält die Winkel zwischen 5,7° und 45°, die andere (T_2) die von 45° und 84,3°. Beide T-Teilungen arbeiten mit der D-Teilung zusammen. Verwendet man T_1, dann ist der Wertevorrat $0{,}1 \leq \tan\alpha \leq 1{,}0$, während der Wertevorrat bei T_2 $1{,}0 \leq \tan\alpha \leq 10{,}0$ ist.

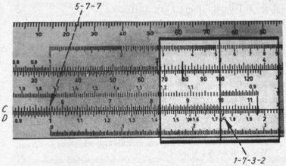


Bild 109

BEISPIELE

186. tan 46° 20′ = $\underline{\underline{1{,}047}}$

187. tan 52,3° = $\underline{\underline{1{,}295}}$

188. tan 67° 15′ = $\underline{\underline{2{,}385}}$

189. tan 64,05° = $\underline{\underline{2{,}055}}$

190. tan 81° 05′ = $\underline{\underline{6{,}37}}$

191. tan 82,45° = $\underline{\underline{7{,}55}}$

5.6.2.3. Werte der Cotangensfunktion

Bei der Berechnung der Cotangenswerte können wir die gleichen Teilungen wie beim Tangens verwenden, für die Winkel die untere Teilung der Zungenrückseite (System „Rietz") bzw. die Teilung auf dem Rechenstabkörper und für die Cotangenswerte die C-, D- oder CI-Teilungen. Allerdings müssen wir berücksichtigen, daß die Beziehung

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$$

besteht.

Daraus ergibt sich, daß wir die Cotangens für Winkel zwischen 5° 43′ und 45°, also Werte über 1,0 beim System „Rietz" (Zunge in Normalstellung) unter C 10 auf der D-Teilung, bei den anderen Systemen auf der CI-Teilung ablesen. Bei Winkeln zwischen 45° und 84° 17′, also Werten zwischen 0,1 und 1,0, lesen wir beim System „Rietz" (Zunge in Normalstellung) über D 1 auf der C-Teilung bei den anderen Systemen auf der D-Teilung ab.

BEISPIELE

auf der D-Teilung („Rietz") bzw. CI-Teilung

192. $\cot\ 8° 25' = \underline{\underline{6,76}}$ 193. $\cot\ 6,55° = \underline{\underline{8,72}}$

194. $\cot 14° 55' = \underline{\underline{3,750}}$ 195. $\cot 11,85° = \underline{\underline{4,77}}$

196. $\cot 32° 25' = \underline{\underline{1,575}}$ 197. $\cot 33,3° = \underline{\underline{1,525}}$

auf der C-Teilung („Rietz") bzw. D-Teilung

198. $\cot 53° 5' = \underline{\underline{0,750}}$ 199. $\cot 50,9° = \underline{\underline{0,812}}$

200. $\cot 71° 45' = \underline{\underline{0,3295}}$ 201. $\cot 62,05° = \underline{\underline{0,530}}$

202. $\cot 78° 25' = \underline{\underline{0,2115}}$ 203. $\cot 76,15° = \underline{\underline{0,2465}}$

204. In einem rechtwinkligen Dreieck ist die zum Winkel α gehörende Ankathete $b = 14,25$ cm und die Gegenkathete $a = 5$ cm. Wie groß ist der Winkel α?

Aus der Skizze (Bild 110) entnehmen wir die Beziehung

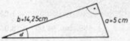


Bild 110

$$\cot \alpha = \frac{b}{a} = \frac{14,25\ \text{cm}}{5\ \text{cm}} = 2,85.$$

Dazu gehört der Winkel $\alpha = 19° 20'$.

Wir verwenden zunächst einen Rechenstab des Systems „Rietz" mit der Zunge in Normallage:

Wir stellen $b = 14,25$ auf der D-Teilung mittels des Läufers ein und schieben die Zunge so weit nach links, daß $a = 5$ der C-Teilung ebenfalls unter dem Läuferstrich steht. Dann könnten wir unter C 10 auf D den $\cot \alpha$ ablesen. Wir benötigten ihn zur Winkelbestimmung nicht, denn wir können am linken unteren Strich der rückseitigen Ausfräsung sofort ablesen:

$$\alpha = 19° 20'.$$

Etwas umständlicher wäre es gewesen, wenn wir die Tangensfunktion benutzt hätten. Aber auch hier muß sich ergeben

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{5\ \text{cm}}{14,25\ \text{cm}} = 0,351$$

mit $\alpha = 19° 20'$. $a = 5$ auf D eingestellt, $b = 14,25$ von C darübergeschoben, ergibt unter C 1 auf D 3–5–1–0, d. h., $\tan \alpha = 0,351$. Nun muß aber die Zunge umgesetzt werden, so daß 3–5–1–0 von der C-Teilung jetzt über D 1 steht, damit bei der rückwärtigen Ausfräsung der Winkel $\alpha = 19° 20'$ abgelesen werden kann.

Verwenden wir dagegen einen Rechenstab, der die ∢-tan-Teilung auf dem Stabkörper trägt, z. B. einen Rechenstab vom System „Darmstadt", dann ist das Rechnen mit der Tangensfunktion zweckmäßiger. Wir schieben 1–4–2–5 von C über 5–0–0 von D und würden unter C 1 den Wert von $\tan \alpha$ ablesen. Wir benötigen diesen Zwischenwert nicht sondern schieben den Läuferstrich über C 1 und lesen unter diesem auf der ∢-tan-Teilung $\alpha = 19° 20'$ ab.

5.6.3. Verwendung der Sinus-Tangens-Teilung für Winkel zwischen 0,57° (34′) und 5,72° (5° 43′)

Die meisten Rechenstabsysteme, vor allem die, deren ∢-sin-Teilung nicht mit den Teilungen A und B zusammenarbeitet, haben eine dritte Teilung zur Bestimmung der Winkelfunktionen. Sie gilt gleichermaßen für Sinus und Tangens, wird deshalb als ST-Teilung oder ∢ sin-, ∢-tan-Teilung bezeichnet. Sie umfaßt den Winkelbereich zwischen 0,57° (34′) und 5,72° (5° 43′). Beim System „Rietz" befindet sie sich wieder auf der Rückseite der Zunge, sonst auf dem Stabkörper, beim System „Darmstadt" (Holz) fehlt sie.

Eigentlich ist diese Teilung für die Bogen der Winkel geschaffen worden. Deshalb wird sie jetzt immer häufiger mit ∢ arc bezeichnet. Zwar ist $\sin\alpha < \text{arc}\,\alpha < \tan\alpha$ doch kann man für $\alpha < 6°$ im Rahmen der Rechenstabgenauigkeit

$$\sin\alpha = \text{arc}\,\alpha = \tan\alpha \text{ setzen.}$$

Die Einteilung kann hier viel feiner sein, da sich der kleine Winkelbereich von etwa 5° auf die ganze Stablänge von 25 cm verteilt. So sind zwischen 34′ und 3° zwischen zwei Strichen Abstände von 1′, zwischen 3° und 5° Abstände von 2′ und zwischen 5° und 5° 43′ Abstände von 5′ vorhanden. Bei modernen Rechenstäben ist auch hier die Unterteilung dezimal. Die Strichabstände betragen dann zwischen 0,55° und 2° jeweils $^1/_{100}{}^\circ$, zwischen 2° und 4° dann $^2/_{100}{}^\circ$ und dann $^5/_{100}{}^\circ$.
Bei den Reiss-Stäben liegen die Wechsel der Unterteilungen bei 1,5° und 3°.
Die ∢ sin-, ∢-tan-Skalen arbeiten mit der C-Teilung bzw. der D Teilung zusammen.
Beim System „Rietz“ mit der Zunge in Normallage stellen wir die Winkel auf dem rechten unteren Einstellstrich der rechten rückwärtigen Ausfräsung ein. Über D 10 lesen wir auf der C-Teilung die Ziffernfolgen ab, die uns Sinus- und Tangenswerte zugleich angeben. Natürlich kann man auch die Zunge umwenden und 45° der T-Teilung über D 10 stellen. Dann stimmt die Skalenanordnung mit der bei den Rechenstäben überein, die die ST-Teilung auf dem Stabkörper tragen. Mit Hilfe des Läuferstriches ist dann von der ST-Teilung zur D-Teilung überzugehen. Wir müssen dabei aber berücksichtigen, daß die Sinus- oder Tangenswerte immer mit

0,0 . . . beginnen.

Es ergeben sich für den Bereich

$$0{,}57°\ (34') \leq \alpha \leq 5{,}72°\ (5°\,43')$$

die Wertevorräte

$$0{,}01 \leq \sin\alpha \leq 0{,}1$$
$$0{,}01 \leq \tan\alpha \leq 0{,}1$$
$$100 \geq \cot\alpha \geq 10.$$

Eine andere Methode, die Sinus- oder Tangenswerte von kleinen Winkeln zu bestimmen, werden Sie in 5.10.1.2. und 5.10.1.3. bei der Verwendung von festen Marken kennenlernen.
Da beim Rechenstab „Darmstadt“ (Holz) zugunsten anderer Teilungen auf die ST-Teilung verzichtet worden ist, muß man zur Bestimmung der Sinus- oder Tangenswerte kleiner Winkel (unter 6°) ausnutzen, daß bei Rechenstabgenauigkeit $\hat{\alpha} = \sin\alpha = \tan\alpha$. Die Umrechnung von Grad- ins Bogenmaß wurde in 5.5.2. auf Seite 130 beschrieben. Sie kann hier angewendet werden.

Die ST-Teilung eignet sich nicht nur zur Berechnung der Sinus- und Tangenswerte kleiner Winkel, sie erlaubt auch die Umrechnung kleiner Winkel aus dem Grad- ins Bogenmaß und umgekehrt.
Geht man von ST nach D, dann liest man dort den Bogen zu den auf ST eingestellten Winkeln ab. So ist z. B.

$$\text{arc}\,2{,}5° = 0{,}0436.$$

In der Richtung von D nach ST erfolgt die Umrechnung vom Bogen- ins Gradmaß. Bild 96 zeigt auf D 0,01794 und auf ST 1° 16′, also ist

$$0{,}01794 = \text{arc}\,1°\,16'.$$

Mit der ST-Teilung ist auch eine Umrechnung der in Neugrad gegebenen Winkel in das Bogenmaß möglich, wenn man C 9 über D 10 stellt und von ST nach der Teilung C übergeht. Diese Umrechnungen sind allgemein möglich für Winkel, die zwischen 0,5° und 6° liegen, gleichgültig, ob die ST-Teilung sexagesimal oder dezimal unterteilt ist. Die dezimale Unterteilung hat aber große Vorteile. Durch sie wird die ST-Teilung ganz allgemein für alle Winkel zur Umrechnung ins Bogenmaß geeignet. Da ein zehnmal so großer Winkel auch einen zehnmal so großen Bogen hat, gelten mit

$$\begin{array}{ll} & \text{arc}\,2{,}5° = 0{,}0436 \\ \text{auch} & \text{arc}\,25° = 0{,}436 \\ \text{und} & \text{arc}\,250° = 4{,}36. \end{array}$$

BEISPIEL

205. $\tan 1°\,20' \approx \sin 1°\,20' \approx \underline{\underline{0{,}0233}}$

ÜBUNGSAUFGABEN

Man bestimme:

84. $\sin 0{,}645° \approx \tan 0{,}645°$	85. $\sin 1{,}795° \approx \tan 1{,}795°$
86. $\sin 5{,}17° \approx \tan 5{,}17°$	87. $\sin 53 \approx \tan 53'$
88. $\sin 2°\,41' \approx \tan 2°\,41'$	89. $\sin 4°\,12' \approx \tan 4°\,12'$

Aber auch die Cotangenswerte für den Winkelbereich zwischen 0,57° (34′) und 5,72° (5° 43′) können wir sofort ablesen. Da sie die Kehrwerte der entsprechenden Tangenswerte sind, die beim System „Rietz“ mit der Zunge in Normallage über D 10 auf C abgelesen werden, erhalten wir die Cotangenswerte unter C 1 auf der D-Teilung. Bei den anderen Systemen, bei denen die Tangenswerte auf der D-Teilung abgelesen werden, lesen wir die Cotangenswerte auf der CI-Teilung ab, nachdem die C- und D-Teilung zur Deckung gebracht worden sind. Dabei ist zu beachten, daß die Cotangenswerte in diesem Winkelbereich immer größer als 10 sind.

BEISPIEL

206. $\tan 4^\circ \approx \sin 4^\circ = \underline{\underline{0{,}0698}}$, bei „Rietz" auf der C-Teilung, sonst auf der D-Teilung

$\cot 4^\circ \approx \dfrac{1}{\tan 4^\circ} = 14{,}32$, bei „Rietz" auf der D-Teilung, sonst auf der CI-Teilung

5.6.4. Die Teilung $\sqrt{1 - x^2}$ (pythagoreische Teilung P)

Auf den Rechenstäben vom System „Darmstadt" finden Sie eine weitere (meist rote) Teilung, die mit P, $\sqrt{1 - x^2}$ oder cos bezeichnet ist. Sie kann auf der Vorderseite unter der D-Teilung oder auf der Rückseite des Stabkörpers über der ST-Teilung liegen und reicht von 0,995 bis 0. Bild 121 (Seite 184) zeigt z. B. den Anfang, Bild 128 (Seite 191) das Ende dieser Teilung. Sie gestattet in Verbindung mit der D-Teilung Berechnungen nach

$$y = \sqrt{1 - x^2}.$$

Bild 129 auf Seite 191 zeigt unter dem Läuferstrich die Einstellung 2–5–1 auf D. Gehen wir zur P-Teilung über, so finden wir 9–6–8,

$$\text{also } y = \sqrt{1 - 0{,}251^2} = 0{,}968.$$

Verstehen wir unter den auf D einstellbaren Werten zwischen 0,1 und 1 irgendwelche Sinus- oder Cosinuswerte, dann erlaubt uns der Übergang von D nach P den Übergang zur Kofunktion, also vom Sinus zum Cosinus oder umgekehrt.

Aus Bild 111 entnehmen wir

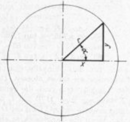


Bild 111

$$\frac{y}{r} = \sin \alpha \qquad \frac{x}{r} = \cos \alpha$$

$$y = r \cdot \sin \alpha \qquad x = r \cdot \cos \alpha$$

Nach dem Lehrsatz des PYTHAGORAS ist

$$y^2 + x^2 = r^2.$$

Setzen wir die Werte ein, so ist

$$r^2 \cdot \sin^2 \alpha + r^2 \cdot \cos^2 \alpha = r^2$$

und nach Division mit r^2

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Diese Gleichung können wir nach Sinus oder Cosinus auflösen und erhalten

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}.$$

Wir sind also berechtigt, aus den Werten für $\cos x$ die für $\sin x$ zu berechnen und umgekehrt. Das geschieht durch einen Übergang von den zwischen 0,1 und 1 liegenden Werten auf der Grundteilung D nach der Teilung P.

Das obige Beispiel kann mithin auch geschrieben werden:

$$\sin x = 0{,}251 \qquad \cos x = \sqrt{1 - 0{,}251^2} = 0{,}968.$$

Bild 98 auf Seite 139 zeigt auf der D-Teilung die Ziffernfolge 6–4–3 und auf der P-Teilung 7–6–6. Wenn

$$\cos \alpha = 0{,}643 \text{ ist, dann ist } \sin \alpha = 0{,}766.$$

Der Vorteil der P-Teilung wird noch augenfälliger, wenn die Winkel (für den Sinus) nahe bei 90° bzw. (für den Cosinus) nahe bei 5° liegen. So ist sin 82,5° auf der Teilung S kaum einstellbar. Mit Hilfe der P-Teilung ergibt sich $\cos 7{,}5^\circ = \sin 82{,}5^\circ = 0{,}99145$.

BEISPIEL

207. $\sin 70^\circ$ ist mit der P-Teilung genauer zu bestimmen. $\sin 70^\circ = 0{,}94$ ist auf der S- und D-Teilung wegen des gedrängten Maßstabes nur grob abzulesen, deshalb berechnen wir mit der P-Teilung $\cos 20^\circ = \sin 70^\circ = 0{,}9397$ mit größerer Genauigkeit.

5.6.5. Werte der Sinus- und Tangensfunktion für Winkel unter 0,57° (34′)

Im Abschnitt 5.6.3. beschrieben wir, wie mit der ST-Teilung die Sinus-, Tangens- und Cotangenswerte für Winkel zwischen 0,57° (34′) und 5,72° (5° 43′) bestimmt werden können. Unterhalb 34′ ist die ST-Teilung nicht mehr verwendbar. Nun sind aber im Bereich zwischen 0° und 34′ die Sinus- und Tangenswerte und die Winkelwerte

im Bogenmaß im Rahmen der mit dem Rechenstab erzielbaren Genauigkeit gleich. Wie man diese Werte bestimmt, lesen Sie im Abschnitt 5.10.1.
Günstiger liegen die Verhältnisse, wenn die ST-Teilung dezimal unterteilt ist. Hier kann man ausnutzen, daß der Sinus oder Tangens eines zehnmal so großen Winkels auch zehnmal so groß ist, wenn man im Winkelbereich zwischen 0° und etwa 6° bleibt. So sind

$$\sin 3{,}65° \approx \tan 3{,}65° \approx 0{,}0636$$
$$\sin 0{,}365° \approx \tan 0{,}365° \approx 0{,}00636$$
$$\sin 0{,}0365° \approx \tan 0{,}0365° \approx 0{,}000636.$$

Analog ergeben sich für die auf CI abgelesenen Cotangenswerte

$$\cot 3{,}65° = 15{,}71$$
$$\cot 0{,}365° = 157{,}1$$
$$\cot 0{,}0365° = 1571.$$

5.6.6. Werte der Sinusfunktion für Winkel über 84,28° (84° 17′)

Bis jetzt sind wir in der Lage, die Werte der Sinusfunktion für Winkel von 0,57° (34′) bis 5,72° (5° 43′) mit Hilfe der ST-Teilung, von 5,72° (5° 43′) bis 45° mit Hilfe der S-Teilung, von etwa 45° bis 84,28° (84° 17′) mit der P-Teilung zu bestimmen. Für Winkel über 84,28° (84° 17′) versagt auch die P-Teilung. Hier kann uns aber der Lehrsatz des PYTHAGORAS weiterhelfen.
Es gilt

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$
$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

und wegen $\cos \alpha = \sin (90° - \alpha)$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 (90° - \alpha)}$$

In Formelsammlungen findet man die Näherungsformel $\sqrt{1 - x} \approx \approx 1 - \frac{x}{2}$, die hier nicht hergeleitet werden soll. Damit wird

$$\sin \alpha \approx 1 - \frac{1}{2} \sin^2 (90° - \alpha).$$

Sind die Winkel α groß, dann sind die Winkel $(90° - \alpha)$ klein. Ihre Sinuswerte können wir bestimmen. Das geschieht auf einem der oben angegebenen Wege.
Zur Erleichterung der Umrechnung sei noch angegeben, daß (auf 4 Stellen gerundet)

α	85°	86°	87°	88°	89°	90°
$90° - \alpha$	5°	4°	3°	2°	1°	0°
$\sin \alpha =$ $\cos (90° - \alpha)$	0,9962	0,9976	0,9986	0,9994	0,9998	1,0

BEISPIELE

208. Wie groß ist sin 85°?
Wenn $\alpha = 85°$, dann ist $90° - \alpha = 5°$. Den zugehörenden Sinuswert erhalten wir durch den Übergang von der Teilung ST nach D. Dieser Wert wird nicht benötigt, also hier nur zur Kontrolle angegeben. Wir lesen nämlich auf der Teilung A sofort $\sin^2 (90° - \alpha)$ ab und können, wenn wir die Division mit der 2 nicht im Kopf ausführen wollen, mit der B-Teilung weiterarbeiten. Wir finden

$$\sin\ (90° - 85°) = \sin\ 5° = 0{,}0872 \text{ (mit Hilfe von D)}$$
$$\sin^2 (90° - 85°) = \sin^2 5° = 0{,}0076 \text{ (mit Hilfe von A).}$$

Damit ist

$$\sin 85° = 1 - \frac{0{,}0076}{2} = \underline{\underline{0{,}9962}}.$$

Die fünfstellige Logarithmentafel gibt an: sin 85° = 0,99619.

209. $\sin 78{,}6° = \underline{\underline{0{,}9805}}$ 210. $\sin 88°\,50' = \underline{\underline{0{,}9998}}$

211. $\sin 84{,}1° = \underline{\underline{0{,}9947}}$

Soll umgekehrt zu einem vorgegebenen Sinuswert der zugehörende Winkel berechnet werden, dann müssen wir die soeben verwendete Gleichung umstellen. Es ergibt sich:

$$\sin (90° - \alpha) = \sqrt{2\,(1 - \sin \alpha)}\,.$$

Wenn wir $(90° - \alpha)$ bestimmt haben, kennen wir auch α als Komplementwinkel.

BEISPIEL

212. Wie groß ist α für $\sin \alpha = 0{,}9976$?
Wir rechnen zunächst im Kopf die Klammer aus und multiplizieren den Wert mit 2.

$$2\,(1 - 0{,}9976) = 2 \cdot 0{,}0024 = 0{,}0048$$

Mit diesem Wert gehen wir in die Teilung A ein. (Seite beachten!) Auf der ST-Teilung lesen wir für den Winkel $90° - \alpha = 3°\,58'$ ab. Damit ist $\alpha = 86°\,2'$.

ÜBUNGSAUFGABEN

Man bestimme die Winkel von folgenden Sinuswerten

90. 0,9951 91. 0,999 92. 0,9999

5.6.7. Komplexe Zahlen

Komplexe Zahlen, die bereits beim Lösen mancher quadratischer Gleichungen auftreten, spielen in der Elektrotechnik bei Wechselströmen eine wesentliche Rolle. Sie können in drei verschiedenen Formen geschrieben werden, denn es gilt nach EULER

$$z = a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}.$$

Dabei sind

a der Realteil
b der Imaginärteil
i die imaginäre Einheit mit $i^2 = -1$
$r = |z|$ der Betrag und
φ das Argument der komplexen Zahl, das in der trigonometrischen Form als Winkel im Gradmaß, bei der EULERschen Form im Bogenmaß zu nehmen ist.

In der Elektrotechnik wird für das Symbol i das Symbol j verwandt, um Verwechslungen mit der Stromstärke i auszuschließen.
Graphisch dargestellt werden die komplexen Zahlen durch Punkte in der GAUSSschen Zahlenebene mit der horizontalen Achse für die Realteile und der vertikalen Achse für die Imaginärteile.
Man kann komplexe Zahlen auch durch Pfeile vom Koordinatenursprung zu den betreffenden Punkten in der Zahlenebene veranschaulichen. Wählt man die EULERsche Darstellung, dann ist der Betrag des Pfeiles, $|z| = r$, die Hypotenuse, Realteil a und Imaginärteil b sind die Katheten eines rechtwinkligen Dreieckes.
Im Bild 112 liegen die Punkte, die zugeordnet sind:

$z_1 = 2 + i = \sqrt{5}\,(\cos 26{,}6° + i\sin 26{,}6°)$ im I. Quadranten,
$z_2 = -1 + 2i = \sqrt{5}\,(\cos 116{,}6° + i\sin 116{,}6°)$ im II.
$z_3 = -2 - 2i = \sqrt{8}\,(\cos 225° + i\sin 225°)$ im III. und
$z_4 = 1 - 3i = \sqrt{10}\,(\cos 288{,}45° + i\sin 288{,}45°)$ im IV. Quadranten.

Wir erkennen, daß für die Lage der Punkte gilt

I. Quadrant
$0 < \varphi < 90°$ $a > 0$ $b > 0$

II. Quadrant
$90° < \varphi < 180°$ $a < 0$ $b > 0$

III. Quadrant
$180° < \varphi < 270°$ $a < 0$ $b < 0$

IV. Quadrant
$270° < \varphi < 360°$ $a > 0$ $b < 0$

Ist $\varphi = 0°$ oder $= 180°$,
d.h., $b = 0$, dann ist die Zahl z reell und liegt auf der reellen Achse; ist dagegen
$\varphi = 90°$ oder $= 270°$, d.h., $a = 0$, dann ist sie rein imaginär und liegt auf der imaginären Achse.

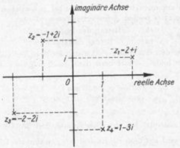


Bild 112

Vor uns stehen zwei Aufgaben, nämlich

1. die Umwandlung der algebraischen Schreibweise der komplexen Zahlen in die trigonometrische Schreibweise und
2. die umgekehrte Umwandlung aus der trigonometrischen Form in die algebraische Schreibweise.

1. Wenn $z = a + bi$ gegeben ist, dann muß zunächst der Betrag $r = |z|$ der komplexen Zahl bestimmt werden. Das geschieht mit dem Lehrsatz des PYTHAGORAS und ist bereits in 5.3.3. abgehandelt worden. Dann ist aus dem Vorzeichen von a und b zu entscheiden, in welchem Quadranten der GAUSSschen Zahlenebene der Punkt $P(a; b)$ liegt.

Das geschieht mit der obenstehenden Tabelle.

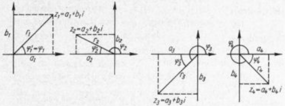


Bild 113

Aus Bild 113 erkennen wir, daß der Winkel φ' zwischen dem Radiusvektor und der reellen Achse errechnet wird aus

$$\tan\varphi' = \frac{|b|}{|a|} = \frac{\text{Betrag des Imaginärteils}}{\text{Betrag des Realteils}}\,.$$

Den Winkel φ, den der Radiusvektor mit der positiven Richtung der reellen Achse bildet, erhält man dann nach folgender Rechnung:

I. Quadrant: $\varphi_1 = \varphi_1'$

II. Quadrant: $\varphi_2 = 180° - \varphi_2'$

III. Quadrant: $\varphi_3 = 180° + \varphi_3'$

IV. Quadrant: $\varphi_4 = 360° - \varphi_4' = -\varphi_4'$

Bleiben wir zunächst bei der Berechnung von φ'. Der Quotient $\frac{|b|}{|a|} = \tan\varphi'$ wird auf dem Rechenstab als gewöhnliche Division mit den Teilungen C und D gebildet. Beim Aufsuchen des zugehörenden Winkels haben wir zu unterscheiden, ob $\tan\varphi'$ größer oder kleiner als 1 ist.

a) Ist $\tan\varphi'$ kleiner als 1, dann ist φ' kleiner als 45°. Hier kann man durch einen Übergang von der Teilung D nach der Teilung T den Winkel sofort ablesen. Das wird bei den Rechenstäben nach dem System „Darmstadt" dadurch bewirkt, daß man den Läuferstrich über den Wert von $\tan\varphi'$ auf D stellt und unter ihm auf T den Wert für den Winkel φ' abliest. Bei Rechenstäben nach dem System „Rietz" muß die Zunge so umgesetzt werden, daß der auf D abgelesene Wert für $\tan\varphi'$ auf der Teilung C über D 1 steht. Dann ist in der rückwärtigen Ausfräsung der Wert für φ' ablesbar.

b) Ist dagegen $\tan\varphi'$ größer als 1, dann ist φ' größer als 45°. Hier hat ein Übergang von der Teilung CI nach der Teilung T zu erfolgen. Dazu sind bei den Rechenstäben „Darmstadt" zunächst C 1 und D 1 zur Deckung zu bringen und der auf D abgelesene Wert für $\tan\varphi'$ auf CI mit dem Läuferstrich einzustellen. Dann steht ebenfalls unter dem Läuferstrich auf T der Wert für den Winkel $\varphi' > 45°$. Man beachte, daß jetzt die Teilung T von rechts nach links zunimmt. Bei Rechenstäben „Rietz" muß C 10 über das Ergebnis von $\tan\varphi'$ auf D gestellt werden. Dann steht wieder unter der rückwärtigen Ausfräsung der Winkelwert für φ'. Bei Rechenstäben mit 2 T-Teilungen erhält man φ' durch den Übergang von D nach T_2.

Werden jetzt noch aus den Winkeln φ' die Winkel φ errechnet, dann ist die ganze Umrechnung der komplexen Zahl von der algebraischen Form in die trigonometrische beendet.

Werden noch die Winkel φ ins Bogenmaß umgerechnet, dann ist auch die Eulersche Exponential-Schreibweise möglich.

BEISPIELE

213. $z_1 = 3{,}45 + 1{,}45\,\mathrm{i}$

$r_1 = \sqrt{3{,}45^2 + 1{,}45^2} = \sqrt{11{,}9 + 2{,}1} = \sqrt{14{,}0} = 3{,}74$

$\tan\varphi_1' = \tan\varphi_1 = \frac{1{,}45}{3{,}45} = 0{,}42$

Da P_1 (3,45; 1,45) im ersten Quadranten liegt, ist

$\varphi_1' = \varphi_1 = \underline{\underline{22{,}8°}}$ und $\varphi_1 = 0{,}398$.

$z_1 = 3{,}45 + 1{,}45\,\mathrm{i} =$

$= 3{,}74\,(\cos 22{,}8° + \mathrm{i}\sin 22{,}8°) =$

$= \underline{\underline{3{,}74\,\mathrm{e}^{0{,}398\mathrm{i}}}}$, wenn man das Bogenmaß des Winkels einsetzt.

214. $z_2 = 10{,}8 + 20{,}6\mathrm{i}$

$r_2 = \sqrt{10{,}8^2 + 20{,}6^2} = 23{,}25$

$\tan\varphi_2 = \tan\varphi_2' = 1{,}906$

Da P_2 (10,8; 20,6) auch im ersten Quadranten liegt, ist

$\varphi_2 = \underline{\underline{62{,}3°}}$ und $\varphi_2 = 1{,}09$.

$z_2 = 10{,}8 + 20{,}6\mathrm{i} =$

$= 23{,}25\cos(62{,}3° + \mathrm{i}\sin 62{,}3°) = \underline{\underline{23{,}25\,\mathrm{e}^{1{,}09\mathrm{i}}}}$

215. $z_3 = -0{,}426 + 1{,}725\,\mathrm{i}$

$r_3 = \sqrt{0{,}426^2 + 1{,}725^2} = 1{,}777$

$\tan\varphi' = 4{,}06 \qquad \varphi' = 76{,}15°$

$\varphi = \underline{\underline{103{,}85°}} \mathrel{\hat{=}} 1{,}812$

$z_3 = -0{,}426 + 1{,}725\,\mathrm{i} =$

$= 1{,}777\,(\cos 103{,}85° + \mathrm{i}\sin 103{,}85°) =$

$= \underline{\underline{1{,}777\,\mathrm{e}^{1{,}812\mathrm{i}}}}$

216. $z_4 = -10{,}28 - 0{,}435\,\mathrm{i}$

$r = \sqrt{102{,}989} = 10{,}3$

$\tan\varphi' = 0{,}0423 \qquad \varphi' = 2{,}43°$

$\varphi = \underline{\underline{182{,}43°}} \mathrel{\hat{=}} 3{,}18$

$$z_4 = 10{,}3\,(\cos 182{,}43° + \mathrm{i}\sin 182{,}43°) =$$
$$= \underline{\underline{10{,}3\,e^{3,18\mathrm{i}}}}$$

217. Überzeugen Sie sich, daß

a) $z = -\ 6{,}33 + 2{,}78\,\mathrm{i} = 6{,}92\,(\cos 156{,}3° + \mathrm{i}\sin 156{,}3°) = \underline{\underline{6{,}92\,e^{2,73\mathrm{i}}}}$

b) $z = -\ 4{,}78 - 9{,}21\,\mathrm{i} = 10{,}38\,(\cos 242{,}55° + \mathrm{i}\sin 242{,}55°) = \underline{\underline{10{,}38\,e^{4,23\mathrm{i}}}}$

c) $z\,4{,}78 - 9{,}21\,\mathrm{i} = 10{,}38\,(\cos 297{,}45° + \mathrm{i}\sin 297{,}45°) = \underline{\underline{10{,}38e^{5,19\mathrm{i}}}}$

d) $z = 10{,}28 - 0{,}35\,\mathrm{i} = 10{,}3\,(\cos 357{,}57° + \mathrm{i}\sin 357{,}57°) = \underline{\underline{10{,}3\,e^{6,23\mathrm{i}}}}$

2. Ist die komplexe Zahl in der trigonometrischen Form gegeben, dann ist die Umrechnung in die algebraische Form verhältnismäßig einfach, denn es sind nur die Cosinus- und Sinuswerte zu berechnen. Natürlich hat man dabei die Winkel immer so umzurechnen, daß sich spitze Winkel ergeben, weil nur für diese die Werte auf dem Rechenstab ablesbar sind. Die Vorzeichen der trigonometrischen Funktionen sind für

	I.	II.	III.	IV. Quadranten
$\cos x$:	+	−	−	+
$\sin x$:	+	+	−	−

BEISPIELE

218. $z_1 = 7{,}82\,(\cos 67{,}3° + \mathrm{i}\sin 67{,}3°) =$
$= 7{,}82\,(0{,}386 + \mathrm{i}\,0{,}9225) =$
$= \underline{\underline{3{,}02 + 7{,}22\,\mathrm{i}}}$

219. $z_2 = 2{,}91\,(\cos 224{,}28° + \mathrm{i}\sin 224{,}28°) =$
$= 2{,}91\,(-\cos 44{,}28° - \mathrm{i}\sin 44{,}28°) =$
$= 2{,}91\,(-0{,}715 - \mathrm{i}\,0{,}699) =$
$= \underline{\underline{-2{,}08 - 2{,}035\,\mathrm{i}}}$

220. $z_3 = 12{,}35\,(\cos 352{,}6° + \mathrm{i}\sin 352{,}6°) =$
$= 12{,}35\,(\cos 7{,}4° - \mathrm{i}\sin 7{,}4°) =$
$= 12{,}35\,(0{,}9917 - \mathrm{i}\,0{,}1288) =$
$= \underline{\underline{12{,}25 - 1{,}591\,\mathrm{i}}}$

3. Ist die komplexe Zahl in der Exponentialform gegeben, dann rechnet man sich das Bogenmaß in das Gradmaß um und kann dann wie unter 2. verfahren.

BEISPIEL

221. $z = 3{,}27\,e^{2,96\mathrm{i}} =$
$= 3{,}27\,(\cos 169{,}5° + \mathrm{i}\sin 169{,}5°) =$
$= 3{,}27\,(-\cos 10{,}5° + \mathrm{i}\sin 10{,}5°) =$
$= 3{,}27\,(-0{,}9833 + \mathrm{i}\,0{,}1823) =$
$= \underline{\underline{-3{,}21 + 0{,}595\,\mathrm{i}}}$

5.6.8. Die Gleichungen $\frac{1}{a^2} \pm \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c^2}$ und $\frac{1}{a} \pm \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$

Über eine interessante Anwendung der S- und T-Teilungen berichtet Yoshio Kumazawa von der Hokkaido Universität Sapporo. Er gibt einfache Verfahren an, wie man bei den Gleichungen

$$\frac{1}{a^2} \pm \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c^2} \quad \text{und} \quad \frac{1}{a} \pm \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$$

mit dem Rechenstab aus a und b die Zahl c berechnen kann.

Bezeichnet man in einem rechtwinkligen Dreieck die Katheten mit a und b, die Höhe mit h und die Hypotenuse mit c (siehe Bild 114), dann ist der doppelte Flächeninhalt des Dreieckes

$$h \cdot c = a \cdot b\,.$$

Teilt man die Gleichung durch c und quadriert sie, dann ist

$$h^2 = \frac{a^2 \cdot b^2}{c^2}\,.$$

Nun ist nach dem Lehrsatz von Pythagoras

$$c^2 = a^2 + b^2\,, \quad \text{also} \quad h^2 = \frac{a^2 \cdot b^2}{a^2 + b^2}$$

und der Kehrwert

$$\frac{1}{h^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 \cdot b^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2}\,.$$

Man kann mithin die Kehrwerte zweier Quadratzahlen addieren, wenn man die Basen der rechten Seite der Gleichung

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

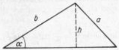


Bild 114

als Katheten und die Basis der linken Seite als Höhe in einem rechtwinkligen Dreieck auffaßt.
Das Problem der Summierung der Kehrwerte zweier Quadratzahlen zum Kehrwert einer Quadratzahl besteht damit in der Berechnung der Höhe eines rechtwinkligen Dreieckes aus den Katheten.
Nun sind

$$\tan\alpha = a/b$$

und

$$\sin\alpha = h/b \quad \text{oder} \quad h = b\cdot\sin\alpha.$$

Damit ist

$$h = b\cdot\sin\alpha\,(\operatorname{arc}\tan a/b).$$

BEISPIEL

222. Sind in einem rechtwinkligen Dreieck die Katheten $a = 4{,}72$ cm und $b = 7{,}55$ cm, dann ist der Winkel α wegen $\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{4{,}72}{7{,}55} = 0{,}625;$

$$\alpha = 32°.$$

Die Höhe des Dreieckes ergibt sich damit zu

$$h = b\cdot\sin\alpha = 7{,}55\text{ cm}\cdot\sin 32° = 4{,}0\text{ cm}.$$

Diese Rechnung läßt sich mit einer Zungen- und zwei Läufereinstellungen ausführen, wenn die S- und T-Teilungen auf dem Stabkörper liegen.
Man stellt die Ziffernfolge der größeren der beiden Katheten ($b = 7{,}55$) auf C über oder unter 45° der Teilung T. Das ist dieselbe Einstellung wie $b = 7{,}55$ von C über D 10. Stellt man den Läuferstrich über $a = 4{,}72$ auf C, dann liest man auch unter dem Läuferstrich auf T den Winkel $\alpha = 32°$ ab. Verschiebt man nun den Läufer so, daß der Strich über 32° von S kommt, dann steht unter ihm auf C das Ergebnis $h = 4{,}0$.
Damit ist

$$\frac{1}{7{,}55^2} + \frac{1}{4{,}72^2} = \frac{1}{4{,}0^2}.$$

Die Stabeinstellung kann man folgendermaßen erklären:

Aus $\tan\alpha = \frac{a}{b}$ folgt

$$\lg\tan\alpha = \lg\frac{a}{b} = \lg a - \lg b = -(\lg b - \lg a).$$

Stellt man b über D 10 und den Läuferstrich über a auf C, dann ist die von D 10 aus nach links zählende Strecke von D 10 bis zum

Läuferstrich $-(\lg b - \lg a)$, also gleich der von links nach rechts zu zählenden Strecke $\lg\tan\alpha$. Also liest man tatsächlich unter dem Läuferstrich auf T den Winkel α ab. Nun hat man zur Berechnung von h die Kathete b mit $\sin\alpha$ malzunehmen. Man braucht die Zunge nicht zu verschieben, wenn man bedenkt, daß man $\frac{\sin\alpha}{h} = \frac{1}{b}$ nicht unter C 1, sondern über D 10 abliest. Also ist wirklich

$$h = b\cdot\sin\alpha,$$

wenn man b von C über D 10 stehen hat und über $\alpha = 32°$ von auf C die gesuchte Höhe h abliest.
In der Praxis kommen Gleichungen der Form

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

häufiger vor, wie z. B. in der Abbildungsgleichung für dünne Linsen oder gekrümmte Spiegel oder in Gleichungen für das Parallelschalten von Widerständen und Reihenschalten von Kapazitäten.
Auch diese Addition zweier Kehrwerte zu einem Kehrwert kann man mit einer entsprechenden Stabeinstellung lösen, wenn man anstelle der Teilungen mit B und den Teilungen S und T arbeitet.

BEISPIEL

223. Es soll $\frac{1}{10{,}9} + \frac{1}{55}$ berechnet werden.

Man stellt den größeren Nenner auf B unter A 100 oder T 45°. Dann liest man auf T über B 10,9 den Winkel $\alpha = 24{,}0°$ ab. Verschiebt man den Läufer nach 24,0° von S, dann steht auch unter dem Läuferstrich auf B die Zahl $h = 9{,}1$. Es ist somit

$$\frac{1}{10{,}9} + \frac{1}{55} = \frac{1}{9{,}1}.$$

Während vorhin mit Basen der Quadrate auf der Teilung C gerechnet wurde, weil man die Basen als Katheten und als Höhe im rechtwinkligen Dreieck auffaßte, müssen jetzt die Nenner als Quadrate aufgefaßt werden. Deshalb rechnet man mit der B-Teilung. Die den Katheten entsprechenden Werte auf C werden zwar verwendet, treten aber im Rechengang nicht auf, da man restlos in der B-Teilung bleibt.
Ist die Gleichung

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

etwa nach $\frac{1}{a^2} = \frac{1}{h^2} - \frac{1}{b^2}$ aufzulösen, dann ergibt sich mit den Zahlen vom Beispiel 222

$$\frac{1}{4{,}0^2} - \frac{1}{4{,}72^2} = \frac{1}{7{,}55^2}$$

und die Stabeinstellung:

Die größere Basis (4,72) wird mit C 4,72 über D 10 gestellt und der Läufer über C 4,0 geschoben. Unter dem Läuferstrich liest man auf S den Winkel $\beta = 58°$ ab. Trägt der Rechenstab zwei T-Teilungen, dann setzt man die Zunge um, daß C 4,72 über D 1 steht, schiebt den Läufer über 58° von T_2 und hat unter dem Läuferstrich auf C das Ergebnis 7,55.
Trägt der Rechenstab nur eine T-Teilung, dann wird die Zunge nur so weit umgesetzt, daß C 1 über 4,72 von D steht. Schiebt man dann den Läufer über 58° von T, dann ist das Ergebnis 7,55 auf CI ablesbar.

Bei der Rechnung $\frac{1}{4{,}0^2} - \frac{1}{7{,}55^2} = \frac{1}{4{,}72^2}$ braucht man die Zunge nicht umzusetzen, da man $\alpha = 32°$ errechnet.

Analog ist es bei $\frac{1}{a} = \frac{1}{h} - \frac{1}{b}$. Mit den Zahlen vom Beispiel 223 ergibt sich

$$\frac{1}{9{,}1} - \frac{1}{55} = \frac{1}{10{,}9},$$

wenn man einstellt: B 55 unter A 100, Läufer auf B 9,1. Auf S wird $\alpha = 24°$ abgelesen. Läufer über 24° von T_1. Unter dem Läuferstrich steht auf B das Ergebnis 10,9.

Suchen Sie die Stabeinstellung für

$$\frac{1}{9{,}1} - \frac{1}{10{,}9} = \frac{1}{55}!$$

5.6.9. Zusammenfassung

Die auf dem Rechenstab notwendigen Übergänge von der einen zur anderen Teilung bei der Bestimmung der Funktionswerte für die verschiedenen trigonometrischen Funktionen können wegen ihrer Fülle verwirrend wirken. Doch werden die Funktionswerte für sehr kleine und sehr große Winkel kaum benötigt, so daß die Anzahl der notwendigen Operationen relativ klein bleibt. Die Tafel 2 am Ende des Buches gibt einen vollständigen Überblick.

5.7. Logarithmen

5.7.1. Dekadische Logarithmen

Zur Bestimmung der dekadischen Logarithmen tragen die meisten Rechenstäbe eine Mantissenteilung L. Sie ist mit Ausnahme des Maßstabes an der Anlegekante die einzige Skale des Rechenstabes, die linear eingeteilt ist. Sie ist die Grundlage des gesamten Rechenstabes, auf der sich alle weiteren Teilungen aufbauen. Die L-Teilung beginnt links bei 0,0 und endet rechts bei 1,0. Sie arbeitet mit der C- oder D-Teilung zusammen, je nachdem, wo sie sich befindet.
Bei Rechenstäben nach dem System „Rietz" und „Darmstadt" (Metall) befindet sie sich ganz unten auf der Vorderseite des Stabkörpers. Man sieht unmittelbar, wie sich über ihr alle anderen Teilungen aufbauen. Beim Modell „Darmstadt" (Holz) liegt die L-Teilung über dem Maßstab auf der schrägen Anlegekante. Bei einigen anderen Modellen liegt die L-Teilung auf der Rückseite der Zunge.
Auf der L-Teilung sind die Mantissen bis auf 3 Dezimalstellen ablesbar, was für die meisten Rechnungen ausreicht. Zu erwähnen ist noch, daß diese Teilung als einzige des Rechenstabes keine Ziffernfolgen enthält, sondern komplette Dezimalzahlen.
Bild 115 zeigt, wie man die Bestimmung der Logarithmen beim System „Rietz" vornimmt. Wir benötigen nur den Läufer.
Der Läuferstrich wird über den Numerus (auf Bild 115 die Zahl 2) auf der Teilung D gestellt. Auf der Teilung L ist dann die Mantisse abzulesen.

$\lg 2 = 0{,}301$

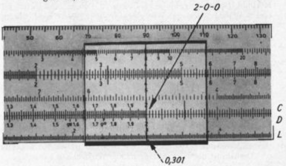


Bild 115

Da bei der einstelligen Zahl 2 die Kennzahl 0 ist, handelt es sich in diesem Falle bereits um den vollständigen Logarithmus.
Die Bestimmung der Kennzahl wurde bereits in 2.3.2. auf Seite 28 besprochen.
Selbstverständlich können wir auch umgekehrt zu einem bestimmten Logarithmus den zugehörigen Numerus aufsuchen.
Bild 116 zeigt die Bestimmung des Numerus 8,3 aus dem Logarithmus 0,919 (System „Rietz"), denn es ist

$$0{,}919 = \lg 8{,}3\,.$$

Die Bilder 117 und 118 zeigen die Einstellung von

$$\lg 4{,}51 = 0{,}654$$

bei einem Rechenstab vom System „Darmstadt" (Holz).

ÜBUNGSAUFGABEN

Von der Zahl zum Logarithmus	Vom Logarithmus zur Zahl
93. lg 117,5	94. lg 0,0381
95. lg 22,4	96. lg 5,16
97. lg 623	98. lg 0,00815
99. $\lg x = 1{,}137$	100. $\lg x = 0{,}213$
101. $\lg x = 0{,}392 - 2$	102. $\lg x = 0{,}416 - 4$
103. $\lg x = 2{,}619$	104. $\lg x = 3{,}722$

In welchen Fällen benötigen wir diese Mantissen bzw. Logarithmen? Wir können mit dem Rechenstab die wichtigsten Rechnungen, Multiplikationen, Divisionen, 2. Potenz, 3. Potenz, Quadratwurzel und 3. Wurzel ausführen. Was geschieht aber, wenn wir Potenzen höher als vom 3. Grad zu bilden haben oder mit anderen gebrochenen Exponenten als $^1/_2$, $^1/_3$ oder $^2/_3$ gerechnet werden muß? Dazu benötigen wir unbedingt Logarithmen. Wir wollen uns deshalb einige derartige Berechnungsfälle ansehen.

BEISPIELE

224. Es ist 17^5 zu berechnen.
Logarithmieren wir, dann erhalten wir die Gleichung

$$\lg 17^5 = 5 \lg 17\,.$$

Der Logarithmus von 17 wird auf den Skalen L und D bestimmt: 17 wird auf D eingestellt und auf L die Mantisse 0,2305 abgelesen. Die zweistellige Zahl 17 erfordert die Kennzahl 1. Deshalb ist der Logarithmus 1,2305. Wir rechnen weiter

$$\lg 17^5 = 5 \lg 17 = 5 \cdot 1{,}2305 = 6{,}1525\,.$$

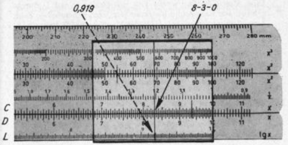


Bild 116

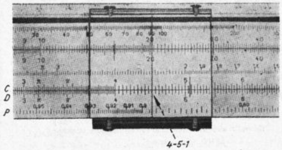


Bild 117

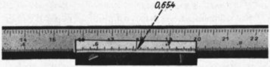


Bild 118

Diese Multiplikation wurde mit den Skalen C und D durchgeführt. Die Kennzahl 6 bestimmt jetzt eine siebenstellige Zahl, deren Ziffernfolge wir mit Hilfe der Mantisse 0,1525 bestimmen. Der Übergang von der Teilung L nach D liefert uns den Numerus 1,42.

Damit ist das Ergebnis

$$17^5 = \underline{\underline{1420000}}.$$

Prüfen Sie dieses Ergebnis mit Hilfe der Teilungen A und K nach!

225. Es sei $4{,}85^{6,25}$ zu berechnen.
Entsprechend Beispiel 224 erhalten wir

$$\lg 4{,}85^{6,25} = 6{,}25 \cdot \lg 4{,}85 = 6{,}25 \cdot 0{,}6855 = 4{,}28.$$

Damit ist $4\,85^{6,25} = 1\,905 \cdot 10^4$ (wegen Kennzahl 4) $= \underline{\underline{19050}}$.

226. Es ist $\sqrt[4,2]{128}$ zu berechnen.

$$\lg \sqrt[4,2]{128} = \frac{1}{4{,}2} \cdot \lg 128 = \frac{2{,}107}{4{,}2} = 0{,}5017$$

Damit ist

$$\sqrt[4,2]{128} = \underline{\underline{3{,}175}} \text{ (Kennzahl 0)}.$$

227. Es ist $\sqrt[17]{6{,}55}$ zu bestimmen.

$$\lg \sqrt[17]{6{,}55} = \frac{1}{17} \lg 6{,}55 = \frac{0{,}816}{17} = 0{,}0480 \text{ (Kennzahl 0)}$$

Es ist deshalb $\sqrt[17]{6{,}55} = \underline{\underline{1{,}117}}$.

228. Wie hoch ist ein Flugzeug über dem Meeresspiegel, wenn ein Luftdruck $p_1 = 639$ Torr gemessen wird? Barometerstand in Meereshöhe $p = 760$ Torr.
Es ergibt sich die Höhe h in Metern aus der Gleichung

$$h = 18400\,(\lg p - \lg p_1).$$

Dabei sind $\lg p = \lg 760 = 2{,}881$ und $\lg p_1 = \lg 639 = 2{,}806$.
Diese Werte ermitteln wir auf den Skalen D und L. Die Subtraktion führen wir im Kopf durch:

$$2{,}881 - 2{,}806 = 0{,}075$$

Nun multiplizieren wir $18400 \cdot 0{,}075$ auf den Skalen D und CI.
Die Ziffernfolge auf D: 1–3–8–0
Die Stellenzahl:

$$2 \cdot 10^4 \cdot 7 \cdot 10^{-2} = 14 \cdot 10^2 = 1400$$

Die Höhe beträgt $\underline{\underline{1380 \text{ m}}}$.

229. Wie groß ist der Enddruck p_2 bei einer Volumenverminderung im Verhältnis $\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{2}$

p_1 Anfangsdruck $= 1$ at
p_2 Enddruck
V_1 Anfangsvolumen $= 1\ \mathrm{m}^3$
V_2 Endvolumen $= 0{,}5\ \mathrm{m}^3$

a) bei isothermer und b) bei adiabatischer Zustandsänderung?

a) Für isotherme Zustandsänderung gilt das Gesetz von Boyle-Mariotte

$$p_2 V_2 = p_1 V_1,$$

also

$$p_2 = p_1 \cdot \frac{V_1}{V_2} = 1 \text{ at} \cdot \frac{1\ \mathrm{m}^3}{0{,}5\ \mathrm{m}^3} = 2 \text{ at}.$$

b) Für adiabatische Zustandsänderungen gilt das Gesetz von Poisson

$$p_2 V_2^{\varkappa} = p_1 V_1^{\varkappa}$$

mit $\varkappa = \frac{c_p}{c_v} = 1{,}4$ für zweiatomige Gase.
Umgestellt erhalten wir

$$p_2 = p_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\varkappa} = 1 \text{ at} \left(\frac{1\ \mathrm{m}^3}{0{,}5\mathrm{m}^3}\right)^{1,4} = 1 \text{ at} \cdot (2)^{1,4}.$$

Die Potenz $2^{1,4}$ berechnen wir mit der Mantissenteilung L und der Teilung D. Es ist

$$\lg 2^{1,4} = 1{,}4 \cdot \lg 2 = 1{,}4 \cdot 0{,}301 = 0{,}421.$$

Damit ist $2^{1,4} = 2{,}64$

$$p_2 = 1 \text{ at} \cdot 2{,}64 = 2{,}64 \text{ at}.$$

Der Druck ist bei der adiabatischen Zustandsänderung auf $\underline{\underline{2{,}64 \text{ at}}}$ angestiegen.

230. Welche Temperatur nimmt die Luft im Zylinder eines Dieselmotors an, wenn der Druck von $p_1 = 1$ at auf $p_2 = 52$ at zunimmt und die Anfangstemperatur $T_1 = 300°$ K betrug?
($\varkappa$ für zweiatomige Gase wie Luft 1,4)
Aus der Poissonschen Gleichung $p_1 V_1^{\varkappa} = p_2 V_2^{\varkappa}$ (Beispiel 229) und der allgemeinen Gasgleichung $p \cdot V = mRT$ gewinnen wir durch Eliminieren von V

$$T_1^{\varkappa} p_1^{1-\varkappa} = p_2^{1-\varkappa} T_2^{\varkappa}$$

oder

$$T_2^{\varkappa} = T_1^{\varkappa} \frac{p_1^{1-\varkappa}}{p_2^{1-\varkappa}} = T_1^{\varkappa} \frac{p_2^{\varkappa-1}}{p_1^{\varkappa-1}}$$

und schließlich

$$T_2 = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}$$

Für unser Zahlenbeispiel ergibt sich

$$T_2 = 300\,°\mathrm{K} \left(\frac{52\ \mathrm{at}}{1\ \mathrm{at}}\right)^{\frac{1,4-1}{1,4}} = 300 \cdot 52^{\frac{0,4}{1,4}}\,°\mathrm{K}.$$

Wir berechnen zuerst $52^{\frac{0,4}{1,4}} = 52^{0,286}$.
Damit ist $\lg 52^{0,286} = 0,286 \cdot \lg 52{,}52 = 0,286 \cdot 1,716 = 0,491$
und $52^{0,286} = 3,1$,
$T_2 = 300 \cdot 3,1\,°\,\mathrm{K} = 930\,°\,\mathrm{K}$, $t_2 = \underline{\underline{657\,°\mathrm{C}}}$.

5.7.2. Natürliche Logarithmen

Bereits in 2.3.3. waren die natürlichen Logarithmen eingeführt worden. Diese in der höheren Mathematik außerordentlich wichtigen Logarithmen haben die Zahl $e = 2,71828\ldots$ als Basis.
Wir wollen die beiden gebräuchlichsten Logarithmensysteme, das dekadische mit der Basis $a = 10$ und das natürliche mit der Basis $a = e \approx 2,71828\ldots$, einander gegenüberstellen.

	Briggssche Logarithmen	Natürliche Logarithmen
Basis:	$a = 10$	Basis: $a = e \approx 2,71828\ldots$
	$y = 10^b$	$y = e^c = (2,71828\ldots)^c$
	$\log_{10} y = \lg y = b$	$\log_e y = \ln y = c$
	$10^{\lg y} = 10^b = y$	$e^{\ln y} = e^c = y$
speziell:	$\lg 10 = 1$	$\ln e = 1$

Betrachten wir die Gleichung $y = 10^x$, dann gilt unter Beachtung der obigen Rechengesetze

$$\lg y = \lg 10^x = x \cdot \lg 10 \qquad \ln y = \ln 10^x = x \cdot \ln 10$$
$$= x \cdot 1 \quad = x$$

Setzen wir rechts für x aus der linken Gleichung $\lg y$ ein, so erhalten wir $\ln y = \lg y \cdot \ln 10$,

eine Umrechnungsformel natürlicher Logarithmen in dekadische und umgekehrt.

Wegen $\ln 10 = 2,30259\ldots$ und $\frac{1}{\ln 10} = 0,43429\ldots$

ergibt sich

$$\ln y = \ln 10 \cdot \lg y = 2,30259 \cdot \lg y$$

und $$\lg y = \frac{1}{\ln 10} \cdot \ln y = 0,43429 \cdot \ln y.$$

Wir erhalten aus den dekadischen Logarithmen die natürlichen durch die Multiplikation mit dem konstanten Faktor 2,30259. Umgekehrt erhalten wir dekadische Logarithmen, wenn wir die natürlichen mit dem konstanten Faktor 0,43429 multiplizieren.
Diesen Faktor, der natürliche Logarithmen in dekadische umzuwandeln gestattet, nennt man Modul.
Auf dem Rechenstab (System „Rietz") müssen wir zur Bestimmung der natürlichen Logarithmen die Teilungen L (für die dekadischen) und C und D (für die Multiplikationen) verwenden.

BEISPIELE

231. $y = 2$;	$\lg 2 = 0,301$;	$\ln 2 = \underline{\underline{0,693}}$
232. $y = 5,5$;	$\lg 5,5 = 0,740$;	$\ln 5,5 = \underline{\underline{1,705}}$
233. $y = 35,6$;	$\lg 35,6 = 1,551$;	$\ln 35,6 = \underline{\underline{3,57}}$

Verschiedene Ausführungen von Rechenstäben haben besondere Teilungen, die der Bestimmung der natürlichen Logarithmen dienen. Damit fällt die Multiplikation mit dem konstanten Faktor 2,30259 weg.
Wir werden in 5.7.4. nochmals darauf zurückkommen.

5.7.3. Natürliche Exponentialfunktion

Zur Berechnung von Werten der natürlichen Exponentialfunktion und für die natürlichen Logarithmen sind Rechenstäbe mit besonderen Teilungen entwickelt worden.
Der Rechenstab System „Darmstadt" hat drei solcher Teilungen. Sie befinden sich übereinander auf der Rückseite der Zunge, wo bei den anderen Systemen die Teilungen für die Winkel der Winkelfunktionen angebracht sind. Die unterste Teilung reicht von 2,5 bis $5 \cdot 10^4$, die mittlere von 1,1 bis 3, und die obere umfaßt die Werte von 1,01 bis 1,11.

Wie sind die Teilungen aufgebaut, und wie wird mit ihnen gearbeitet?

Wir betrachten zunächst die Teilungen von der Rückseite der Zunge beim System „Darmstadt“. Dazu drehen wir die Zunge um und schieben sie so in den Rechenstabkörper, daß die Marke e der untersten Zungenteilung über D 1 des Rechenstabkörpers steht.

Bei den Rechenstäben „Darmstadt“ aus Metall bringen wir die Zunge in Normalstellung (C 1 über D 1) und wenden zum Ablesen der e-Potenzen den ganzen Rechenstab um. Der Läufer ist so eingerichtet, daß die beiden Striche auf der Vorder- und Rückseite einander genau gegenüberstehen.

Bei den Rechenstäben „Darmstadt-Record“ befinden sich die drei Teilungen auf dem Stabkörper unterhalb der Teilung D.

Alle 3 Teilungen arbeiten mit der Teilung D zusammen. Auf der obersten Teilung LL_1 werden die Potenzwerte für $e^{0,01x}$ abgelesen. Die Zahlen für x sind mit Hilfe des Läuferstriches auf der D-Teilung einzustellen. Die Teilung LL_1 umfaßt deshalb die Potenzen von $e^{0,01}$ bis $e^{0,1}$. Die Unterteilung, die bei 1,01 beginnt, ist sehr fein. Zwischen 1,01 und 1,02 beträgt der Strichabstand 0,0001, so daß auf 1,01 die Zahl 1,0101 folgt. Zwischen 1,02 und 1,05 beträgt der Strichabstand 0,0002; auf 1,02 folgt 1,0202. Zwischen 1,05 und 1,11 schließlich beträgt der Strichabstand 0,0005; auf 1,05 folgt 1,0505. Wir lesen mit dem Läufer durch Übergang von D nach LL_1 ab:

$e^{0,015} = 1{,}0151$ (siehe Bild 119) $\qquad e^{0,03} = 1{,}0304 \qquad e^{0,065} = 1{,}067.$

Die mittlere Teilung LL_2 gilt für $e^{0,1x}$. Sie umfaßt also die Potenzen von $e^{0,1}$ bis e^1, wenn wir die kleinen Verlängerungen der Teilung für die roten Verlängerungen auf der D-Teilung nicht berücksichtigen. Hier ist der Strichabstand schon gröber. Zwischen 1,10 und 1,20 beträgt er 0,001, so daß auf 1,10 die Zahl 1,101 folgt. Zwischen 1,20 und 1,40 beträgt der Strichabstand 0,002; auf 1,20 folgt 1,202. Zwischen 1,4 und 1,8 beträgt der Strichabstand 0,005 und zwischen 1,8 und 2,5 schon 0,01. Zwischen 2,5 und 3 beträgt der Strichabstand sogar 0,02.

Wir lesen mit dem Läufer auf LL_2 ab:

$e^{0,15} = 1{,}1617$ (siehe Bild 119) $\qquad e^{0,31} = 1{,}364 \qquad e^{0,74} = 2{,}09.$

Die unterste Teilung LL_3 gilt für e^x. Sie umfaßt die Potenzen von e^1 bis e^{10}. Der Strichabstand ist noch gröber. Zwischen 2,5 und 4 beträgt er 0,02, zwischen 4 und 6 bereits 0,05, zwischen 6 und 10 bereits 0,1 und zwischen 10 und 20 schon 0,2. Zwischen 20 und 30 beträgt der Strichabstand 0,5 bis 50 dann 1,0 bis 100 dann 2,0. Danach werden die Abstände noch größer 5,0 (bis 200), 10 (bis 500), 50 (bis 1000), 100 (bis 2000), 300 (bis 5000), 500 (bis 10^4) und schließlich sogar 1000.

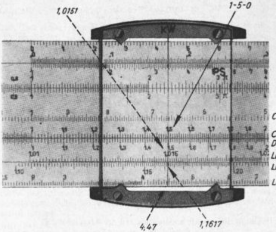


Bild 119

Wir lesen mit dem Läufer auf LL_3 ab:

$e^{1,5} = 4{,}47$ (siehe Bild 119) $\qquad e^{3,2} = 24{,}5 \qquad e^{6,7} = 2000.$

Wir hätten beim Rechenstab aus Holz die 3 Skalen der Zungenrückseite auch verwenden können, ohne die Zunge vorher umzudrehen. Dann sind die Zahlen x von der Skale C über D 10 einzustellen. Unter dem Strich in der rechten rückwärtigen Ausfräsung erscheinen dann die entsprechenden Potenzen von $e^{0,01x}$, $e^{0,1x}$ und e^x (Bild 122).

Wir wollen jetzt herleiten, wie die Teilungen LL_1, LL_2 und LL_3 entstanden sind.

Bild 120 zeigt eine Skizze der Teilungen D und LL_3. Der Abstand von 1 bis x auf der Teilung D entspricht $\lg x$. An dem Ende der Strecke $\lg x$ ist der Numerus x angeschrieben. Über D 1 steht auf der LL_3-Teilung e und über x (auf D) auf LL_3 die Zahl $y = e^x$.

Auf der D-Teilung ergibt sich für den Numerus x die Streckenlänge

$$\lg x - \lg 1 = \lg x - 0 = \lg x.$$

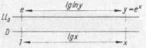


Bild 120

Auf der LL_3-Teilung haben wir für den Numerus $y = e^x$ die Streckenlänge

$$\lg \lg y - \lg \lg e = \lg \frac{\lg y}{\lg e}.$$

Wegen

$$y = e^x \quad \text{bzw.} \quad x = \ln y \quad \text{und}$$
$$\lg y = \lg e^x = x \lg e \quad (x = \ln y \text{ eingesetzt})$$
$$= \ln y \lg e$$

also $\quad \ln y = \dfrac{\lg y}{\lg e}$

ist $\quad \lg \lg y - \lg \lg e = \lg \dfrac{\lg y}{\lg e} = \lg \ln y.$

Das heißt aber nichts anderes, als daß der Abstand auf D
von 1 bis x gleich $\lg x$ ist (am Ende ist x angeschrieben)

und daß der Abstand auf LL_3
von e bis y gleich $\lg \ln y$ ist (am Ende ist y angeschrieben).

Da beide Werte übereinanderstehen, muß gelten

$$\lg x = \lg \ln y$$

und $\quad x = \ln y.$

Auf der Teilung LL_3 ist aber nicht $\ln y$, sondern der Numerus $y = e^x$ angeschrieben.

Wir halten fest:

Über jedem x-Wert auf der D-Skale steht ein Wert der natürlichen Exponentialfunktion $y = e^x$, und zwar

auf LL_1 $e^{0,01x}$
auf LL_2 $e^{0,1x}$
auf LL_3 e^x

BEISPIELE

LL_3: 234. $e^{2,5} = 12,2$ — 235. $e\pi = 23,1$ — 236. $e^{5,1} = \underline{\underline{164}}$

LL_2: 237. $3^{0,38} = 1,462$ — 238. $e^{0,69} = 1,994$ — 239. $e^{0,87} = \underline{\underline{2,39}}$

LL_1: 240. $e^{0,0222} = 1,02245$ — 241. $e^{0,045} = 1,0461$ — 242. $e^{0,0725} = \underline{\underline{1,0753}}$

243. Über einen festen Metallzylinder gleitet ein Seil. Der Reibungskoeffizient ist $\mu_0 = 0,4$, die Last $F_L = 50$ kp, der Umschlingungswinkel $\alpha = 90°$. Wie groß ist die Reibkraft F? Die Umrechnung eines Winkels vom Gradmaß in das Bogenmaß ist bereits auf Seite 130 beschrieben worden. Es ergibt sich $\widehat{\alpha} = \pi/2$.

Setzen wir die Werte in die Formel für die Seilreibung ein, dann ergibt sich

$$F = F_L \cdot e^{\mu_0 \alpha} = 50 \cdot e^{0,4\pi/2}\,\text{kp} = 50 \cdot e^{0,2\pi}\,\text{kp}$$

und wegen $\quad e^{0,63} = 1,88$

$$F = 50 \cdot e^{0,63}\,\text{kp} = 50 \cdot 1,88\,\text{kp} = 94\,\text{kp}.$$

Die Kraft beträgt $\underline{\underline{94\,\text{kp}}}$.

Damit sind unsere Einstellmöglichkeiten noch nicht erschöpft. Verwenden wir die Zunge in Normallage, d.h., die LL-Teilungen befinden sich auf der Rückseite, dann ist einleuchtend, daß wir an Stelle der C-Teilung auch die CI-Teilung benutzen können, wenn wir die entsprechenden Werte unter den auf D 10 gestellten Läuferstrich bringen.

BEISPIELE

244. $\sqrt[4]{e} = e^{\frac{1}{4}} = e^{0,25} = \underline{\underline{1,284}}$

Wir stellen 4 von CI unter den Läuferstrich bei D 10 (Bild 121) und lesen auf der Rückseite unter dem Strich der Ausfräsung bei LL_2 (Bild 122) 1,284 ab.

Wir hätten auch so verfahren können, daß die Zunge umgewendet eingeschoben ist. Die Zahl 4 stellen wir auf der Reziprokteilung CI unter den Einstellstrich auf der rückseitigen Ausfräsung. Auf der Vorderseite lesen wir mit dem Läuferstrich auf der mittleren Zungenteilung über D 10 das Ergebnis 1,284 ab (Bilder 123 und 124).

245. $\sqrt[30]{e} = e^{\frac{1}{30}} = e^{0,033} = \underline{\underline{1,0339}}$ (einstellen 30 auf CI; ablesen 1,0339 auf LL_1)

246. $\sqrt[5]{e} = e^{\frac{1}{5}} = e^{0,2} = \underline{\underline{1,2215}}$ (einstellen 5 auf CIL_2) ablesen 1,2215 auf L;

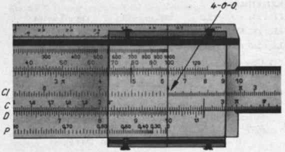


Bild 121

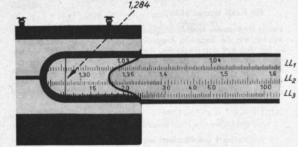


Bild 122

Eine weitere Möglichkeit, die Exponentialteilungen auszunutzen, besteht in der Kombination der LL-Teilungen mit der Quadratteilung B.
Stellen wir unter den Läuferstrich bei D 10 oder A 100 die Exponenten x von der B-Teilung, dann können wir auf der Rückseite ablesen bei LL_1 $e^{0,01\sqrt{x}}$ bei LL_2 $e^{0,1\sqrt{x}}$ bei LL_3 $e^{\sqrt{x}}$.

BEISPIELE

247. $e^{\sqrt{8}} = 16,9$ (auf Skale e^x)

248. $e^{0,1\sqrt{32}} = 1,762$ (auf Skale $e^{0,1x}$)

249. $e^{0,01\sqrt{60}} = 1,0806$ (auf Skale $e^{0,01x}$)

Ebenfalls sehr oft sind in der Praxis die Potenzen e^{-x} zu bilden. Diese Werte sind auf dem Rechenstab System „Darmstadt“ nicht sofort ablesbar. Denken wir aber daran, daß

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

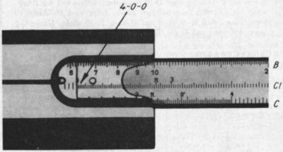


Bild 123

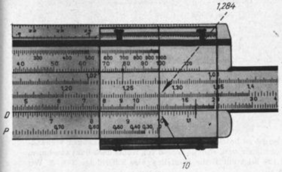


Bild 124

ist, dann können wir die Werte für e^{-x} bestimmen, wenn wir von den mit den Exponentialteilungen LL_1 bis LL_3 bestimmten Werten von e^x die Kehrwerte bilden.

BEISPIEL

250. $e^{-3} = \frac{1}{e^3} = \frac{1}{20{,}09} = 0{,}0498$

3 von der C-Teilung über D 10 geschoben, liefert auf der Rückseite bei LL_3 den Zwischenwert 20,09. Jetzt wird die Zunge so verschoben, daß 2–0–0–9 auf C über D 10 steht. Unter C 1 lesen wir dann auf D die Ziffernfolge 4–9–8 ab.

ÜBUNGSAUFGABEN

Man berechne

105. $e^{-0{,}347}$ 106. $e^{-0{,}049}$ 107. $e^{-\sqrt{2}}$ 108. $e^{-0{,}1\sqrt{30}}$

Bequemer sind diese Rechnungen mit dem Rechenstab Reiss „Duplex“ auszuführen. Dieser trägt nämlich auf dem Stabkörper unterhalb der D-Teilung die Teilungen LL_3, LL_2, LL_1 und LL_0. Zusätzlich befinden sich noch auf dem oberen Teil des Stabkörpers (von unten nach oben) die Teilungen LL_{03}, LL_{02}, LL_{01} und LL_{00} für e^{-x}, $e^{-0{,}1x}$, $e^{-0{,}01x}$ und $e^{-0{,}001x}$.

Die Teilung LL_0 umfaßt die Werte von 1,001 bis 1,011. Dagegen laufen die Teilungen

LL_{00}	von 0,999	bis 0,989
LL_{01}	von 0,99	bis 0,9
LL_{02}	von 0,91	bis 0,35
LL_{03}	von 0,4	bis 0,00001.

Bild 125 zeigt einige Einstellbeispiele auf diesem Rechenstab. Auf D wird x, in diesem Falle 9, eingestellt. Die vier unteren Teilungen geben dann an:

$e^9 = 8103$, $e^{0{,}9} = 2{,}46$, $e^{0{,}09} = 1{,}0942$, $e^{0{,}009} = 1{,}00903$.

Auf den oberen LL-Teilungen lesen wir ab:

$e^{-9} = 1{,}23 \cdot 10^{-3}$, $e^{-0{,}9} = 0{,}4066$, $e^{-0{,}09} = 0{,}9139$, $e^{-0{,}009} = 0{,}99104$.

Hierbei ist zu beachten, daß die Teilungen, die wir soeben verwandten, rückläufig sind, also die Zahlen von rechts nach links zunehmen. Bild 126 zeigt auf D die Einstellung der Ziffernfolge 2–6–3. Wir lesen ab:

$e^{2{,}63} = 13{,}9$ $e^{-2{,}63} = 0{,}072$
$e^{0{,}263} = 1{,}303$ $e^{-0{,}263} = 0{,}769$
$e^{0{,}0263} = 1{,}0266$ $e^{-0{,}0263} = 0{,}974$
$e^{0{,}00263} = 1{,}00263$ $e^{-0{,}00263} = 0{,}99738$.

Die Zahlen der ersten Spalte sind reziprok zu denen der zweiten Spalte. Auf diese Möglichkeit, Kehrwerte zu bilden, wurde bereits in 5.5.1. auf Seite 124 hingewiesen.

BEISPIELE

251. Ein Kondensator von der Kapazität $C = 10\ \mu F$ wird über einen Widerstand von $R = 5700\ \Omega$ entladen. Wie groß ist die Entladungsstromstärke nach 0,15 s, wenn die am Kondensator anliegende Spannung $U_0 = 220$ V beträgt?

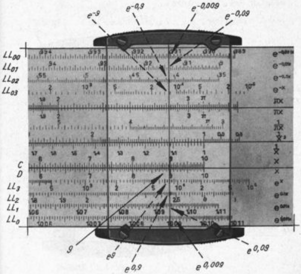


Bild 125

Aus $I = I_0 e^{-\frac{1}{RC}t}$ und $I_0 = \frac{U_0}{R}$ ergeben sich

$$I_0 = \frac{U_0}{R} = \frac{220\ \text{V}}{-5700\ \Omega} = 0{,}0386\ \text{A} = 38{,}6\ \text{mA}$$

und $I = I_0 e^{\frac{-1}{RC}t} = 38{,}6\ \text{mA}\ e^{-\frac{0{,}15\ \text{s}}{5700\ (\text{V/A})\ 10^{-6}\ \text{As/V}}} =$

$$= 38{,}6\ e^{-\frac{15}{5{,}7}}\ \text{mA} = 38{,}6 \cdot e^{-2{,}63}\ \text{mA} =$$
$$= 38{,}6 \cdot 0{,}072\ \text{mA} = \underline{\underline{2{,}78\ \text{mA}}}.$$

Rechnet man mit dem Rechenstab Modell „Darmstadt", dann ist von $e^{2{,}63} = 13{,}9$ noch der Kehrwert $\frac{1}{1{,}39} = 0{,}072$ zu bilden.

Beim Rechenstab Reiss „Duplex" liest man auf der Teilung LL_{03} sofort ab, daß $e^{-2{,}63} = 0{,}072$ ist.

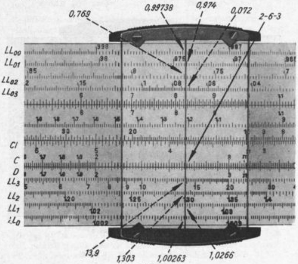


Bild 126

252. Ein Körper von der Anfangstemperatur $\vartheta_0 = 80\ °\text{C}$ kühlt sich entsprechend der Gleichung

$$\vartheta = \vartheta_0 e^{-\frac{t}{25\ \text{s}}}\ \text{ab.}$$

Welche Temperatur hat er noch nach $t = 17{,}5$ s?

Es ergibt sich

$$\vartheta = \vartheta_0 e^{-\frac{t}{25\ \text{s}}} = 80\ e^{-\frac{17{,}5}{25}}\ °\text{C} =$$
$$= 80\ e^{-0{,}7}\ °\text{C} = 80 \cdot 0{,}497\ °\text{C} =$$
$$= \underline{\underline{39{,}8\ °\text{C}}}$$

253. Für den Zerfall von Radium gilt die Gleichung:

$$m = m_0 \cdot e^{-\lambda t}$$
$$\lambda\ (\text{Radium A}) = 0{,}00385\ ^1/\text{s}$$

Wie groß ist die nach 10 Sekunden von 1 mg Radium A verbliebene Masse?

$$m = 1 \cdot e^{-0{,}00385 \cdot 10}\ \text{mg}$$
$$m = e^{-0{,}0385}\ \text{mg}$$
$$m = \underline{\underline{0{,}962\ \text{mg}}}$$

5.7.4. Nochmals natürliche Logarithmen

Wir haben festgestellt, daß die Teilung LL_3 die Werte der natürlichen Exponentialfunktion $y = e^x$ enthält. Dann müssen, da sich daraus

$$x = \ln y$$

ergibt, die Werte x auf der D-Teilung die natürlichen Logarithmen der Werte y auf der LL_3-Teilung sein.
Benutzen wir aber die Teilungen LL_2, LL_1 oder LL_0, dann sind die auf D abgelesenen Werte jeweils noch mit 0,1 bzw. 0,01 bzw. 0,001 malzunehmen.

BEISPIELE

254. Bild 127 zeigt eine Einstellung auf System „Darmstadt-Record".

Wir lesen ab

$$\ln 44{,}7 = \underline{\underline{3{,}8}}$$
$$\ln 1{,}462 = \underline{\underline{0{,}38}}$$
$$\ln 1{,}0387 = \underline{\underline{0{,}038}}$$

255. Ein Lichtbündel mit einem Lichtstrom $\Phi_1 = 10$ Lumen trifft senkrecht auf eine Glasplatte von der Dicke $s = 2$ cm. Während das Licht die Glasplatte durchdringt, wird ein Teil des Lichtes absorbiert, so daß hinter der Glasplatte nur noch ein Lichtstrom $\Phi_2 = 4{,}5$ Lumen vorhanden ist. Von Reflexionsverlusten soll abgesehen werden. Wie groß ist der Absorptionskoeffizient dieses Glases?

Wir haben nach der Gleichung $c = \frac{1}{s} \ln \frac{\Phi_1}{\Phi_2}$ zu rechnen.

Auf LL_2 und D lesen wir ab, daß

$$c = \frac{1}{2} \ln \frac{10}{4{,}5}\,\mathrm{cm}^{-1} = \frac{1}{2} \ln 2{,}22\ \mathrm{cm}^{-1}$$

$$\ln 2{,}22 = 0{,}797.$$

Damit ist $c = \frac{1}{2} \cdot 0{,}797\ \mathrm{cm}^{-1} = \underline{\underline{0{,}398\ \mathrm{cm}^{-1}}}$.

Es besteht folgende Rechenmöglichkeit (System „Darmstadt"): 2,22 von der Teilung LL_2 wird unter den Strich der rechten rückwärtigen Ausfräsung gestellt. Dann lesen wir über D 10 auf C 7–9–7

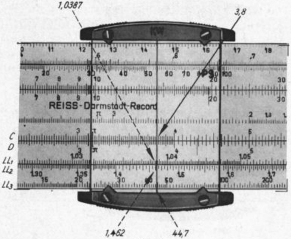


Bild 127

ab. Unter C1 lesen wir auf D die Ziffernfolge 1–2–5–5 $\left(\frac{1}{0{,}797} = 12{,}55\right)$ ab. Nehmen wir diesen Wert mittels der C-Teilung mit 2 mal, dann ergibt sich auf der D-Teilung (unter 2 von C) die Ziffernfolge 2-5-1-0 $\left(\frac{2}{0{,}797} = 2{,}51\right)$. Verschieben wir nun die Zunge so, daß C 1 über D 1 steht, dann lesen wir auf CI das Ergebnis 3–9–8–0 $\left(\frac{0{,}797}{2} = 0{,}398\right)$ ab (Bilder 128 und 129).

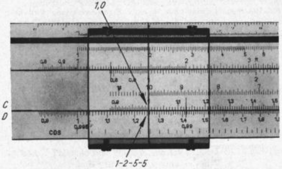


Bild 128

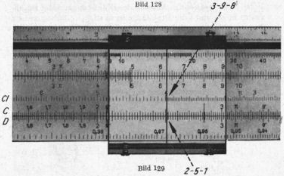


Bild 129

Einfacher wird die Rechnung beim Rechenstab „Duplex". Aus

$$c = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{10}{4{,}5}\,\mathrm{cm}^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \ln \frac{4{,}5}{10}\,\mathrm{cm}^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \ln 0{,}45\,\mathrm{cm}^{-1}$$

ergibt sich die einfache Einstellung: Läuferstrich über 0,45 von LL_{02}, darunter die Zunge so verschieben, daß C 2 auch unter dem Läuferstrich steht. Dann ist unter C 1 auf D das Ergebnis ablesbar.

256. Die Spannungsdämpfung b einer Fernsprechleitung wird bei bekannter Ein- und Ausgangsspannung nach folgender Formel berechnet:

$$b = \ln\left(\frac{U_1}{U_2}\right)$$

$$U_1 = 5\,\mathrm{V},\ U_2 = 0{,}2\,\mathrm{V}$$

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{5\,\mathrm{V}}{0{,}2\,\mathrm{V}} = 25$$

$$\ln 25 = 3{,}22$$

Die Dämpfung beträgt

$$b = \underline{\underline{3{,}22\ \text{Neper}}}.$$

257. Wir berechnen die Induktivität einer Doppelleitung und benutzen dazu die Gleichung

$$L = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{a}{r} \quad \text{mit} \quad \mu_0 = 4\,\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{H/m},$$

wobei a der gegenseitige Abstand der Drähte in cm, r der Drahtradius in cm und l die Drahtlänge in m ist.

Für $a = 20$ cm, $r = 0{,}1$ cm und $l = 100$ m ergibt sich

$$L = \frac{4\,\pi \cdot 10^{-7}}{\pi} \cdot 100 \cdot \ln 200\,\mathrm{H} = 4 \cdot 10^{-5} \cdot \ln 200\,\mathrm{H} = 21{,}2 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{H} = \underline{\underline{212\,\mu\mathrm{H}}}.$$

258. Ein Zylinderkondensator hat eine Länge $l = 0{,}1$ m, einen Innenradius $r = 0{,}1$ cm und einen Außenradius $R = 2$ cm. Man berechnet seine Kapazität nach der Formel

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln \frac{R}{r}} \quad \text{mit} \quad \varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F/m}.$$

Mit den Zahlenwerten ergibt sich

$$C = \frac{2\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,(\mathrm{F/m}) \cdot 0{,}1\,\mathrm{m}}{\ln 20} = \frac{2\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-13}}{\ln 20}\,\mathrm{F} = \underline{\underline{1{,}866\,\mathrm{pF}}}.$$

Man rechnet: Läuferstrich über 20 von LL_3. Darüber die Zunge so schieben, daß C 8,85 auch unter dem Läuferstrich steht. Über D 2 steht dann auf CF die Ziffernfolge 1–8–5–5 des Ergebnisses.

Der Rechenweg mag eigenartig anmuten. Man erkennt aber die Richtigkeit, wenn man den Rechengang einmal skizziert. ln 20 wird durch 8,85 geteilt, das Ergebnis mit einer Zahl $\frac{\mathrm{C}}{\pi}$ malgenommen, wenn man den Übergang von der Teilung CF zur Teilung C berücksichtigt. Das Ergebnis ist 2. Aus $\frac{\ln 20}{8{,}85} \cdot \frac{\mathrm{C}}{\pi} = 2$ erkennt man nach der Umstellung, daß wirklich C ausgerechnet wurde.

ÜBUNGSAUFGABEN

109. ln 620	110. ln 58	111. ln 3,42
112. ln 1,545	113. ln 1,1575	114. ln 1,0486
115. ln 1,0173		

5.7.5. Potenzen und Wurzeln mit anderen Exponenten als 2 oder 3

5.7.5.1. Potenzen und Wurzeln mit den Exponenten 10 und 100

Der Aufbau der Exponentialteilungen gibt uns sofort Möglichkeiten, die 10. Potenz und 100. Potenz bzw. die 10. Wurzel und 100. Wurzel zu bestimmen.

Beim System „Darmstadt" enthält die

Teilung LL_3 die Potenzen e^x
Teilung LL_2 die Potenzen $e^{0,1x}$
Teilung LL_1 die Potenzen $e^{0,01x}$.

Da nun $(e^{0,1x})^{10} = e^x$ und $(e^{0,01x})^{10} = e^{0,1x}$ bzw. $(e^{0,01x})^{100} = e^x$, stehen in LL_3 die 10. Potenzen aller Werte aus LL_2 und die 100. Potenzen aller Werte aus LL_1, während in LL_2 die 10. Potenzen aller Werte aus LL_1 stehen.

BEISPIELE

259. $1{,}03^{10} = \underline{\underline{1{,}344}}$ ($LL_1 \to LL_2$)
260. $1{,}344^{10} = \underline{\underline{19{,}2}}$ ($LL_2 \to LL_3$)
261. $1{,}03^{100} = \underline{\underline{19{,}2}}$ ($LL_1 \to LL_3$)

Bild 130

ÜBUNGSAUFGABEN

116. $1{,}0432^{10}$; $1{,}0432^{100}$ 117. $1{,}0845^{10}$; $1{,}0845^{100}$

Da ferner $\sqrt[10]{e^x} = e^{0,1x}$ und $\sqrt[10]{e^{0,1x}} = e^{0,01x}$ bzw. $\sqrt[100]{e^x} = e^{0,01x}$ stehen in LL_1 die 10. Wurzeln aller Werte aus LL_2 und die 100. Wurzeln aller Werte aus LL_3, während in LL_2 die 10. Wurzeln aller Werte aus LL_3 stehen.

Die folgenden Beispiele gestatten daher Ablesungen aus dem gleichen Bild 130.

BEISPIELE

$$\left.\begin{array}{ll} 262. & \sqrt[10]{19{,}2} = \underline{\underline{1{,}344}}\ (LL_3 \rightarrow LL_2) \\ 263. & \sqrt[10]{1{,}344} = \underline{\underline{1{,}03}}\ (LL_2 \rightarrow LL_1) \\ 264. & \sqrt[100]{19{,}2} = \underline{\underline{1{,}03}}\ (LL_3 \rightarrow LL_1) \end{array}\right\} \text{Bild 130}$$

265. $\sqrt[10]{200} = \underline{\underline{1{,}698}}$ 266. $\sqrt[100]{200} = \underline{\underline{1{,}0544}}$

267. $\sqrt[10]{17} = \underline{\underline{1{,}3275}}$ 268. $\sqrt[100]{17} = \underline{\underline{1{,}02875}}$

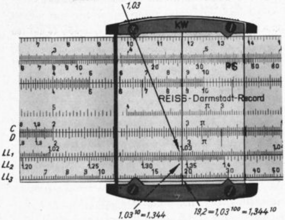


Bild 130

Bild 131 zeigt dieselbe Einstellung wie Bild 130 noch einmal mit einem Rechenstab Reiss „Duplex“. Er erlaubt auch die Bildung weiterer Potenzen, da außer den bereits besprochenen LL-Teilungen noch die Teilungen für $e^{0,001x}$ (unterhalb LL_1) und für e^{-x}, $e^{-0,1x}$, $e^{-0,01x}$ und $e^{-0,001x}$ vorhanden sind.

Wir lesen unter dem Läuferstrich ab

$$\frac{1}{19{,}2} = 0{,}052; \quad \frac{1}{\sqrt[10]{19{,}2}} = 0{,}744, \quad \frac{1}{\sqrt[100]{19{,}2}} = 0{,}97085,$$

$$\sqrt[1000]{19{,}2} = 1{,}00296, \qquad \frac{1}{\sqrt[1000]{19{,}2}} = 0{,}99705$$

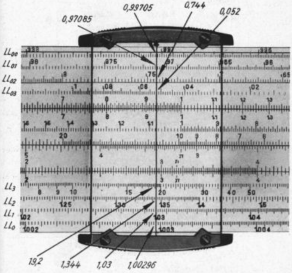


Bild 131

Bild 132 zeigt, wie aus 1,0162 gebildet werden kann:

$1{,}0162^{10} = 1{,}1743$ $(LL_1 \rightarrow LL_2)$

$1{,}0162^{100} = 4{,}98$ $(LL_1 \rightarrow LL_3)$

$\frac{1}{1{,}0162} = 0{,}98405$ $(LL_1 \rightarrow LL_{01})$

$\frac{1}{1{,}0162^{10}} = 0{,}8515$ $(LL_1 \rightarrow LL_{02})$

$\frac{1}{1{,}0162^{100}} = 0{,}20$ $(LL_1 \rightarrow LL_{03})$

$\sqrt[10]{1{,}0162} = 1{,}00161$ $(LL_1 \rightarrow LL_0)$

$\frac{1}{\sqrt[10]{1{,}0162}} = 0{,}99839$ $(LL_1 \rightarrow LL_{00})$

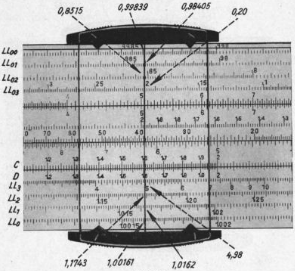


Bild 132

Entsprechend zeigt Bild 133 für 6500:

$\sqrt[10]{6500} = 2{,}405$ $(LL_3 \rightarrow LL_2)$

$\sqrt[100]{6500} = 1{,}0918$ $(LL_3 \rightarrow LL_1)$

$\sqrt[1000]{6500} = 1{,}0088$ $(LL_3 \rightarrow LL_0)$

$\frac{1}{6500} = 1{,}5 \cdot 10^{-4}$ $(LL_3 \rightarrow LL_{03})$

$\frac{1}{\sqrt[10]{6500}} = 0{,}415$ $(LL_3 \rightarrow LL_{02})$

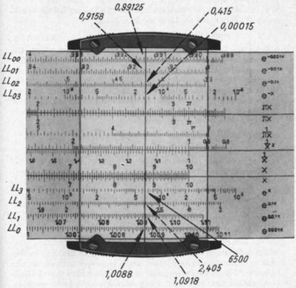


Bild 133

$$\frac{1}{\sqrt[100]{6500}} = 0{,}9158 \qquad (LL_3 \to LL_{01})$$

$$\frac{1}{\sqrt[1000]{6500}} = 0{,}99125 \qquad (LL_3 \to LL_{00})$$

5.7.5.2. Potenzen mit beliebigem Exponenten

Rechenstäbe mit den Exponentialteilungen LL erlauben auch die Berechnung von Aufgaben der Form

$$y = a^x \quad \text{und} \quad y = \sqrt[x]{a}\ (a > 0)$$

mit beliebigem x.
Wir haben (Seite 189) gesehen, daß die LL_3-Teilung mit der Grundteilung D verbunden ist durch die Beziehung

$$x = \ln y,$$

wobei x eine Zahl auf der Skale D und y eine Zahl auf der Skale LL_3 angeben. Die Skale LL_3 ist mithin (siehe Seite 182) doppeltlogarithmisch geteilt, denn die D-Skale ist ja schon einfachlogarithmisch eingeteilt. Deshalb bezeichnet man die LL-Teilungen auch als log-log-Teilungen, was auch die Abkürzung LL erklärt. Damit sind wir in der Lage, entsprechend Abschnitt 5.1. das Potenzieren und Radizieren auf Addieren und Subtrahieren mit den log-log-Teilungen zurückzuführen.

Zur Berechnung der Potenz

$$y = a^x$$

logarithmieren wir die Gleichung

$$\ln y = \ln a^x = x \ln a,$$

haben also einfachlogarithmisch eine Multiplikation des Exponenten mit dem Logarithmus der Basis durchzuführen, um den Logarithmus der Potenz zu erhalten.
Wird die logarithmierte Gleichung nochmals logarithmiert, dann erhält man

$$\lg \ln y = \lg x + \lg \ln a,$$

d. h., doppeltlogarithmisch ist der Logarithmus des Exponenten zum lg ln der Basis zu addieren, wenn man den lg ln der Potenz haben will. Nun wissen wir, daß die Grundteilungen C und D einfachlogarithmisch und die LL-Teilungen doppeltlogarithmisch geteilt sind. Ferner wissen wir, daß bei einem Rechenstab das Addieren der Logarithmen durch das Aneinanderreihen der den Logarithmen entsprechenden Strecken geschieht. Deshalb haben wir, um eine Potenz mit beliebiger Basis und beliebigem Exponenten zu berechnen, die dem Exponenten x entsprechende Strecke auf der Grundteilung D zu der der Basis a entsprechenden Strecke auf der LL-Teilung zu addieren und erhalten auf der LL-Teilung die der Potenz y entsprechende Strecke.

Hierbei sei noch bemerkt, daß die Streckenlängen auf der D-Teilung von 1 aus gezählt werden, weil $\lg 1 = 0$. Auf den LL-Teilungen zählt man die Strecken von der Marke e aus, da $\ln e = 1$ der 1 auf den Grundteilungen entspricht.
Die Berechnung der Potenzen ist bei den einzelnen Rechenstabmodellen etwas unterschiedlich, je nachdem, ob sich die LL-Teilungen auf der Zunge („Darmstadt" Holz oder Metall) oder auf dem Stabkörper (Reiss „Darmstadt"-Record und Reiss „Duplex") befinden.

BEISPIEL

269. Es ist die Potenz $3{,}35^{2,76}$ zu berechnen.
Wir verwenden zunächst einen Rechenstab, bei dem die LL-Teilungen auf der Zunge angebracht sind (Bilder 134 und 135, System „Darmstadt" Holz).
Über die 1 von D stellen wir 3,35 von der Teilung LL_3 (Bild 134). Den Läufer schieben wir über 2–7–6 der Teilung D und lesen unter dem Läuferstrich auf LL_3 das Ergebnis 28,2 (Bild 135) ab.

$$3{,}35^{2,76} = \underline{\underline{28{,}2}}$$

Wir addieren die Strecken

$$\lg \ln 3{,}35 + \lg 2{,}76 = \lg \ln 28{,}2.$$

Sie können die Richtigkeit dieser Einstellung sofort nachprüfen, wenn Sie die 3 von LL_3 über D 1 stellen. Dann lesen Sie über den Exponenten x auf D die Potenzen $y = 3^x$ ab. Machen Sie die Probe! Stellen wir die 2 von LL_2 über D 10, dann lesen wir auf LL_3 die zu den Exponenten x gehörenden Potenzen $y = 2^x$ ab (Bild 136).
Wir erkennen an diesem Beispiel, daß wir beim Bilden der Potenzen nicht auf die Teilung LL_3 beschränkt sind. Es sind auch Werte von LL_2 und LL_1 als Basis möglich. Ferner erkennen wir, daß wir auch hier die Strecken von rechts nach links zusammensetzen können. Es ist nur notwendig, daß zu einer lg-ln-Strecke eine lg-Strecke addiert und auf einer lg-ln-Teilung abgelesen wird. Auf welcher LL-Teilung das Ergebnis abzulesen ist, klärt man zweckmäßigerweise durch eine Überschlagsrechnung.

ÜBUNGSAUFGABEN

118. $4{,}6^{1,9}$
119. $1{,}94^{4,1}$
120. $9{,}5^{3,32}$
121. $1{,}20^{22,4}$

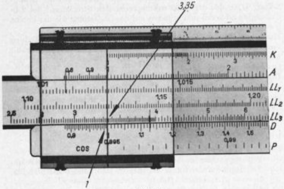


Bild 134

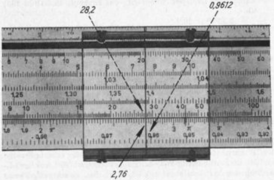


Bild 135

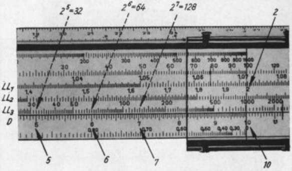


Bild 136

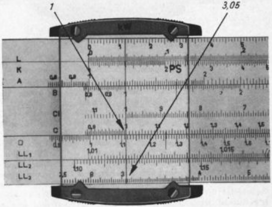


Bild 137

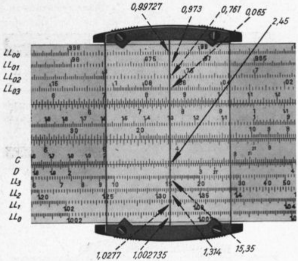


Bild 138

Beim Modell „Darmstadt“ aus Metall stellen wir den Läufer auf der Vorderseite über D 1 und verschieben die Zunge nun so, daß die Basis von einer LL-Teilung unter dem rückwärtigen Läuferstrich steht. Jetzt können wir mit dem Läufer auf der Vorderseite auf D jeden gewünschten Exponenten einstellen und auf der Rückseite wieder unter dem Läuferstrich auf einer LL-Teilung die zugehörende Potenz ablesen. Etwas anders haben wir zu verfahren, wenn der Stabkörper die LL-Teilungen trägt. Dann wird auf einer LL-Teilung die Basis mit dem Läuferstrich eingestellt und C 1 der Zunge daruntergeschoben. Unter jedem auf C eingestellten Exponenten finden wir dann auf LL die zugehörende Potenz. Sie erkennen, daß die Reihenfolge der Summation unverändert geblieben ist; zu einer lg-ln-Strecke (jetzt aber unten auf dem Stabkörper) wird eine lg-Strecke (jetzt auf der Zunge) addiert.

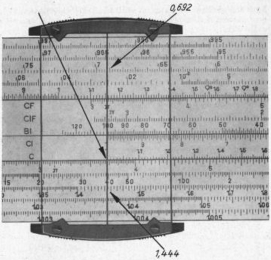


Bild 139

Bei modernen Rechenstäben, wie z. B. Reiss „Duplex“ sind die Rechenmöglichkeiten noch umfangreicher.
Angenommen, es soll die Aufgabe $3{,}05^{2,45}$ gerechnet werden. Über die Basis 3,05 auf der Teilung LL_3 (Bild 137) wird die 1 der Teilung C geschoben. Damit ist bereits eine Tabelle für $y = 3{,}05^x$ entstanden, denn auf C sind nun alle Werte für x enthalten, und y kann man auf den entsprechenden LL-Teilungen entnehmen. Für $x = 2{,}45$ (Bild 138) ergeben sich damit folgende Werte:

$3{,}05^{2,45}$	$=$	15,35	(auf LL_3)
$3{,}05^{0,245}$	$=$	1,314	(auf LL_2)
$3{,}05^{0,0245}$	$=$	1,0277	(auf LL_1)
$3{,}05^{0,00245}$	$=$	1,002735	(auf LL_0)
$3{,}05^{-2,45}$	$=$	0,065	(auf LL_{03})
$3{,}05^{-0,245}$	$=$	0,761	(auf LL_{02})
$3{,}05^{-0,0245}$	$=$	0,973	(auf LL_{01})
$3{,}05^{-0,00245}$	$=$	0,99727	(auf LL_{00})

Nach dem gleichen Verfahren ist auf Bild 139 C 1 über 1,444 auf LL_2 geschoben. Auf Bild 140 ist $x = 2{,}62$, und es ergibt sich damit für y der Wert:

$1{,}444^{2,62} = 2{,}62$ auf der LL_2-Skale

und $1{,}444^{-2,62} = 0{,}382$ auf der LL_{02}-Skale.

Der gleiche Exponent 2,62 gilt aber auch für die auf Bild 139 oben (auf LL_{02}) eingestellte Basis 0,692. Man kann also auch schreiben:

$0{,}692^{2,62} = 0{,}382$

und $0{,}692^{-2,62} = 2{,}62.$

Folgende Regeln sind dabei zu beachten:

1. Basen größer als 1 werden auf den unteren LL-Teilungen eingestellt, Basen kleiner als 1 auf den oberen LL_0-Teilungen.
2. Sind die Exponenten positiv, dann wird das Ergebnis auf der gleichen Teilungsgruppe entweder oben oder unten abgelesen.

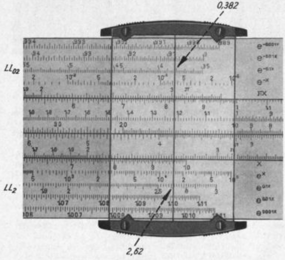


Bild 140

Bei negativen Exponenten dagegen muß zur anderen Teilungsgruppe übergegangen werden, von der oberen zur unteren oder umgekehrt.

5.7.5.3. Wurzeln mit beliebigem Exponenten

Zur Berechnung der Wurzel

$$y = \sqrt[x]{a}$$

logarithmieren wir die Gleichung

$$\ln y = \ln \sqrt[x]{a} = \frac{1}{x} \ln a = \frac{\ln a}{x},$$

haben also einfachlogarithmisch eine Division des Logarithmus der Basis durch den Exponenten durchzuführen, um den Logarithmus der Wurzel zu erhalten.
Wird die logarithmierte Gleichung nochmals logarithmiert, dann erhält man

$$\lg \ln y = \lg \ln a - \lg x,$$

d.h., doppeltlogarithmisch ist der lg des Exponenten vom lg ln der Basis abzuziehen, wenn man den lg ln der Wurzel haben will.
Entsprechend den obigen Ausführungen haben wir, wenn eine beliebige Wurzel aus einer beliebigen positiven Basis gezogen werden soll, von der Strecke, die dem lg ln der Basis entspricht, die Strecke abzuziehen, die dem lg des Exponenten entspricht. Von einer Strecke auf einer LL-Teilung ist, wenn diese auf der Zunge liegt, eine Strecke auf der Grundteilung D abzuziehen. Das Ergebnis steht dann auf der LL-Teilung. Sind die LL-Teilungen auf dem Stabkörper, dann ist, um wieder auf LL ablesen zu können, eine Strecke der C-Teilung abzuziehen.

BEISPIELE

270. Es ist die Wurzel $\sqrt[4,75]{26{,}5}$ zu berechnen (Bilder 141 und 142, System „Darmstadt").
Über 4–7–5 von D stellen wir 26,5 von LL_3 (Bild 141). Über D 1 ist kein Ergebnis ablesbar, deshalb lesen wir über D 10 auf LL_2 das Ergebnis 1,993 ab (Bild 142).

$$\sqrt[4,75]{26{,}5} = \underline{\underline{1{,}993}}$$

Wir subtrahieren die Strecken

$$\lg \ln 26{,}5 - \lg 4{,}75 = \lg \ln 1{,}993.$$

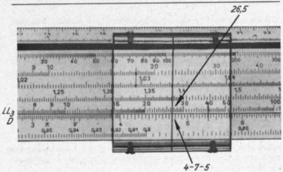


Bild 141

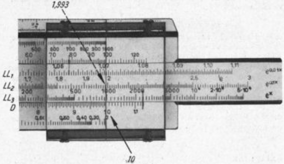


Bild 142

Da die LL_3-Teilung 1,993 nicht enthält, lesen wir über D 10 auf LL_2 ab. Halten wir mit dem Läufer e auf LL_2 fest (etwa über D 1–4–5) und setzen die Zunge um, so daß das rechte Ende unter den Läuferstrich kommt, dann steht über D 1 auf LL_2 das Ergebnis 1,993.

Sie können die Richtigkeit dieser Einstellung sofort nachprüfen, wenn Sie die 3 von LL_3 über D 10 stellen. Dann lesen Sie über den Wurzelexponenten x auf D die Radikanden ab, die mit dem Wurzelexponenten x den Wurzelwert 3 ergeben (Bild 143).

271. $\sqrt[1{,}65]{75} = \underline{\underline{13{,}7}}$ 272. $\sqrt[1{,}85]{36} = \underline{\underline{6{,}93}}$

273. $\sqrt[2{,}45]{1{,}645} = \underline{\underline{1{,}2255}}$ 274. $\sqrt[4{,}28]{6000} = \underline{\underline{7{,}62}}$

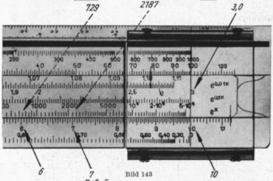


Bild 143

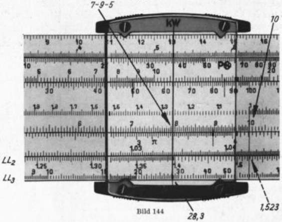


Bild 144

Auch hier ergeben sich bei den modernen Rechenstäben weitere Möglichkeiten. Wir wollen noch ein Beispiel mit dem Rechenstab „Duplex" zeigen.

BEISPIEL

275. Es soll berechnet werden $\sqrt[7,95]{28,3}$.

Bild 144 zeigt, wie 7–9–5 von C über den Radikanden 28,3 auf LL_3 geschoben wird. Das Ergebnis lesen wir unter C 10 auf LL_2 ab. Wir erhalten (Bild 145):

$$\sqrt[7,95]{28,3} = \underline{\underline{1,523}}.$$

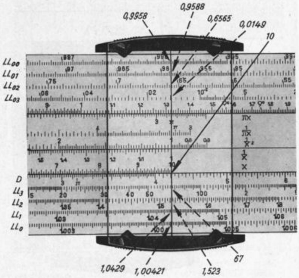


Bild 145

Dieselbe Einstellung gibt aber noch weitere Rechenergebnisse, nämlich

$\sqrt[0,795]{28,3} = 67,$ das wir auf LL_3

$\sqrt[79,5]{28,3} = 1,0429,$ das wir auf LL_1 und

$\sqrt[795]{28,3} = 1,00421,$ das wir auf LL_0 ablesen.

Die anderen LL-Teilungen zeigen die Ergebnisse der reziproken Wurzelausdrücke:

$$\frac{1}{\sqrt[0,795]{28,3}} = 0,0149 \qquad \frac{1}{\sqrt[7,95]{28,3}} = 0,6565$$

$$\frac{1}{\sqrt[79,5]{28,3}} = 0,9588 \qquad \frac{1}{\sqrt[795]{28,3}} = 0,9958.$$

5.7.5.4. Vereinigtes Potenzieren und Radizieren mit beliebigem Exponenten

In den beiden vorangegangenen Abschnitten hatten wir gezeigt, wie man mit dem Rechenstab Potenzen bzw. Wurzeln bei beliebigen Exponenten berechnen kann. In der Praxis kommen jedoch auch Rechnungen der Art

$$z = a^{x/y} = \sqrt[y]{a^x} = \left(\sqrt[y]{a}\right)^x$$

vor, in denen Wurzeln mit beliebigen Exponenten aus Potenzen mit beliebigen Exponenten zu ziehen sind.
Nicht immer wird es so einfach sein wie bei

$$\sqrt[3]{8^2} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = (2)^2 = 4.$$

Diese Rechnung hätten wir auch mit den Teilungen A und K ausführen können, wie im Abschn. 5.4.3. beschrieben wurde.

BEISPIEL

276. Es ist $z = \sqrt[4,5]{9,7^{2,6}} = \left(\sqrt[4,5]{9,7}\right)^{2,6}$ zu berechnen.

Man stellt den Läuferstrich über 9,7 von LL_3 und verschiebt die Zunge so, daß 4,5 von C auch unter dem Läuferstrich steht. Dann hat man unter C 10 die 4,5. Wurzel gezogen, wenn man auf LL_2 abliest. Da dieses Zwischenergebnis noch zu potenzieren ist, verschiebt man jetzt den Läufer über 2,6 der Teilung C und liest jetzt unter dem Läuferstrich auf LL_3 das Ergebnis $z = 3{,}72$ ab.

$$\sqrt[4{,}5]{9{,}7^{2{,}6}} = \underline{\underline{3{,}72}}$$

Hier brauchte die Zunge nicht umgesetzt zu werden. In solchen Fällen ist es zweckmäßiger, mit dem Ziehen der Wurzel zu beginnen. Muß aber die Zunge umgesetzt werden, wie z. B. bei

$$\sqrt[6{,}45]{5{,}35^{3{,}15}} = 2{,}268,$$

dann hätte man auch zunächst die 3,15. Potenz bilden und dann erst die 6,45. Wurzel ziehen können.
Die Berechnungen liefern keine neuen Gesichtspunkte. Man braucht nur das Potenzieren und Radizieren in beliebiger Reihenfolge nacheinander auszuführen. Welche Rechenoperation zuerst vorzunehmen ist, entscheidet die Aufgabe. Man muß aber beachten, auf welcher LL-Teilung abzulesen ist. Das klärt man am besten durch eine Überschlagsrechnung. In beiden obigen Beispielen erhält man beim Kürzen der gerundeten Exponenten einen Gesamtexponenten von $\frac{1}{2}$. Das heißt, daß das Ergebnis in der Größenordnung der Quadratwurzel aus dem Radikanden liegen muß.

ÜBUNGSAUFGABEN

122. $\sqrt[0{,}83]{15{,}2^{2{,}7}}$ 123. $\sqrt[1{,}96]{42^{0{,}61}}$

124. $\sqrt[2{,}75]{1{,}26^{7{,}55}}$ 125. $\sqrt[5{,}43]{1{,}05^{0{,}87}}$

5.7.5.5. Logarithmieren mit beliebiger Basis

Im Abschn. 5.7.5.2. war von der Gleichung

$$y = a^x$$

ausgegangen worden. Liest man sie anders, dann kann man sagen: x ist der Exponent (Logarithmus) zur Basis a. Man schreibt dies

$$x = \log_a y.$$

Wir hatten im Abschnitt 2.3. darauf hingewiesen, daß es beliebig viele Logarithmensysteme gibt, und hatten neben den dekadischen und natürlichen Logarithmen noch die zur Basis 2 angeführt. Es könnte jetzt z. B. die Frage auftauchen, wie groß ist

$$x = \log_5 625?$$

Wir können die Rechnung umschreiben in

$$5^x = 625$$

und als Potenzrechnung auffassen.
Stellt man C 1 über 5,0 von LL_3 und verschiebt den Läuferstrich bis 625 von LL_3, dann liest man auf C unter dem Läufer den gesuchten Logarithmus 4 ab. Es ist mithin

$$x = \log_5 625 = 4.$$

Damit ist aber bereits der Weg für die Berechnung der Logarithmen bei einer beliebigen Basis gegeben. Man stellt C 1 oder C 10 über die Basis des Systems und liest über dem Potenzwert auf einer LL-Teilung auf C den gesuchten Logarithmus ab.

5.8. Hyperbelfunktionen

Die Exponentialfunktionen e^x und e^{-x} kommen in der höheren Mathematik in der Kombination als halbe Summe bzw. halbe Differenz vor. Da die Ausdrücke zur gleichseitigen Hyperbel in einer ähnlichen Beziehung stehen wie die Winkelfunktionen zum Kreis, werden sie „Hyperbelfunktionen" genannt und haben folgende Bezeichnung erhalten:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Den Zusammenhang der Winkelfunktion über die Kreisgleichung erkennen wir aus $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, während sich der Zusammenhang der Hyperbelfunktionen mit der Hyperbel aus

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

ergibt.
Es gilt nämlich

$$\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4} - \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4} = \frac{2+2}{4} = 1.$$

Wie bei den Winkelfunktionen definiert man Hyperbeltangens als den Quotienten $\dfrac{\sinh x}{\cosh x}$:

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

und den Hyperbelcotangens als

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{\frac{e^x + e^{-x}}{2}}{\frac{e^x - e^{-x}}{2}} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

Will man mit Rechenstäben vom Modell „Darmstadt“ die Hyperbelfunktionen bestimmen, dann müssen zunächst die Werte für e^x, dann mit den Skalen C, D oder CI die für e^{-x} ermittelt werden, damit entsprechend den oben angegebenen Gleichungen die halben Summen, halben Differenzen oder die Quotienten aus den Summen und Differenzen gebildet werden können.

Bei dieser umständlichen Berechnungsart gehen die Vorteile des Rechenstabes verloren, denn die Addition oder Subtraktionen bedingen eine Unterbrechung der Rechenstabarbeit und erfordern meist eine schriftliche Nebenrechnung.

Vorteilhafter ist die Verwendung eines Rechenstabes vom Modell „Duplex“. Dieser enthält die Werte für e^x und e^{-x}. Es entfällt die Kehrwertbildung. Die Summen- oder Differenzbildung ist aber nicht zu vermeiden. Deshalb hat man für die Hyperbelfunktionen einen besonderen Rechenstab konstruiert.

Der Rechenstab „Duplex“ hat 3 Teilungen mit hyperbolischen Funktionen: Zwei Teilungen für die Sinusfunktion, mit Sh_1 und Sh_2 bezeichnet, und eine Teilung für die Tangensfunktion Th. Diese Teilungen beziehen sich alle auf die Grundteilung D.

Sh_2 gibt Argumente von 0,85 bis 3,0,
Sh_1 gibt Argumente von 0,1 bis 0,9,
Th gibt Argumente von 0,1 bis 3,0.

Mit den Teilungen Sh und Th kann wie mit gewöhnlichen Teilungen beliebig multipliziert und dividiert werden.

Für alle in der Teilung Sh_1 eingestellten Argumente x von 0,1 bis 0,881 können der Teilung D die Funktionswerte $\sinh x$ (von 0,1 bis 1,0) entnommen werden.

Mit Hilfe der Fortsetzungsteilung Sh_2 ergeben sich entsprechend für die Argumente von 0,881 bis 3,0 die Funktionswerte $\sinh x$ von 1 bis 10.

Für $x > 3$ gilt $\sinh x \approx \frac{e^x}{2}$

für $x < 0{,}1$ gilt $\sinh x \approx x$.

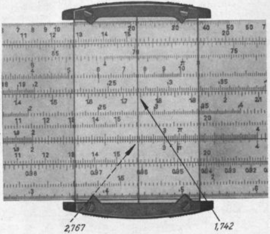


Bild 146

In Bild 146 ist das Beispiel sinh 1,742 = 2,767 eingestellt (1,742 auf Sh_2, Ablesung 2–7–6–7 auf D, die Zunge steht in Normalstellung). Es wird also wie bei einem Nomogramm abgelesen.

Die Teilung Th ermöglicht die Bestimmung der Tangenswerte tanh. Sie gilt für Argumente x von 0,1 bis 3,0, zu denen auf D die entsprechenden Funktionswerte $\tanh x$ (von 0,1 bis 0,995) abgelesen werden können.

Für $x > 3$ gilt $\tanh x \approx 1 - 2 \cdot e^{-2x} \approx 1$.

Für $x < 0{,}1$ gilt $\tanh x \approx x$.

Bild 147 zeigt das Beispiel tanh 1,614 = 0,924.

In den Bildern 148 und 149 ist dargestellt, wie die Berechnung der Cosinusfunktion $\cosh x$ nach der Gleichung $\cosh x = \frac{\sinh x}{\tanh x}$ erfolgen kann.

Die Aufgabe lautet:

$$\cosh 1{,}35 = \frac{\sinh 1{,}35}{\tanh 1{,}35}.$$

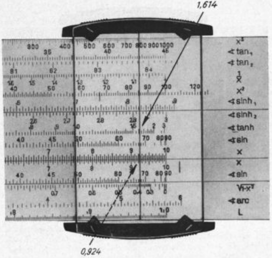


Bild 147

Zunächst wird bei der Zunge in Normalstellung der Läuferstrich über 1,35 von Sh_2 geschoben (Bild 148). Man liest auf C und D sinh 1,35 = 1,80 ab. Dann verschiebt man die Zunge so, daß 1,35 von Th ebenfalls unter dem Läuferstrich steht (Bild 149). Danach liest man ab unter dem Strich auf C tanh 1,35 = 0,873 und unter C 10.

$$\cosh 1{,}35 = \frac{\sinh 1{,}35}{\tanh 1{,}35} = \frac{1{,}80}{0{,}873} = 2{,}06.$$

Die Cosinusfunktion kann aber auch nach der Gleichung

$$\cosh x = \sqrt{\sinh^2 x + 1}$$

bestimmt werden.

Man geht von der Teilung Sh_1 oder Sh_2, auf der x abzulesen ist, nach der Teilung A, vermehrt den dort gefundenen Wert um 1, stellt den Läuferstrich über den neuen Wert auf A und liest dann auf D den cosh x ab.

Überprüfen Sie die Einstellmöglichkeit am obigen Beispiel!

Teilt man $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ durch $\cosh^2 x$, dann ist $1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$ oder $\cosh^2 x = \frac{1}{1 - \tanh^2 x}$, also

$$\cosh x = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 x}}.$$

Diese Gleichung erlaubt eine dritte Berechnung der Werte für cosh x. Stellt man den Läuferstrich über tanh x, dann liest man auf der Teilung P sofort $\sqrt{1 - \tanh^2 x}$ ab. Stellt man den gefundenen Wert auf C ein, dann hat man auf CI den gesuchten Wert für cosh x. Alle diese Rechnungen führt man bei der Zunge in Normalstellung aus. Überprüfen Sie auch hier, ob Sie beim obigen Beispiel zum gleichen Ergebnis kommen!

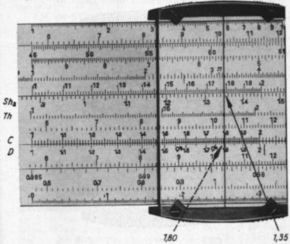


Bild 148

Diese beiden Berechnungsarten mit den Teilungen A oder P mußten gezeigt werden, weil nur mit ihnen aus gegebenen cosh-Werten die Argumente berechnet werden können. Das ist mit dem Quotienten $\sinh x/\tanh x$ nicht möglich.
Die Berechnung erfolgt gewissermaßen rückwärts. Von dem gegebenen cosh-Wert bildet man das Quadrat, vermindert es um 1, stellt auf A neu ein und liest auf Sh_1 oder Sh_2 den gesuchten Wert für das Argument ab.

BEISPIELE

277. Aus $\cosh x = 2{,}4$ ergibt sich $x = 1{,}522$, weil man rechnet:

$$C\,2{,}4 \rightarrow A\,5{,}76 \rightarrow A\,4{,}76 \rightarrow Sh_2\,1{,}522.$$

Der oben angegebene dritte Weg ist nur dann zu empfehlen, wenn $\cosh x < 2{,}0$, sonst ist die Teilung P zu ungenau.

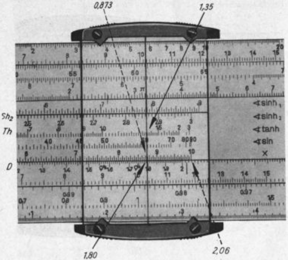


Bild 149

278. Der Kennwiderstand Z eines Vierpols in Dreieckschaltung läßt sich nach der Gleichung

$$Z = \sqrt{\frac{R}{G}} \cdot \frac{1}{\cosh \frac{b}{2}} \text{ bestimmen.}$$

Wie groß ist der Widerstand Z für $R = 10^3\,\Omega$, $G = 10^{-3}\,\mathrm{S}$ und $b = 1{,}5$ Neper?

$$Z = \sqrt{10^3 \cdot 10^3}\,\frac{1\,\Omega}{\cosh \frac{1{,}5}{2}} = 10^3 \cdot \frac{1}{\cosh 0{,}75}\,\Omega$$

$$\cosh 0{,}75 = 1{,}295$$

$$Z = \frac{1000}{1{,}295}\,\Omega = \underline{\underline{772\,\Omega}}$$

Entsprechend den obigen Ausführungen kann man die Rechnung $\frac{1000}{\cosh 0{,}75}$ mit einer Läufereinstellung erledigen. Man stellt ihn über 0,75 von Th und liest auf P die Ziffernfolge 7–7–2 ab.

279. Ein in Dreieck geschalteter Vierpol hat einen Kennwiderstand $Z = 1000\,\Omega$. Die Dämpfung beträgt 2 Neper. Wie groß sind der Längswiderstand R und der Leitwert G (Querwiderstand)?

a) Für den Längswiderstand R ergibt sich

$$R = Z \sinh b = 10^3 \sinh 2\,\Omega = $$
$$= 10^3 \cdot 3{,}63\,\Omega = \underline{\underline{3630\,\Omega}}.$$

b) Für den Leitwert G ergibt sich

$$G = \frac{2}{Z} \tanh \frac{b}{2} = 2 \cdot 10^{-3} \tanh 1\,\Omega^{-1} = \underline{\underline{1\,524 \cdot 10^{-3}\,\Omega^{-1}}}.$$

5.9. Verwendung der versetzten Teilungen CF, DF und CIF

In der Technik kommen viele Rechnungen vor, bei denen π als Faktor auftritt. Zur Erleichterung sind besondere Teilungen entwickelt worden, die den Faktor π berücksichtigen. So haben die Rechenstäbe „Darmstadt-Record" und „Duplex" noch Teilungen, die um π versetzt sind, sonst aber wie die Grundteilungen C und D aufgebaut sind. Diese Teilungen CF und DF stehen auf der Zunge bzw. auf dem Stabkörper, und zwar so, daß man über C 1 bzw. D 1 jeweils π abliest. Auf diese Weise sind Multiplikationen und Divisio-

nen mit und durch π, ohne daß die Zunge benutzt werden muß, möglich. Bild 150 zeigt diese Teilungen. Die Teilungen C und CF sind vielfach mit einem gelben Untergrund versehen worden. Das geschieht vor allem deshalb, weil bei den Grundteilungen C über D steht, während bei den verschobenen Teilungen DF über CF steht. Man geht mithin, wenn man mit allen vier Teilungen arbeitet, immer von C nach D oder von CF nach DF, wenn man von einer gelben zu einer weißen Teilung geht.
Bild 151 zeigt ein einfaches Rechenbeispiel, bei dem die Zunge bündig steht (C 1 über D 1).
Es soll der Umfang eines Kreises mit dem Durchmesser $2r = 3{,}67$ cm berechnet werden.

$$U = 2\pi \cdot r = 11{,}54 \text{ cm}$$

Das Ergebnis steht über 3,67 von D auf der Skale DF.
Diese Rechnung ist verallgemeinerungsfähig.
Zu allen Durchmessern von Kreisen auf D stehen in der Teilung DF genau darüber die Umfänge der Kreise.
Sehen wir uns ein weiteres Beispiel an!

BEISPIEL

280. Von einer Reihe gerader Kreiskegel, die alle den gleichen Grundkreisradius $r = 1{,}44$ cm haben, seien bei verschiedenen Längen der Mantellinie s die Mantelflächen zu bestimmen.
Wegen $M = \pi r s$ sind die Werte für M auf der Teilung DF sofort ablesbar, wenn C 1 über 1–4–4–0 von D gestellt wird und von den s-Werten von C nach DF übergegangen wird. Man hat die Multiplikation mit r und s normal ausgeführt und durch den Teilungswechsel von C nach CF noch den Faktor π hinzugenommen.

Es ergeben sich für $r = 1{,}44$ cm und

s/cm:	2,0	2,91	3,95	4,85	6,15	7,43
M/cm²:	9,06	13,17	17,88	21,95	27,85	33,65

Genauso wie man beim Übergang von C und D nach CF und DF eine Multiplikation mit π ausführt, ist es möglich, durch einen Übergang von CF und DF nach C und D eine Division mit π durchzuführen.
Betrachten wir das einfache Beispiel, daß aus dem Umfang eines Kreises der Durchmesser bestimmt werden soll! Dann wäre wegen

$$\frac{U}{\pi} = 2r$$

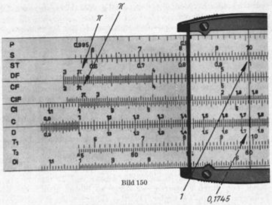


Bild 150

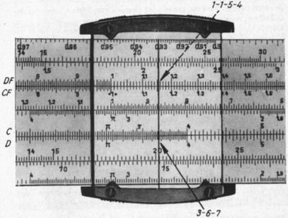


Bild 151

entweder eine Division mit π notwendig oder Übergang vom DF nach D durchzuführen.
Es gehören mithin zu den Kreisumfängen U die Durchmesser $2r$ entsprechend der Tabelle

U/cm:	4,0	5,82	10,1	15,45	20,3
$2r$/cm:	1,273	1,85	3,21	4,92	6,46

Damit ist aber nur ein Vorteil der um π versetzten Teilungen genannt. Vielleicht noch wesentlicher ist, daß die Benutzung der CF- und DF-Teilungen ein Verschieben der Zunge erspart und damit die Genauigkeit des Stabrechnens erhöht.
Nehmen wir als einfachstes Beispiel an, es seien beim Aufstellen einer Tabelle alle möglichen Vielfachen von $a = 3{,}1$ zu bilden! Dann wird man C 1 über 3–1–0–0 von D stellen und unter den Faktoren auf C die Vielfachen von 3,1 auf D ablesen.
Das ist aber, wenn man von der Verlängerung der D-Teilung nach rechts absieht, nur bis zum 3,23-fachen von a möglich. Größere Vielfache, von 3,3 bis 10 und dann wieder von 33 bis 100 usw., wären nur durch Umsetzen der Zunge zu bilden. Hier helfen die Teilungen DF und CF weiter. Da diese Teilungen um π verschoben sind, ist der Raum, in dem die Faktoren ohne Zungenverstellung gewählt werden können, gerade der Bereich von 3 bis 10, der auf der C-Teilung rechts überstand.
Damit können alle Produkte mit $a = 3{,}1$ gebildet werden. Liegt die Ziffernfolge des Faktors zwischen 1 und 3, dann wird in unserem Falle mit C und D gerechnet. Ist dagegen die Ziffernfolge des Faktors zwischen 3 und 10, dann sind die Produkte auf CF und DF ablesbar.
Der große Vorteil ist ersichtlich. Wird bei einer Produktbildung eine Umsetzung der Zunge nötig, weil sonst das Produkt nicht mehr ablesbar ist, dann wird mit den Teilungen CF und DF weiter gerechnet, bis eine Rückkehr nach C und D möglich oder notwendig ist. Dabei muß noch folgendes beachtet werden: Die 1 von CF, die man zur Einstellung bei einer Multiplikation oder zum Ablesen bei einer Division braucht, steht in der Mitte der um π verschobenen Teilungen.
Sie überzeugen sich leicht, wenn Sie z. B. $4 \cdot 3 = 12$ rechnen, indem Sie C 10 über D 4–0–0 stellen, daß auch CF 1 unter DF 4–0–0 steht und über CF 3 dasselbe Ergebnis ablesbar ist.
Der Vollständigkeit wegen sei hier noch darauf hingewiesen, daß auch die ST-Teilung, mit der wir die Bogen kleiner Winkel berechneten, gegenüber den Grundteilungen C und D um $\frac{\pi}{180}$ versetzt ist.

Beim Übergang von ST nach C bzw. D verwandelt man das Gradmaß ins Bogenmaß. Beim Bild 150 steht der Läuferstrich über der 1 der ST-Teilung. Wir lesen deshalb für 1° (auf ST) auf C bzw. D das zugehörende Bogenmaß von 0,01745 ab.
Diese Rechnung gilt nicht nur für die auf der ST-Teilung angegebenen Winkelwerte, sondern auch für die 10- oder 100fachen Werte. Wir haben dann die auf C oder D abgelesenen Bogen gleichfalls mit 10 oder 100 zu multiplizieren.

5.10. Rechnen mit festen Marken

5.10.1. Feste Marken auf Stabkörper und Zunge

5.10.1.1. Feste Marke π

Fast alle Rechenstäbe haben eine besondere Marke für den Zahlenwert von π.
Die Bilder 152 und 153 zeigen den Rechenstab System „Rietz". Die Marke für π ist auf allen Teilungen (A, B, C und D) vorhanden. Bei Rechnungen, in denen der Faktor π auftritt, ist diese feste Marke und nicht der nur grobe Näherungswert 3,14 zu verwenden.

5.10.1.2. Feste Marke ϱ' für Winkelminuten

Auf der Normalteilung C (manchmal auch auf D) befindet sich zwischen 34 und 35 eine Marke ϱ' (Bild 153). Sie dient der Umrechnung der in Minuten gegebenen Winkelmaße in die entsprechenden Bogenmaße. Da für Winkel unter 34′ innerhalb der Rechengenauig-

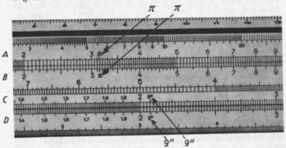


Bild 152

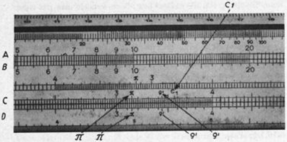


Bild 153

keit des Stabes das Bogenmaß, die Werte der Sinus- und der Tangensfunktion gleich sind, kann man für $0° \leq x \leq 34'$ setzen

$$\sin x = \tan x = \operatorname{arc} x.$$

Die Umrechnung der Gradmaße in die Bogenmaße erfolgt durch die Proportion

$$\frac{\operatorname{arc} x}{x'} = \frac{\pi}{180 \cdot 60'}$$

$$\operatorname{arc} x = \frac{\pi}{180 \cdot 60'} \, x' = \frac{x'}{3437{,}7'}.$$

Die feste Marke ϱ' steht bei 3–4–3–8. Führen wir die Division dadurch aus, daß wir ϱ' von der C-Teilung über den Minutenwert des Winkels auf der D-Teilung stellen, dann lesen wir unter C 10 auf D das zugehörende Bogenmaß ab.

BEISPIEL

281. Wir wollen sin 15' bestimmen.
Die Marke ϱ' stellen wir über 15 auf D. Unter C 10 lesen wir auf D die Ziffernfolge 4–3–6 ab.

$$\operatorname{arc} 15' = \tan 15' = \sin 15' = \underline{\underline{0{,}00436}}$$

5.10.1.3. Feste Marke ϱ'' für Winkelsekunden

Auf der Normalteilung C (manchmal auch auf C und D) befindet sich zwischen 2 und 21 eine Marke ϱ'' (Bild 152). Sie dient der Umrechnung der in Sekunden angegebenen Winkelwerte in die entsprechenden Bogenmaße. Hierbei gilt die Proportion

$$\frac{\operatorname{arc} x}{x''} = \frac{\pi}{180 \cdot 60 \cdot 60''}$$

$$\operatorname{arc} x = \frac{\pi}{180 \cdot 60 \cdot 60''} \cdot x'' = \frac{x''}{206\,260''}.$$

Die feste Marke ϱ'' steht bei 2–0–6–3. Dividieren wir wieder dadurch, daß wir ϱ'' von C über den Winkelwert in Sekunden auf D stellen, dann lesen wir unter C 1 oder C 10 auf D das Bogenmaß ab.

BEISPIEL

282. Wie groß ist sin 38''?
Wir stellen die Marke ϱ'' über 38 auf D und lesen unter C 1 auf D ab:

$$\sin 38'' = \tan 38'' = \operatorname{arc} 38'' = \underline{\underline{0{,}0001843}}$$

5.10.1.4. Feste Marke $\varrho_{,,}$ für Neusekunden

Bei manchen Rechenstäben ist eine entsprechende Marke für Neusekunden angebracht. Sie liegt zwischen den Teilstrichen für 6 und 7 (Bild 154). Der Wert von ϱ'' ergibt sich aus der Proportion

$$\frac{\operatorname{arc} x}{x^{cc}} = \frac{\pi}{200 \cdot 100 \cdot 100^{cc}}$$

$$\operatorname{arc} x = \frac{\pi}{200 \cdot 100 \cdot 100^{cc}} \cdot x^{cc} = \frac{x^{cc}}{636\,620^{cc}}.$$

Die Verwendung ist der der Marke ϱ'' entsprechend.

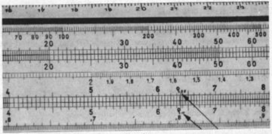


Bild 154

5.10.1.5. Feste Marke C

Auf Bild 102 (Seite 150) finden wir auf der Zunge bei 11 der C-Teilung eine feste Marke. Sie ist mit C bezeichnet und dient der Berechnung von Kreisflächen aus den Kreisdurchmessern. Stellt man C über die Ziffernfolge des Durchmessers auf der D-Teilung, dann ist über B 1 auf der A-Teilung die zugehörige Kreisfläche abzulesen. Wie ist diese feste Marke entstanden?
Der Inhalt einer Kreisfläche berechnet sich aus dem Durchmesser d

zu $A = \frac{\pi}{4} d^2 \approx 0{,}7854 \cdot d^2 = (\sqrt{0{,}7854}\, d)^2$.

Beim Stabrechnen sind die Divisionen den Multiplikationen vorzuziehen, da jederzeit ein Ergebnis ablesbar ist, während bei Multiplikationen manchmal die Zunge umgesetzt werden muß. Deshalb schreiben wir

$$A \approx \frac{d^2}{\dfrac{1}{0{,}7854}} \approx \frac{d^2}{1{,}273} = \left(\frac{d}{\sqrt{1{,}273}}\right)^2 \approx \left(\frac{d}{1{,}128}\right)^2.$$

Die Marke C hat den Wert

$$\mathrm{C} = \sqrt{\frac{4}{\pi}} \approx 1{,}128.$$

Mithin ist die feste Marke C zu verwenden nach

$$A = \left(\frac{d}{\mathrm{C}}\right)^2.$$

Man teilt den Durchmesser durch C und bildet dann das Quadrat. Eine entsprechende Berechnung erlaubt uns auch eine weitere feste Marke C_1 auf der Zunge (vgl. 5.10.1.6.) und eine feste Marke auf dem Läufer (vgl. 5.10.2.1.).
Hier ist darauf hinzuweisen, daß die festen Marken C, C_1 und die auf dem Läufer der Berechnung der Kreisflächen dienen. Das darf nicht verwechselt werden mit den Teilungen CF und DF, mit denen Kreisumfänge berechnet werden können.

5.10.1.6. Feste Marke C_1

Auf Bild 153 finden wir außerdem noch eine feste Marke C_1. Sie steht auf der C-Teilung etwa bei 35 und dient ebenfalls der Berechnung von Kreisflächen aus dem Durchmesser der Kreise.
Wir hatten in 5.10.1.5. die Marke C kennengelernt, mit der man die gleichen Rechnungen durchführen kann. Die Marke C hat den Wert

$\sqrt{\frac{4}{\pi}} \approx 1{,}128$. Bei der Berechnung der Kreisflächen muß ein Übergang zu der Teilung A erfolgen. Wir hatten aber bereits früher auseinandergesetzt, daß man auf A und B auf der linken und auf der rechten Hälfte dieselben Ziffernfolgen ablesen kann. Wenn nun bei der Verwendung der Marke C die Ziffernfolge für die Kreisfläche über B 1 auf A abgelesen wird, dann steht dieselbe Ziffernfolge auch über B 10. Da die Marke C ziemlich am Anfang der Teilung C liegt, muß die Zunge unter Umständen weit nach rechts herausgeschoben werden. Das läßt sich mit der Marke C_1 vermeiden. Man gab der Marke C_1 den Wert $\sqrt{\frac{40}{\pi}} \approx 3{,}57$ und arbeitet mit ihr genau wie mit der Marke C. Die Ziffernfolge der Kreisfläche liest man über B 10, B 1 oder B 100 auf A ab.

BEISPIEL

283. Wir berechnen den Inhalt eines Kreises mit dem Durchmesser $d = 6$ cm.
Über 6–0–0 von D steht C_1 von der Teilung C. Über B 1 lesen wir die Ziffernfolge 2–8–2–5 für das Ergebnis ab. Die Rechnung ergibt

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi}{4}\,(6\ \mathrm{cm})^2 = 28{,}25\ \mathrm{cm}^2. \text{ (Bild 155)}$$

Der Inhalt der Kreisfläche mit 6 cm Durchmesser beträgt $\underline{\underline{28{,}25\ \mathrm{cm}^2}}$.

5.10.1.7. Feste Marke M

Auf dem Stabkörper und auf der Zunge älterer Rechenstabtypen findet man bei 32 der Teilungen A und B eine feste Marke M (siehe Bild 80, Seite 107). Sie hat den Wert $\frac{1}{\pi} \approx 0{,}318$. Rechnet man mit den Teilungen A und B, dann ersetzt eine Division mit der Marke M eine Multiplikation mit der Zahl π. Bei Rechenstäben, die die Teilungen CF und DF tragen, hat die Marke M ihre Bedeutung verloren.

5.10.2. Feste Marken auf dem Läufer

Die neuen Läufer der Rechenstäbe System „Rietz", „Darmstadt" oder „Duplex" haben 4 Striche, einen durchlaufenden schwarzen und drei kürzere (meist rot angelegte), die nur über die Teilungen A und B bzw. C und D reichen.

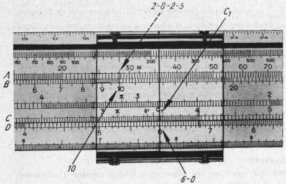


Bild 155

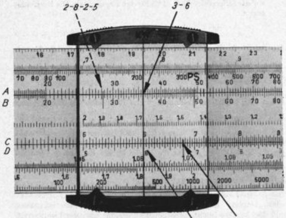


Bild 156

5.10.2.1. Feste Läufermarke für die Kreisberechnung

Zwei kurze Striche, meist sind es der linke obere und der rechte untere, dienen wie die Marken C und C_1 auf der Zunge der Kreisberechnung. Sie haben deshalb von dem schwarzen durchlaufenden Läuferstrich, mit dem sie zusammenarbeiten, den Abstand lg 1,128. Prüfen Sie das nach, indem Sie einmal den linken oberen Strich über A 1 stellen und das andere Mal den durchlaufenden Strich über A 1 und D 1 bringen. Beide Male muß der durchlaufende bzw. der rechte untere Hilfsstrich über der Ziffernfolge 1–1–2–8 stehen.

Wir können jetzt Kreisinhaltsberechnungen ohne die Zunge durchführen. Bild 156 zeigt die Einstellung des Läufers wie bei der obigen Aufgabe. Der Mittelstrich steht über dem Durchmesser 6,0, unter dem linken oberen Strich lesen wir den Flächeninhalt 28,25 cm² ab.

Umgekehrt können wir mit dem unteren rechten Läuferstrich aus dem Kreisinhalt den zugehörigen Kreisdurchmesser berechnen. Bild 156 zeigt außer der erwähnten Einstellung: Aus 36,00 cm² (3–6–0–0 auf A) ergibt sich 6–7–7 für den Durchmesser auf D. Die Kreisfläche von $A = 36{,}00$ cm² hat einen Durchmesser von 6,77 cm.

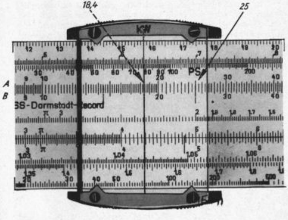


Bild 157

5.10.2.2. Läufermarken zur Umrechnung von PS in kW

Die obere rechte Hilfsmarke auf dem Läufer wird mit dem durchlaufenden Läuferstrich zusammen verwendet. Andere Läufer haben auch zwei unabhängig vom durchgehenden Strich arbeitende Hilfsstriche. Meist ist aber an den Strichen kW und PS angeschrieben.

Da $\quad 1\,\text{PS} = 736\,\text{W} = 0{,}736\,\text{kW}$

sind, ergibt sich die Umrechnung von PS in kW dadurch, daß wir auf A den rechten oberen Läuferstrich über die gegebene PS-Zahl stellen und unter dem durchlaufenden Läuferstrich ebenfalls auf A die kW-Zahl ablesen. Bild 157 zeigt die Umrechnung

$$25\,\text{PS} = 18{,}4\,\text{kW}.$$

Bei manchen Rechenstäben, z. B. „Darmstadt" (Holz), arbeiten die Marken für PS und kW mit der Teilung D zusammen.

6. Auswahl des richtigen Rechenstabes

Die Auswahl an Rechenstäben ist sehr groß. Deshalb sollen nachfolgend einige Hinweise gegeben werden, welche Teilungen die einzelnen Rechenstäbe enthalten. Danach läßt sich vielleicht entscheiden, ob ein einfacher Schulrechenstab ausreicht oder ob höher entwickelte Rechenstäbe angebracht sind.

Beginnen wir mit den Schulrechenstäben!

Sie haben neben den Grundteilungen C und D und den Quadratteilungen A und B noch die Kubikteilung K und die Mantissenteilung L. Auf der Zungenrückseite sind die Winkelteilungen für die trigonometrischen Funktionen S und T, manchmal auch ST untergebracht. Gewisse Abweichungen sind möglich. So kann auf der Zungenrückseite ST fehlen und dafür L angebracht sein.

Eine Weiterentwicklung brachte auf der Vorderseite der Zunge (in der Mitte) noch die Reziprokteilung CI. Derartige Rechenstäbe sind universal verwendbar, erlauben fast alle Berechnungen und sind an keinen Beruf gebunden. Sie sind in allgemeinbildenden Schulen wie auch an Fachschulen, in Laboratorien und in Werkstätten gleich gut verwendbar. Die auf diesen Rechenstäben enthaltenen Teilungen verlangen nur die mathematischen Grundkenntnisse (bis zu den Logarithmen), und deshalb dürften diese Stäbe (zu denen auch System „Rietz" gehört) noch immer am meisten zu empfehlen sein.

Die Anordnung der Teilungen bei solchen Rechenstäben vom System „Rietz" ist:

Vorderseite

Stabkörper:	K	Kubikteilung	x^3
	A	Quadratteilung	x^2
Zunge:	B	Quadratteilung	x^2
	CI	Reziprokteilung	$\frac{1}{x}$
	C	Grundteilung	x
Stabkörper:	D	Grundteilung	x
	L	Mantissenteilung	$\lg x$

Rückseite

Zunge:	S	Winkelteilung von 5,5° bis 90° für Sinus rückläufig von 0° bis 84,5° für Cosinus	∢ sin ∢ cos
	ST	Winkelteilung von 0,55° bis 6° für Sinus, Tangens und das Bogenmaß	∢ sin ∢ tan ∢ arc
	T	Winkelteilung von 5,5° bis 45° und rückläufig von 45° bis 84,5° für Tangens und Cotangens	∢ tan ∢ cot

Ebenfalls ein Universal-Rechenstab, aber für höhere Ansprüche, etwa die Zwecke eines Ingenieurs oder Naturwissenschaftlers, ist der Rechenstab nach System „Darmstadt" (Seite 179). Als besondere Teilungen enthält er drei Exponentialteilungen LL_1, LL_2 und LL_3, sowie eine pythagoreische Teilung P (vgl. Seite 160).

Hier muß zwischen den zwei möglichen Ausführungen aus Holz oder Metall bzw. Kunststoff unterschieden werden. Die Rechenstäbe aus Kunststoff sind denen aus Metall wegen der klarer hervortretenden Striche und Schrift vorzuziehen.

Gegenüber den Rechenstäben aus Holz haben die aus Kunststoff den Vorteil, daß der Stabkörper beiderseits für Teilungen zur Verfügung steht, so daß mehr Teilungen untergebracht werden können. Bei den Rechenstäben aus Holz versuchte man einen bescheidenen Ausgleich dadurch, daß man die Ober- und Unterkanten mit Teilungen versah.

Wir beschreiben hier nur die Teilungsanordnung beim System „Darmstadt-Record" aus Kunststoff, der gegenüber dem Rechenstab „Darmstadt" zwei Tangensteilungen T_1 und T_2 und die um π versetzten Teilungen CF und DF sowie die inverse Teilung CIF mit $\frac{1}{\pi x}$, DI mit $\frac{1}{x}$ zusätzlich erhalten hat.

Vorderseite

Stabkörper:	L	Mantissenteilung	$\lg x$
	K	Kubikteilung	x^3
	A	Quadratteilung	x^2
Zunge:	B	Quadratteilung	x^2
	CI	Reziprokteilung	$\frac{1}{x}$
	C	Grundteilung	x
Stabkörper:	D	Grundteilung	x
	LL_1	Exponentialteilung von 1,01 bis 1,11	$e^{0,01x}$
	LL_2	Exponentialteilung von 1,1 bis 3,0	$e^{0,1x}$
	LL_3	Exponentialteilung von 2,5 bis 100000	e^x

Rückseite

Stabkörper:	P	Pythagoreische Teilung	$\sqrt{1-x^2}$
	S	Winkelteilung von 5,7° bis 90° für Sinus	∢ sin
	ST	Winkelteilung von 0,58° bis 6° für Sinus, Tangens und das Bogenmaß	∢ arc
	DF	Um π versetzte Grundteilung	πx
Zunge:	CF	Um π versetzte Grundteilung	πx
	CIF	Um π versetzte Reziprokteilung	$\frac{1}{\pi x}$
	CI	Reziprokteilung	$\frac{1}{x}$
	C	Grundteilung	x
Stabkörper:	D	Grundteilung	x
	T_1	Winkelteilung von 5,7° bis 45° für Tangens	∢ tan
	T_2	Winkelteilung von 45° bis 84,5° für Tangens	∢ tan
	DI	Reziprokteilung	$\frac{1}{x}$

Der Rechenstab „Darmstadt" wurde weiterentwickelt zu einem Rechenstab, der bei Hochschulen und in der Forschung vorzugsweise in der Mathematik, Physik und Hochfrequenztechnik Verwendung findet. Das Kennzeichen dieser Stäbe ist, daß die Exponentialteilungen erweitert worden sind. Beim Rechenstab „Duplex" sind noch die Teilungen für $e^{0,001x}$ und für e^{-x}, $e^{-0,1x}$, $e^{-0,01x}$, $e^{-0,001x}$ sowie drei Teilungen für die Hyperbelfunktionen hinzugekommen. Die Anordnung der Teilungen beim Rechenstab „Duplex" ist:

Vorderseite

Stabkörper:	LL_{00}	Exponentialteilung von 0,999 bis 0,989	$e^{-0,001x}$
	LL_{01}	Exponentialteilung von 0,99 bis 0,9	$e^{-0,01x}$
	LL_{02}	Exponentialteilung von 0,91 bis 0,35	$e^{-0,1}$
	LL_{03}	Exponentialteilung von 0,4 bis 0,00001	e^{-x}
	DF	Um π versetzte Grundteilung	πx
Zunge:	CF	Um π versetzte Grundteilung	πx
	CIF	Um π versetzte Reziprokteilung	$\frac{1}{\pi x}$
	BI	Reziproke Quadratteilung	$\frac{1}{x^2}$
	CI	Reziprokteilung	$\frac{1}{x}$
	C	Grundteilung	x

Stabkörper:	D	Grundteilung	x
	LL_3	Exponentialteilung von 2,5 bis 100000	e^x
	LL_2	Exponentialteilung von 1,1 bis 3,0	$e^{0,1x}$
	LL_1	Exponentialteilung von 1,01 bis 1,11	$e^{0,01x}$
	LL_0	Exponentialteilung von 1,001 bis 1,011	$e^{0,001x}$
Rückseite			
Stabkörper:	K	Kubikteilung	x^3
	T_1	Winkeleinteilung für die Tangensfunktion	
		von 5,5° bis 45°	∢ tan
	T_2	Winkeleinteilung für die Tangensfunktion	
		von 45° bis 84,5°	∢ tan
	DI	Reziprokteilung	$\frac{1}{x}$
	A	Quadratteilung	x^2
Zunge:	Sh_1	Einteilung für sinh von 0,1 bis 0,9	$\sinh x$
	Sh_2	Einteilung für sinh von 0,85 bis 3,0	$\sinh x$
	Th	Einteilung für tanh von 0,1 bis 3,0	$\tanh x$
	S	Winkeleinteilung für den Sinus von 5,5°	
		bis 90,0°	∢ sin
		rückläufig für den Cosinus von 0° bis 84,5°	∢ cos
	C	Grundteilung	x
Stabkörper:	D	Grundteilung	x
	S	Winkeleinteilung für den Sinus	∢ sin
		von 5,5° bis 90°	∢ cos
		rückläufig für den Cosinus von 0° bis 84,5°	
	P	Pythagoreische Teilung	$\sqrt{1-x^2}$
			$\sin x$
			$\cos x$
	ST	Winkeleinteilung von 0,55° bis 6° für	
			∢ sin
		den Sinus, Tangens und das Bogenmaß	∢ arc
			∢ tan
	L	Mantissenteilung	$\lg x$

Welcher Rechenstab ist nun am geeignetsten? Es empfiehlt sich, daß der Anfänger zunächst einen Rechenstab nach dem System „Rietz“ verwendet. Wenn er dann mit der weiteren Festigung seiner Arbeit mit dem Rechenstab bemerkt, daß diese Rechenstäbe für manche Rechnungen nicht mehr ausreichen, dann sollte er zum System „Darmstadt“ oder gar zum System „Duplex“ übergehen.

7. Anhang

7.1. Bestimmung der Größenordnung

Zu Beginn des Abschnittes 5. war davon gesprochen worden, daß es Regeln gibt, mit denen formal die Größenordnung eines Rechenstabergebnisses bestimmt wird. Sie sollen jetzt nachgetragen werden. Wir stellen diese Regeln bewußt an das Ende des Buches, weil wir sie nur als eine Ergänzung auffassen und auch hier wieder betonen, daß die Überschlagsrechnung mit Hilfe der Zehner-Potenzen zuverlässiger ist. Außerdem haben die Regeln, mit denen wir Sie jetzt vertraut machen wollen, den Nachteil, daß sie nur für Rechnungen mit den Teilungen C und D anwendbar sind. Schon bei der Verwendung der Teilung CI und erst recht bei Anwendung der Teilungen A und B ergeben sich Schwierigkeiten, so daß man doch lieber zur Überschlagsrechnung greifen wird.

Die Regel für die Ermittlung des Stellenwertes ist relativ einfach. Bei Produktbildungen merkt man sich bei der Rechnung die Anzahl der Fälle, in denen das linke Ende der Teilung C mit dem Läuferstrich zur Deckung gebracht worden ist. Dann ergibt sich die Zahl der Stellen vor dem Komma des Produktes als die Summe der Zahl der Stellen vor dem Komma der einzelnen Faktoren, vermindert um die Zahl der gemerkten Zungeneinstellungen.

Bei Zahlen größer als 1 ist die Stellenzahl klar. Bei Dezimalzahlen kleiner als 1, deren geltende Stelle an der n-ten Stelle hinter dem Komma liegt, hat man die Stellenzahl $-(n-1)$ zu setzen. Also haben Zahlen folgende Stellenzahlen:

	Anzahl der Stellen vor dem Komma	
123456	6	
1234,56	4	
12,3456	2	
1,23456	1	
0,123456	0	
0,0123456	−1	
0,00123456	−2	
0,0000123456	4	usw.

BEISPIELE

284. Es ist zu rechnen $23 \cdot 780 \cdot 815 \cdot 47$.

Zahl der Stellen vor dem Komma sind bei

23	2
780	3
815	3
47	2
zusammen	10

Als Ziffernfolge ergibt sich 6–7–8. Dabei wurde C 1 einmal mit dem Läuferstrich zur Deckung gebacht. Das sind für das Ergebnis $10 - 1 = 9$ Stellen vor dem Komma.
Deshalb muß das Ergebnis lauten $\underline{\underline{687000000}}$.

Die Überschlagsrechnung:

$$2 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 10^2 \cdot 8 \cdot 10^2 \cdot 5 \cdot 10 = \\ = 64 \cdot 10 \cdot 10^6 = 64 \cdot 10^7 = \\ = 640000000$$

bestätigt das Ergebnis.

285. $0{,}004 \cdot 0{,}063 \cdot 13{,}2$ sollen berechnet werden.

Zahl der Stellen vor dem Komma sind bei

0,004	−2
0,063	−1
13,2	2
zusammen	−1

Da der Läuferstrich mit C 1 einmal zur Deckung gebracht wird, kommen wir auf −2 Stellen vor dem Komma.
Die Rechnung liefert die Ziffernfolge 3–3–3–0.
Deshalb ist das Ergebnis $\underline{\underline{0{,}00333}}$.

Die Überschlagsrechnung liefert $4 \cdot 10^{-3} \cdot 6 \cdot 10^{-2} \cdot 10 = 24 \cdot 10^{-4} = = 0{,}0024$.

Bei der Bildung von Quotienten, also bei der Division, ist die Merkregel etwas anders. Hier ist die Zahl der Stellen vor dem Komma beim Ergebnis gleich der Differenz der Stellenzahlen vor dem Komma von Dividenden und Divisor, wenn das Ergebnis unter C 10 auf D abgelesen wird. Sie ist um 1 größer, wenn das Ergebnis unter C 1 abzulesen ist.

BEISPIELE

286. $\frac{0{,}46}{628} = 0{,}000732$

Zahl der Stellen vor dem Komma ist: Dividend 0 Divisor 3

−3

Da das Ergebnis unter C 10 steht, hat es (−3) Stellen vor dem Komma. Mit der Ziffernfolge 7–3–2 lautet das Ergebnis 0,000732.

Die Überschlagsrechnung liefert

$$\frac{46 \cdot 10^{-2}}{6 \quad 10^2} \approx 8 \cdot 10^{-4}.$$

287. $\frac{37{,}3}{0{,}196} = 190{,}3$

Zahl der Stellen vor dem Komma ist: Dividend 2

Divisor 0

2

Das Ergebnis, dessen Ziffernfolge 1–9–0–3 lautet, steht unter C 1. Deshalb ist die Zahl der Stellen vor dem Komma im Ergebnis nicht 2, sondern 3. Mithin ist

$$\frac{37{,}3}{0{,}196} = \underline{\underline{190{,}3}}.$$

Die Überschlagsrechnung zeigt $\frac{4 \cdot 10}{2 \cdot 10^{-1}} = 2 \cdot 10^2 = 200$.

7.2. Die beim Rechenstab erzielbare Genauigkeit

Bei linearen Teilungen, wie z. B. bei Maßstäben, ist die absolute Ablesegenauigkeit überall gleich groß. Man kann am Skalenanfang wie am Skalenende gleich genau ablesen.
Nehmen wir an, daß 0,1 mm noch genau einstellbar ist und abgelesen werden kann, dann ist der relative Fehler am Skalenanfang größer als am Skalenende. Ist nämlich die Teilung 10 cm lang, dann sind bei dem gleichen absoluten Fehler von 0,1 mm die relativen Fehler am

Skalenanfang $\frac{0{,}1 \text{ mm}}{10 \text{ mm}} = 0{,}01 = 1{,}0\%$

Skalenende $\frac{0{,}1 \text{ mm}}{100 \text{ mm}} = 0{,}001 = 0{,}1\%$.

Deshalb kann man äquidistant geteilte Maßstäbe nur für relativ kleine Zahlenbereiche auf einer Zahlengeraden, wie es in der Nomographie üblich ist, verwenden.
Anders liegen die Verhältnisse bei logarithmisch geteilten Strecken. Hier lassen sich viel größere Zahlenbereiche darstellen, ohne daß sich die relativen Ablesefehler ändern.

Bekanntlich sind bei der logarithmischen Darstellung die Längen den Logarithmen der Zahlen proportional.

Nehmen wir wieder an, daß wir bei einer 10 cm langen logarithmisch geteilten Strecke auf 0,1 mm genau ablesen könnten, dann ergeben sich für den Anfang und das Ende der Teilung folgende Rechnungen.

Am Teilungsanfang gilt für die Zahl 1,1, daß

$$\lg 1{,}1 = 0{,}0414 .$$

Die Strecke von 1 bis 1,1 hätte dann eine Länge von 0,41 cm=4,1 mm. Als nächster Wert wäre noch abzulesen eine Zahl, die zur Länge 4,2 mm gehört, d. h., deren Logarithmus 0,042 beträgt. Das ist die Zahl 1,102.

Am Teilungsende gilt für die Zahl 9,8, daß

$$\lg 9{,}8 = 0{,}9912 .$$

Die Strecke von 1 bis 9,8 hätte dann die Länge von 9,91 cm=99,1 mm. Ablesbar wäre als nächste die Zahl mit dem Abstand 99,2 mm von 1. Das ist aber die Zahl, deren Logarithmus 0,992 beträgt, d. h. die Zahl 9,817.

Damit ergibt sich für einen absoluten Fehler von 0,1 mm ein relativer Fehler am Teilungsanfang

$$\Delta F = \frac{1{,}102 - 1{,}1}{0{,}1} = \frac{0{,}002}{0{,}1} = 0{,}02 = 2\,\%$$

und am Teilungsende

$$\Delta F = \frac{9{,}817 - 9{,}8}{0{,}1} = \frac{0{,}017}{0{,}1} = 0{,}017 \approx 2\,\% .$$

Diese einfache Überschlagsrechnung zeigt, daß der relative Fehler am Skalenanfang und am Skalenende gleich ist.

Die beim Stabrechnen erzielbare Genauigkeit hängt natürlich von der Anzahl der Einstellungen ab. Dabei kommt es darauf an, wie genau man die Zunge und den Läufer einstellt und wie genau man ablesen kann. Allgemein ist eine Ablesegenauigkeit, also ein absoluter Fehler, von 0,1 mm anzunehmen. Wird besonders bei den Zungenverschiebungen darauf geachtet, daß keine Ungenauigkeiten entstehen, dann kann man im allgemeinen eine Genauigkeit der Rechnungen von 99 % annehmen.

7.3. Zur Geschichte des Rechenstabes

Um etwas über die Entwicklung der Rechenstäbe sagen zu können, muß man erst auf die Entwicklung der Logarithmen eingehen. Bürgi (1552 ··· 1632), ein Schweizer Mathematiker, der mit Kepler (1571 ··· 1630) zusammen in Prag wirkte, berechnete in der Zeit von 1603 bis 1611 die erste Logarithmentafel, die aber erst 1620 veröffentlicht wurde. Unabhängig von Bürgi hat Lord Napier of Merchiston ebenfalls eine Tafel berechnet und 1614 veröffentlicht. 1615 machte der Oxforder Professor Briggs (1556 ··· 1630) den Vorschlag, 10 als Basis eines Logarithmensystems zu wählen und brachte 1624 eine Tafel mit Logarithmen zur Basis 10 heraus. Heute tragen sie vielfach seinen Namen.

Der Engländer Gunter machte der Pariser Akademie der Wissenschaft den Vorschlag, mit einer logarithmischen Skale und einem Stechzirkel graphisch zu rechnen. Ein anderer Engländer, Oughtred, verbesserte diese Rechnung durch die Verwendung zweier kongruenter logarithmischer Skalen. Damit war im Grunde der Rechenstab geschaffen. Alle weiteren Verbesserungen durch Neuhinzunahmen von Skalen usw. ergaben sich im Laufe der Zeit. So wurde 1654 die Zunge des Rechenstabes eingeführt, ohne daß man angeben kann, wer diese Neuerung erfand. 1850 lag der heutige Schulrechenstab in einer Entwicklung des Franzosen Mannheim vor, so daß wir bereits seit über 100 Jahren mit der heutigen Form der Rechenstäbe arbeiten. Natürlich sind immer weitere Verbesserungen, neue Skalen, Hilfsskalen usw. dazugekommen, doch ist das Grundprinzip erhalten geblieben.

Literatur:

Bronstein-Semendjajew: Taschenbuch der Mathematik. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1958

Kumazawa, Yoshio: Addition and Subtraction an Logarithmic. Sapporo: Rule 1965

Müller: Fünfstellige Logarithmen- und andere mathematische Tafeln. Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1961

Panow: Der Rechenstab. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1959

Rohrberg: Theorie und Praxis des logarithmischen Rechenstabes. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1951

Stender: Der moderne Rechenstab. Hamburg, Frankfurt/M.: Otto Salle Verlag 1962

Lösungen der Übungsaufgaben

Abschnitt 5.1.2.

1. $\sigma = \dfrac{F}{A} = \dfrac{10\,830\ \text{kp}}{15{,}3\ \text{mm}^2} = 708\ \text{kp/mm}^2$

2. $\eta = \dfrac{\text{abgegebene Leistung}}{\text{aufgenommene Leistung}} = \dfrac{39{,}75\ \text{PS}}{42\ \text{PS}} = 0{,}946$ 3. 1088 M

Abschnitt 5.1.3.

4. $s = v \cdot t = (14{,}3/\text{km h}) \cdot 4{,}75\ \text{h} = 67{,}8\ \text{km}$

5. Aus $i = \dfrac{d_2}{d_1}$ ergibt sich $d_2 = i\,d_1 = 1{,}75 \cdot 328\ \text{mm} = 574\ \text{mm}$

6. $m = \varrho \cdot V = (2{,}3 \cdot 10^3\ \text{kg/m}^3) \cdot 19{,}75\ \text{m}^3 = 45{,}4 \cdot 10^3\ \text{kg}$

Abschnitt 5.1.4.

7. Aus $Q = mc\,\Delta t$ ergibt sich $Q = 438\ \text{g} \cdot 0{,}174\ \dfrac{\text{cal}}{\text{g grd}} \cdot 128\ \text{grd}$

$= 9750\ \text{cal}$

8. Aus $Q = P \cdot t$ ergibt sich

$$Q = 4{,}35\ \text{kW} \cdot 2{,}52\ \text{h} = 10{,}95\ \text{kWh}$$

$$= 860{,}1\ \frac{\text{kcal}}{\text{kWh}} \cdot 4{,}35\ \text{kW} \cdot 2{,}52\ \text{h} = 9430\ \text{kcal}$$

9. $M = \pi r s = \pi \cdot 5{,}4\ \text{cm} \cdot 7{,}38\ \text{cm} = 12{,}51\ \text{cm}^2$
10. 161,4
11. 384
12. 0,95

Abschnitt 5.1.4.2.

13. 53,4
14. 170,5

Abschnitt 5.1.5.1.

15. 0,000388	16. 20016	17. 282
18. 0,784	19. 4,06	20. 16,43

Abschnitt 5.1.5.2.

21. 3,47	22. 0,667	23. 0,000334
24. 0,00797	25. 11,67	26. 88,7

Abschnitt 5.1.5.3.

27. 4,77	28. 0,1705	29. 306

Abschnitt 5.2.1.

30. 68,1	31. 0,814	32. 27700
33. 0,00001205	34. 1970	35. 1050000

Abschnitt 5.3.

36. $\sqrt{87{,}6 \cdot 10^2} = 9{,}35 \cdot 10 = 93{,}5$

37. $\sqrt{1{,}39 \cdot 10^4} = 1{,}179 \cdot 10^2 = 117{,}9$

38. $\sqrt{6{,}42 \cdot 10^6} = 2{,}535 \cdot 10^3 = 2535$

39. 4,425	40. 13,65	41. 15,77	42. 62,9	43. 64,5
44. 28,0	45. 306	46. 91,6	47. 650	48. 199,2

49. $\sqrt{57{,}1 \cdot 10^{-2}} = 7{,}56 \cdot 10^{-1} = 0{,}756$

50. $\sqrt{6{,}34 \cdot 10^{-2}} = 2{,}52 \cdot 10^{-1} = 0{,}252$

51. $\sqrt{20{,}4 \cdot 10^{-4}} = 4{,}52 \cdot 10^{-2} = 0{,}0452$

52. $\sqrt{31{,}9 \cdot 10^{-4}} = 1{,}787 \cdot 10^{-2} = 0{,}01787$

53. $\sqrt{41{,}5 \cdot 10^{-6}} = 6{,}44 \cdot 10^{-3} = 0{,}00644$

54. 0,485	55. 0,0874	56. 0,204	57. 0,0229	58. 0,368
59. 0,01165	60. 0,962	61. 0,301	62. 0,296	63. 0,908

Abschnitt 5.6.1.1.

64. 0,1320	65. 0,1418	66. 0,262	67. 0,3065
68. 0,467	69. 0,5975	70. 0,8325	71. 0,959
72. sin 13° 34′	73. sin 18,84°	74. sin 25° 45′	75. sin 32,7°
76. sin 38° 40′	77. sin 44,8°		

Abschnitt 5.6.1.3.

78. 0,910	79. 0,655	80. 0,457	81. 0,3030	82. 0,1638
83. 0,1171				

Abschnitt 5.6.3.

84. 0,01125	85. 0,0313	86. 0,0902
87. 0,01542	88. 0,04682	89. 0,0733

Abschnitt 5.6.6.

90. sin 84° 20′ 91. sin 87° 30′ 92. sin 89° 10′

Abschnitt 5.7.1.

93. 2,07 94. 0,581 − 2 95. 1,350
96. 0,7125 97. 2,795 98. 0,911 − 3
99. $x = 13{,}72$ 100. $x = 1{,}633$ 101. $x = 0{,}02465$
102. $x = 0{,}000261$ 103. $x = 416$ 104. $x = 5270$

Abschnitt 5.7.3.

105. $\frac{1}{e^{0,347}} = \frac{1}{1{,}415} = 0{,}707$ (auf LL_2)

106. $\frac{1}{e^{0,049}} = \frac{1}{1{,}0503} = 0{,}952$ (auf LL_1)

107. $\frac{1}{4{,}12} = 0{,}243$ (2 auf B, dann LL_3)

108. $\frac{1}{1{,}73} = 0{,}578$ (30 auf B, dann LL_2)

Abschnitt 5.7.4.

109. 6,43 110. 4,06 111. 1,229
112. 0,435 113. 0,1462 114. 0,0474
115. 0,01715

Abschnitt 5.7.5.1.

116. 1,527; 68,5 117. 2,25; 3320

Abschnitt 5.7.5.2.

118. 18,15 119. 15,15 120. 1760 121. 59,5

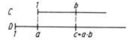
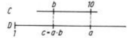
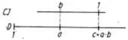
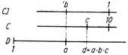
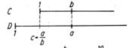
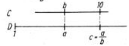
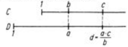
Abschnitt 5.7.5.4.

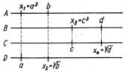
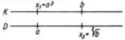
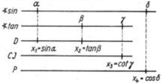
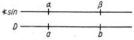
122. 6900 123. 3,31 124. 1,904 125. 2,107

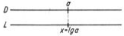
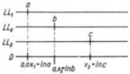
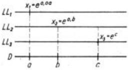
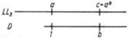
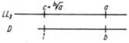
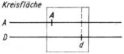
Tafelanhang

Tafel 1: Übersicht der wichtigsten Stabeinstellungen
Tafel 2: Zusammenfassung zu den trigonometrischen Funktionen
Tafel 3: Beziehungen zwischen den Teilungen beim Rechenstab „Darmstadt“

Tafel 1: Übersicht der wichtigsten Stabeinstellungen

Stabeinstellung	Formel	Abschnitt
1 Multiplikation		
	$c = a \cdot b$	5.1.1.
		5.1.1.
	$c = \dfrac{a}{\frac{1}{b}}$	5.1.3.
	$d = a \cdot b \cdot c$ $= \dfrac{a}{\frac{1}{b}} \cdot c$	5.1.4.
2 Division		
	$c = \dfrac{a}{b}$	5.1.2.
		5.1.2.
3 Multiplikation und Division		
	$d = \dfrac{a \cdot c}{b}$	5.1.4.

Stabeinstellung	Formel	Abschnitt
4 Quadrate, Quadratwurzel		
	$x_1 = a^2$ $x_2 = \sqrt{b}$ $x_3 = c^2$ $x_4 = \sqrt{d}$	5.2. 5.3.
5 Kuben, Kubikwurzel		
	$x_1 = a^3$ $x_2 = \sqrt[3]{b}$	5.4.
6 Trigonometrische Funktionen		
	$x_1 = \sin\alpha$ $x_2 = \tan\beta$ $x_3 = \cot\gamma$ $x_4 = \cos\delta$	5.6.
Sinussatz		
	$\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{a}{b}$	5.6.1.2.

Stabeinstellung	Formel	Abschnitt
7 Logarithmen, Exponentialfunktion		
	$x = \lg a$	5.7.1.
	$0{,}0x_1 = \ln a$ $0{,}x_2 = \ln b$ $x_3 = \ln c$	5.7.4.
	$x_1 = e^{0,a}$ $x_2 = e^{0,b}$ $x_3 = e^c$	5.7.3.
	$c = a^b$	5.7.5.2.
	$c = \sqrt[b]{a}$	5.7.5.3.
8 Kreisfläche		
	$A = \dfrac{\pi d^2}{4}$ $d = \sqrt{\dfrac{4A}{\pi}}$	5.10.2.2.

Tafel 2: Zusammenfassung zu den trigonometrischen Funktionen

α	Funktions-werte	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
$0° \leqq \alpha \leqq 34'$	Wertevorrat	$0{,}0 \leqq \sin\alpha \leqq 0{,}01$	$1{,}0 \geqq \cos\alpha \geqq 0{,}999$	$0{,}0 \leqq \tan\alpha \leqq 0{,}1$	$\infty \geqq \cot\alpha \geqq 100$
	bestimmt als	$\operatorname{arc}\alpha$ $= \alpha'/\varrho' = \alpha''/\varrho''$ (mit festen Marken auf C und D)	$1 - \frac{1}{2}\operatorname{arc}^2\alpha$ $= 1 - \frac{1}{2}(\alpha'/\varrho')^2 = 1 - \frac{1}{2}(\alpha''\varrho'')^2$ (mit festen Marken auf C und D)	$\operatorname{arc}\alpha$ $= \frac{\alpha'}{\varrho'} = \frac{\alpha''}{\varrho''}$ (mit festen Marken auf C und D)	$\frac{1}{\operatorname{arc}\alpha}$ $= \frac{\varrho'}{\alpha'} = \frac{\varrho''}{\alpha''}$ (mit festen Marken auf C und D)
$34' \leqq \alpha \leqq 5°\,43'$	Wertevorrat	$0{,}01 \leqq \sin\alpha \leqq 0{,}10$	$0{,}999 \geqq \cos\alpha \geqq 0{,}995$	$0{,}01 \leqq \tan\alpha \leqq 0{,}1$	$100 \geqq \cot\alpha \geqq 10$
	bestimmt als	$\sin\alpha$ α auf ST → D	$1 - \frac{1}{2}\sin^2\alpha$ auf ST → A	$\tan\alpha$ α auf ST → D	$\frac{1}{\tan\alpha}$ α auf ST → CI
$5°\,43' \leqq \alpha \leqq 45°$	Wertevorrat	$0{,}10 \leqq \sin\alpha \leqq 0{,}707$	$0{,}995 \geqq \cos\alpha \geqq 0{,}707$	$0{,}1 \leqq \tan\alpha \leqq 1{,}0$	$10 \geqq \cot\alpha \geqq 1{,}0$
	bestimmt als	$\sin\alpha$ α auf S → D	$\cos\alpha$ auf S → P	$\tan\alpha$ α auf T → D	$\frac{1}{\tan\alpha}$ α auf T → CI
$45° \leqq \alpha \leqq 84°\,17'$	Wertevorrat	$0{,}707 \leqq \sin\alpha \leqq 0{,}995$	$0{,}707 \geqq \cos\alpha \geqq 0{,}10$	$1{,}0 \leqq \tan\alpha \leqq 10$	$1{,}0 \geqq \cot\alpha \geqq 0{,}1$
	bestimmt als	$\sin\alpha$ $(90° - \alpha)$ auf S → P	$\cos\alpha$ $(90° - \alpha)$ auf S → D	$\frac{1}{\tan(90° - \alpha)}$ $(90° - \alpha)$ auf T → CI	$\tan(90° - \alpha)$ $(90° - \alpha)$ auf T → D
$84°\,17' \leqq \alpha \leqq 89°\,26'$	Wertevorrat	$0{,}995 \leqq \sin\alpha \leqq 0{,}999$	$0{,}10 \geqq \cos\alpha \geqq 0{,}01$	$10 \leqq \tan\alpha \leqq 100$	$0{,}1 \geqq \cot\alpha \geqq 0{,}01$
	bestimmt als	$1 - \frac{1}{2}\sin^2(90° - \alpha)$ $(90° - \alpha)$ auf ST → A	$\cos\alpha$ $(90° - \alpha)$ auf ST → D	$\frac{1}{\tan(90° - \alpha)}$ $(90° - \alpha)$ auf ST → CI	$\tan(90° - \alpha)$ $(90° - \alpha)$ auf ST → D
$89°\,26' \leqq \alpha \leqq 90°$	Wertevorrat	$0{,}999 \leqq \sin\alpha \leqq 1{,}0$	$0{,}01 \geqq \cos\alpha \geqq 0{,}0$	$100 \leqq \tan\alpha \leqq \infty$	$0{,}01 \geqq \cot\alpha \geqq 0{,}0$
	bestimmt als	$1 - \frac{1}{2}\operatorname{arc}^2(90° - \alpha)$ $= 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{90° - \alpha'}{\varrho'}\right)$ $= 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{90° - \alpha''}{\varrho''}\right)$ (mit festen Marken auf C und D)	$\operatorname{arc}(90° - \alpha)$ $= \frac{90° - \alpha'}{\varrho'}$ $= \frac{90° - \alpha''}{\varrho''}$ (mit festen Marken auf C und D)	$\frac{1}{\operatorname{arc}(90° - \alpha)}$ $= \frac{\varrho'}{90° - \alpha'}$ $= \frac{\varrho''}{90° - \alpha''}$ (mit festen Marken auf C und D)	$\operatorname{arc}(90° - \alpha)$ $= \frac{90° - \alpha'}{\varrho'}$ $= \frac{90° - \alpha''}{\varrho''}$ (mit festen Marken auf C und D)

Gebrauchsanweisung für nebenstehende Tafel

Die nebenstehende Tafel soll Umrechnungen, die sich beim Übergang von einer Teilung des Rechenstabes zur anderen ergeben, erleichtern. Dazu ist der Rechenstab in Normalstellung (C1 über D1) zu verwenden. Er ersetzt dann nicht weniger als 196 Nomogramme. Eingegangen wird in die Tafel von links. In der ersten Spalte stehen die Veränderlichen jeder Teilung mit ihren Definitionsbereichen. Geht man von einer gewählten Zeile nach rechts, dann kann man in der gewünschten Spalte die Umrechnungsformel ablesen, die beim Teilungsübergang angewendet wird.

BEISPIELE

1. In der 1. Spalte, 3. Zeile steht die Veränderliche $z (1 \leqq z \leqq 1000)$. In der 3. Zeile, 15. Spalte liest man ab, daß $v = e^{\sqrt[3]{z}}$, Der Wertevorrat von v ist $e \leqq v \leqq 22000$.
2. 1. Spalte, 7. Zeile: $\alpha = 20°$, 7. Zeile, 14. Spalte $n = e^{\sin 20°} = 1{,}408$.

Tafel 3: Beziehungen zwischen den Teilungen beim Rechenstab „Darmstadt"

	C und D	A und B	K	L	CI und DI	CF und DF	S	ST	T_1	T_2	P	LL_1	LL_2	LL_3	CIF
	x	y	z	p	q	r	α	β	γ	δ	s	t	n	v	w
C und D $1 \leqq x \leqq 10$	x	x^2	x^3	$\lg x$	$\frac{10}{x}$	πx	$\arcsin \frac{x}{10}$	$\arcsin \frac{x}{100}$	$\arctan \frac{x}{10}$	$\arctan x$	$\sqrt{\left(1-\frac{x}{10}\right)^2}$	$e^{0,01x}$	$e^{0,1x}$	e^{x}	$\frac{10^2}{\pi x}$
A und B $1 \leqq y \leqq 100$	$\sqrt{y}$	y	$\sqrt{y^3}$	$\lg \sqrt{y}$	$\frac{10}{\sqrt{y}}$	$\pi\sqrt{y}$	$\arcsin \frac{\sqrt{y}}{10}$	$\arcsin \frac{\sqrt{y}}{100}$	$\arctan \frac{\sqrt{y}}{10}$	$\arctan \sqrt{y}$	$\sqrt{1-\frac{y}{100}}$	$e^{0,01\sqrt{y}}$	$e^{0,1\sqrt{y}}$	$e^{\sqrt{y}}$	$\frac{10^2}{\pi\sqrt{y}}$
K $1 \leqq z \leqq 1000$	$\sqrt[3]{z}$	$\sqrt[3]{z^2}$	z	$\lg \sqrt[3]{z}$	$\frac{10}{\sqrt[3]{z}}$	$\pi \sqrt[3]{z}$	$\arcsin \frac{\sqrt[3]{z}}{10}$	$\arcsin \frac{\sqrt[3]{z}}{100}$	$\arctan \frac{\sqrt[3]{z}}{10}$	$\arctan \sqrt[3]{z}$	$\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt[3]{z}}{10}\right)^2}$	$e^{0,01\sqrt[3]{z}}$	$e^{0,1\sqrt[3]{z}}$	$e^{\sqrt[3]{z}}$	$\frac{10^2}{\pi\sqrt[3]{z}}$
L $0{,}0 \leqq p \leqq 1{,}0$	10^p	10^{2p}	10^{3p}	p	10^{1-p}	$\pi\, 10^p$	$\arcsin 10^{p-1}$	$\arcsin 10^{p-2}$	$\arctan 10^{p-1}$	$\arctan 10^p$	$\sqrt{1-10^{2p-2}}$	$e^{10^{p-2}}$	$e^{10^{p-1}}$	e^{10^p}	$\frac{10^{2-p}}{\pi}$
CI und DI $10 \geqq q > 1$	$\frac{10}{q}$	$\frac{10^2}{q^2}$	$\frac{10^3}{q^3}$	$1-\lg q$	q	$\frac{10\pi}{q}$	$\arcsin \frac{1}{q}$	$\arcsin \frac{1}{10q}$	$\arctan \frac{1}{q}$	$\arctan \frac{10}{q}$	$\sqrt{1-\frac{1}{q^2}}$	$e^{\frac{1}{10q}}$	$e^{\frac{1}{q}}$	$e^{\frac{10}{q}}$	$\frac{10q}{\pi}$
CF und DF $\pi \leqq r \leqq 10\pi$	$\frac{r}{\pi}$	$\frac{r^2}{\pi^2}$	$\frac{r^3}{\pi^3}$	$\lg \frac{r}{\pi}$	$\frac{10\pi}{r}$	r	$\arcsin \frac{r}{10\pi}$	$\arcsin \frac{r}{100\pi}$	$\arctan \frac{r}{10\pi}$	$\arctan \frac{r}{\pi}$	$\sqrt{1-\frac{r^2}{100\pi^2}}$	$e^{\frac{r}{100\pi}}$	$e^{\frac{r}{10\pi}}$	$e^{\frac{r}{\pi}}$	$\frac{10}{r}$
S $5{,}73° \leqq \alpha \leqq 90°$	$10 \sin \alpha$	$10^2 \sin^2 \alpha$	$10^3 \sin^3 \alpha$	$1 + \lg \sin \alpha$	$\frac{1}{\sin \alpha}$	$10\pi \sin \alpha$	α	$\arcsin \frac{\sin \alpha}{10}$	$\arctan \sin \alpha$	$\arctan 10 \sin \alpha$	$\cos \alpha$	$e^{\frac{\sin \alpha}{10}}$	$e^{\sin \alpha}$	$e^{10 \sin \alpha}$	$\frac{10}{\pi \sin \alpha}$
ST $0{,}57° \leqq \beta \leqq 5{,}73°$	$10^2 \sin \beta$	$10^4 \sin^2 \beta$	$10^6 \sin^3 \beta$	$2 + \lg \sin \beta$	$\frac{1}{10 \sin \beta}$	$10^2\pi \sin \beta$	$\arcsin 10 \sin \beta$	β	$\arctan 10 \sin \beta$	$\arctan 10^2 \sin \beta$	$\sqrt{1-10^2 \sin^2 \beta}$	$e^{\sin \beta}$	$e^{10 \sin \beta}$	$e^{10^2 \sin \beta}$	$\frac{1}{\pi \sin \beta}$
T_1 $5{,}7° \leqq \gamma \leqq 45°$	$10 \tan \gamma$	$10^2 \tan^2 \gamma$	$10^3 \tan^3 \gamma$	$1 + \lg \tan \gamma$	$\frac{1}{\tan \gamma}$	$10\pi \tan \gamma$	$\arcsin \tan \gamma$	$\arcsin \frac{\tan \gamma}{10}$	γ	$\arctan 10 \tan \gamma$	$\sqrt{1-\tan^2 \gamma}$	$e^{\frac{\tan \gamma}{10}}$	$e^{\tan \gamma}$	$e^{10 \tan \gamma}$	$\frac{10}{\pi \tan \gamma}$
T_2 $45° \leqq \delta \leqq 84{,}3°$	$\tan \delta$	$\tan^2 \delta$	$\tan^3 \delta$	$\lg \tan \delta$	$\frac{10}{\tan \delta}$	$\pi \tan \delta$	$\arcsin \frac{\tan \delta}{10}$	$\arcsin \frac{\tan \delta}{100}$	$\arctan \frac{\tan \delta}{10}$	δ	$\sqrt{1-\frac{\tan^2 \delta}{100}}$	$e^{\frac{\tan \delta}{100}}$	$e^{\frac{\tan \delta}{10}}$	$e^{\tan \delta}$	$\frac{10^2}{\pi \tan \delta}$
P $0{,}995 \geqq s \geqq 0$	$10\sqrt{1-s^2}$	$10^2(1-s^2)$	$(10\sqrt{1-s^2})^3$	$1 + \lg \sqrt{1-s^2}$	$\frac{1}{\sqrt{1-s^2}}$	$10\pi\sqrt{1-s^2}$	$\arcsin \sqrt{1-s^2}$	$\arcsin \frac{\sqrt{1-s^2}}{10}$	$\arctan \sqrt{1-s^2}$	$\arctan 10\sqrt{1-s^2}$	s	$e^{\frac{\sqrt{1-s^2}}{10}}$	$e^{\sqrt{1-s^2}}$	$e^{10\sqrt{1-s^2}}$	$\frac{10}{\pi\sqrt{1-s^2}}$
LL_1 $1{,}01 \leqq t \leqq 1{,}105$	$10^2 \ln t$	$10^4 \ln^2 t$	$10^6 \ln^3 t$	$2 + \lg \ln t$	$\frac{1}{10 \ln t}$	$10^2\pi \ln t$	$\arcsin 10 \ln t$	$\arcsin \ln t$	$\arctan 10 \ln t$	$\arctan 10^2 \ln t$	$\sqrt{1-(10 \ln t)^2}$	t	t^{10}	t^{100}	$\frac{1}{\pi \ln t}$
LL_2 $1{,}105 \leqq n \leqq e$	$10 \ln n$	$10^2 \ln^2 n$	$10^3 \ln^3 n$	$1 + \lg \ln n$	$\frac{1}{\ln n}$	$10\pi \ln n$	$\arcsin \ln n$	$\arcsin \frac{\ln n}{10}$	$\arctan \ln n$	$\arctan 10 \ln n$	$\sqrt{1-\ln^2 n}$	$\sqrt[10]{n}$	n	n^{10}	$\frac{10}{\pi \ln n}$
LL_3 $e \leqq v \leqq 50000$	$\ln v$	$\ln^2 v$	$\ln^3 v$	$\lg \ln v$	$\frac{10}{\ln v}$	$\pi \ln v$	$\arcsin \frac{\ln v}{10}$	$\arcsin \frac{\ln v}{100}$	$\arctan \frac{\ln v}{10}$	$\arctan \ln v$	$\sqrt{1-\left(\frac{\ln v}{10}\right)^2}$	$\sqrt[100]{v}$	$\sqrt[10]{v}$	v	$\frac{10^2}{\pi \ln v}$
CIF $10\pi \geqq w \geqq \pi$	$\frac{100}{\pi w}$	$\frac{10^4}{\pi^2 w^2}$	$\frac{10^6}{\pi^3 w^3}$	$1 - \lg \pi w$	$\frac{\pi w}{10}$	$\frac{100}{w}$	$\arcsin \frac{10}{\pi w}$	$\arcsin \frac{1}{\pi w}$	$\arctan \frac{10}{\pi w}$	$\arctan \frac{100}{\pi w}$	$\sqrt{1-\frac{10^4}{\pi^2 w^2}}$	$e^{\frac{1}{\pi w}}$	$e^{\frac{10}{\pi w}}$	$e^{\frac{100}{\pi w}}$	w