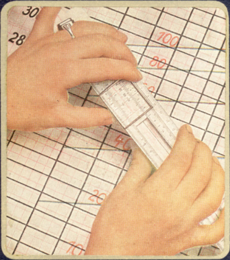
WISSEN UND SCHAFFEN



FRICKE

DER RECHENSCHIEBER

WISSEN UND SCHAFFEN

INGENIEUR H. W. FRICKE

DER RECHENSCHIEBER

4., VERBESSERTE UND ERWEITERTE AUFLAGE

MIT 134 BILDERN

FACHBUCHVERLAG LEIPZIG 1955

Verbilligte Vorzugsausgabe
entsprechend der Regierungsverordnung vom 10. 12. 1953
zur Verbesserung der Lebenslage unserer Werktätigen

Redaktionsschluß 28. 2. 1955

 · Fachbuchverlag Leipzig
Satz und Druck: VEB Leipziger Druckhaus, Leipzig (III/18/203)
Veröffentlicht unter der Lizenznummer 114-210/2/55 des Amtes für Literatur
und Verlagswesen der Deutschen Demokratischen Republik

VORWORT

Der Rechenschieber als praktisches Hilfsmittel zur Durchführung von Berechnungen der verschiedensten Art, sowohl im Büro als auch auf dem Bau und in der Werkstatt, wird von vielen Werktätigen noch nicht so ausgenützt, wie es notwendig ist. Auch in den Berufs- und Fachschulen muß unser Berufsnachwuchs noch mehr als bisher mit ihm vertraut gemacht werden. Denn es ist unbestreitbar, daß die Anwendung des Rechenschiebers jedem Werktätigen die Arbeit erleichtert, Arbeitszeit erspart und so dazu beiträgt, die Arbeitsproduktivität zu steigern.

Das vorliegende Buch soll in einfacher und verständlicher Form die Grundlagen für den Gebrauch des Rechenschiebers geben. Prägt man sich die wichtigsten Regeln für die Verwendung des Rechenschiebers gut ein, so wäre es durchaus möglich, mit ihm wie mit Logarithmen zu rechnen, ohne die tiefere mathematische Begründung seiner Konstruktion zu kennen. Allein, wer so mit dem Rechenschieber arbeitet, braucht nur eine Regel vergessen zu haben, und jede Bemühung, sie wieder zu rekonstruieren, wird erfolglos sein, weil ihm die dafür nötigen theoretischen Grundlagen fehlen. Wenn ihm in der Praxis einmal eine Aufgabe begegnet, die aus dem Rahmen der einfachen Gebrauchsanweisung fällt, so nützt ihm sein Rechenschieber nichts mehr, weil er sich die Anwendung unter den neuen Bedingungen nicht selbst ausdenken kann. Wieviel besser ist es da, wenn man die mathematischen Voraussetzungen für den Gebrauch des Rechenschiebers beherrscht!

Dadurch wächst nicht nur die Sicherheit im Gebrauch des Rechenschiebers, sondern die Anwendungsmöglichkeiten vervielfachen sich. Außerdem gestattet das Beherrschen der mathematisch-theoretischen Grundlagen des Rechenschiebers, mit Hilfe der Logarithmentafeln die Logarithmen auch schriftlich anzuwenden. In dem vorliegenden Buche sind erstmalig in der einschlägigen Literatur die Rechenschiebereinstelluugen photographisch festgehalten worden. Dadurch wird dem Anfänger das Lernen ungemein erleichtert, denn er kann stets die von ihm gewählte Schiebereinstellung mit der auf dem Bilde vergleichen.

Der Verfasser hat die Anwendungsbeispiele hauptsächlich der Physik, als der Grundlage der Technik, entnommen, um zu erreichen, daß sich möglichst jeder Lernende angesprochen fühlt. Die Auswahl der Beispiele erfolgte nach dem Gesichtspunkt der grundsätzlichen Übertragbarkeit auf andere, fachlich enger begrenzte Berechnungen. Die angegebenen Wege der Lösung mit Hilfe des Rechenschiebers sind selbstverständlich nicht die allein möglichen, doch dürften sie in der Regel die praktischsten sein.

Die Schnelligkeit, mit der die erste und zweite Auflage dieses Büchleins vergriffen waren, zeigt, wie dringend notwendig eine leicht faßliche und dennoch umfassende Erklärung und Anleitung zum Gebrauch des Rechenschiebers ist. In die neue Auflage wurden zahlreiche Ergänzungen und Erweiterungen aufgenommen, außerdem wurden notwendige Berichtigungen eingearbeitet, die auf Anregungen aus dem Leserkreis zurückgehen. An dieser Stelle sei den Herren *Eberding* (Dresden), *Schreen* (Pasewalk), *Jack* (Berlin) und *Gardels* (Hamburg) für ihre Verbesserungsvorschläge gedankt. Die Zentralstelle für das Fachschul-Fernstudium, Konsultationsbezirk Cottbus, half durch ihre gründliche Überarbeitung mit, die neue Auflage weiter zu verbessern.

Nach der guten Aufnahme der ersten beiden Auflagen des Werkes entschlossen wir uns, die dritte, verbesserte Auflage in der neuen, verbilligten Serie populärtechnischer Bücher herauszugeben. Möge auch die anschauliche äußere Gestaltung des Buches dazu beitragen, den Rechenschieber, das universale Rechenwerkzeug für alle, in weiten Leserkreisen bekanntzumachen.

Berlin/Leipzig, Frühjahr 1954 — Verfasser und Verlag

VORWORT

ZUR VIERTEN, ERWEITERTEN AUFLAGE

Die vierte Auflage ist durch einige Ergänzungen und durch vier weitere Kapitel wesentlich erweitert und verbessert worden. Dem Teil A wurde noch ein Kapitel vorangestellt, eine Betrachtung, was man mit dem Rechenschieber berechnen kann und welche mathematischen Voraussetzungen dafür gegeben sein müssen. Das Kapitel „Konstante Verhältnisse“ wurde durch einen Nachtrag „Proportionen“ erweitert. Desgleichen erhielt das Kapitel „Die Sinusteilung“ eine interessante Ergänzung. Auch die Kapitel „Der natürliche Logarithmus und die natürliche Exponentialfunktion“ und „Potenzen und Wurzeln mit anderen Exponenten als 2 und 3“ wurden erweitert. Neu hinzugekommen sind die Kapitel: „Die hyperbolischen Winkelfunktionen“, „Die Teilungen $\pi \cdot x$ und $\frac{1}{\pi \cdot x}$“ sowie eine allgemeine Besprechung „Die Auswahl des richtigen Rechenschiebers“.

Inzwischen hat das Büchlein „Der Rechenschieber“ viele Freunde gefunden, die diesen Leitfaden für ihre Ausbildung, ihren Beruf usw. gut gebrauchen können. Diese neue Auflage soll nun noch in verstärktem Maße Interesse für den Rechenschieber, den mathematischen Helfer in Theorie und Praxis, erwecken.

Berlin, Winter 1954/55 — H. W. Fricke

INHALT

Der Rechenschieber, ein wertvoller Helfer in Theorie und Praxis

In früheren Jahren war der Besitz eines Rechenschiebers mehr oder weniger das Privileg des „akademisch“ Gebildeten. Zur höheren technischen Intelligenz gehörte ebenso ein weißer Rechenstab, bei dessen Anblick allein schon der nötige Respekt eintrat. Doch im Laufe der Zeit hat sich das grundlegend geändert. Heute ist der Rechenschieber in der Hand des Facharbeiters durchaus keine Seltenheit mehr. Doch denen, die im Rechenschieber noch immer das äußere Zeichen einer „besonderen Stellung“ sehen, sei gesagt, daß man mit diesem weißen Zahlenstab *sehr wohl* Aufgaben der höheren Mathematik lösen kann, er ist aber auch sehr gut als „Lineal“ verwendbar. Die mit ihm gezogenen Linien sind keine gewöhnlichen Linien mehr, es sind in gewisser Hinsicht „akademische“ geworden. Allein dieses Verfahren bleibt Eigentum des Vorsemesters.
Andererseits kann man sich an den Gebrauch des Rechenschiebers sehr gewöhnen. Auch die einfachsten Berechnungen, die sonst spielend, fast ohne nachzudenken, im Kopf erledigt werden, müssen dann unbedingt mit dem „Schieber“ gerechnet werden. Bei diesen Leuten ist 3 mal 3 auf dem Schieber etwa 8,99. Es erübrigt sich wohl, erst zu sagen, daß diese Methode nicht ganz die richtige ist. Grundsätzlich soll der Rechenschieber das Kopfrechnen *nicht ersetzen*, denn dieses erhält den Geist beweglich und ist außerdem beim Gebrauch des Rechenschiebers unbedingt erforderlich.
Das sei also vorausgeschickt. So gänzlich ohne „Mitrechnen“ geht es nicht, aber dennoch ist der Rechenschieber bei vielen Rechenverfahren eine sehr große Hilfe, ja oftmals werden die Berechnungen erst durch ihn ermöglicht, weil man sonst eine Logarithmentafel zu Rate ziehen müßte. Und damit taucht sogleich die Frage auf, *was* man alles mit dem Rechenschieber rechnen kann. Antwort: So ziemlich alles — ausgenommen die Totoergebnisse und die Rechenverfahren des Integrierens und Differenzierens, also der speziellen höheren Mathematik. Und *wer* kann mit dem Rechenschieber umgehen? Welche Voraussetzungen müssen gegeben sein?
Diese Frage ist nicht mehr so leicht zu beantworten, denn das hängt stark von den jeweiligen persönlichen Fähigkeiten ab. Aber eines

kann mit Sicherheit gesagt werden, daß nämlich keine besonders großen mathematischen Vorkenntnisse nötig sind, und deshalb wird auch der Grundschüler die Handhabung schnell erlernen können, wenn er genügend Liebe zur Sache mitbringt und sich die allgemeinen mathematischen Grundlagen aneignet. Dafür gibt es zwei verschiedene Wege. Der erste und einfachste ist der des gewissermaßen „mechanischen Erlernens" der Handgriffe, die beim Multiplizieren, Dividieren, Radizieren und Potenzieren nötig sind. Wer diesen Weg beschreitet, hat unbestreitbar den Vorteil für sich, auf *schnellstem Wege* zum Ziel zu gelangen. Ihm kann es aber passieren, daß er nicht ganz genau weiß, was z. B. eine Kubikwurzel ist, er kann sie nicht recht erklären, aber auf dem Schieber kann er sie schnell und sicher ausrechnen. Für den allgemeinen Gebrauch an der Werkbank, wie überhaupt in der Praxis, mag das vielleicht genügen, richtiger aber ist es, man macht sich mit der Materie besser vertraut und beschreitet den zweiten Weg (was auch nachträglich noch erfolgen kann). In diesem Falle lernt man etwas Mathematik hinzu, freundet sich zunächst mit den zu Unrecht so gefürchteten Logarithmen an und geht erst danach zum Rechenschieber über. Nach dieser Methode dauert es *etwas* länger, das Verfahren aber ist gründlicher und der Vorteil wird sich bald bemerkbar machen. Man setzt sich ja auch nicht an das Steuer eines Autos und fährt los, nur weil man versteht, das Lenkrad zu drehen. Setzt der Motor aus, so sitzt der Fahrer hilflos da und verzweifelt an des Geschickes Mächten. Doch denen, die sich selbst von diesem schönen Beispiel nicht überzeugen lassen und die Scheu vor der gefürchteten Mathematik nicht überwinden können, sei verraten, daß für sie dieses Büchlein mit der Seite 34 beginnt, nämlich dort, wo der praktische Gebrauch des Rechenschiebers erläutert wird.

Doch nun noch einige Worte zu den Möglichkeiten, die der Rechenschieber bietet. Ausgenommen die Addition und Substraktion von Zahlen, die auf dem Schieber nicht erledigt werden können, sind alle anderen Rechenverfahren, also Multiplizieren, Dividieren, Wurzelziehen und Potenzieren (Hochzahlrechnen) sehr erleichtert und können deshalb schnell durchgeführt werden. Das macht sich ganz besonders dann bemerkbar, wenn viele Einzelergebnisse verlangt werden, wie etwa beim Aufstellen von Tabellen, Nomogrammen, bei der Ermittlung von Kurven, graphischen Darstellungen usw. Auch kombinierte Berechnungen, bei denen mehrmaliges Multiplizieren und Dividieren zusammen mit Wurzelziehen und Potenzieren auftreten, können relativ schnell und sicher erledigt werden. Darüber hinaus kann ein Rechenschieber selbst als Tabelle dienen, da man alle Quadratzahlen, alle Kubikzahlen, Logarithmen und reziproken Werte einfach nur abzulesen braucht. Selbst für die Winkelfunktionen sind einige Skalen vorgesehen, so daß auch die meisten Rechnungen der Trigonometrie auf dem Rechenschieber durchgeführt werden können. Die erweiterten Rechenschieber bieten noch viele andere Möglichkeiten, die hier nicht näher erörtert werden sollen; ihnen sind die Kapitel ab Seite 34 gewidmet. Für einige Berufe, wie etwa Kaufmann, Maschinenbauer, Elektriker usw., gibt es Spezial-Rechenschieber, die neben den oben genannten allgemeinen Rechenverfahren noch weitere spezielle, berufsgebundene ermöglichen. Doch im Grunde genommen ist der Rechenschieber kein spezielles Rechenhilfsmittel, sondern ein universales, und deshalb hat er auch eine so große Verbreitung gefunden. Jedem Lehrling und Schüler, Gesellen, Meister und Facharbeiter ist also nur zu raten: Mit frischem Mut heran an den Rechenschieber! Die späteren Erfolge werden es lohnen!

A. Die Logarithmen sind die Grundlagen des Rechenschiebers*

Die Logarithmen bilden den Abschluß der elementaren Mathematik, auf der sich dann die „Höhere Mathematik“ aufbaut. Sie setzen außer den elementaren Rechnungsarten der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division nur noch die Potenz- und die Wurzelrechnung voraus. Die beiden letztgenannten Rechnungsarten sind vielen Älteren unter uns noch wenig geläufig; sie sollen deshalb in ihrem Wesen kurz erklärt werden.

Das Potenzieren

Wird bei einer bekannten Länge, die mit dem Buchstaben a bezeichnet werden soll, nach der quadratischen Fläche gefragt, so ist zu rechnen:

$$\text{quadratische Fläche } F = a \cdot a = a^2 \text{ (lies: } a\text{-Quadrat)**.}$$

Beispiel:

Ein Sportplatz ist 70 m lang, er ist quadratisch, d. h. er ist so lang wie breit. Wie groß ist die Fläche F?

$$F = a^2 = 70^2 = 70 \cdot 70 = \mathbf{4900\ m^2}$$

Den Ausdruck a^2 nennt man die „2. Potenz“ oder kurz das „Quadrat“ von a**.

Geometrisch gedeutet, stellt jedes Quadrat eine Fläche dar.

Etwas anders sieht es aus, wenn bei bekannter Kantenlänge a eines Würfels nach dem Rauminhalt (Volumen) V gefragt wird. Während es sich bei der Fläche nur um zwei Dimensionen (eine zweidimensionale Größe) handelt, sind es hier derer drei

---

* Zur schnellen Erlernung des praktischen Gebrauchs des Rechenschiebers genügt es, wenn die Teile III und IV des Abschnittes C (ab S. 38) studiert werden.

** a Grundzahl oder Basis.
   ^{2} Hochzahl oder Exponent.
   a^2 Potenz = Produkt aus gleichen Faktoren (beim Quadrat aus 2 gleichen Faktoren).

(eine dreidimensionale Größe). Der Inhalt berechnet sich aus Länge, Breite und Höhe. Sind diese alle gleich a, so kann geschrieben werden:

$$V = a \cdot a \cdot a = a^3 \text{ (lies: } a \text{ hoch drei)}$$

Man nennt diese Größe die „3. Potenz“ oder kurz den „Kubus“ von a.

Beispiel:

Ein Würfel besitzt die Kantenlänge $a = 30$ cm. Wie groß ist sein Rauminhalt?

$$V = a^3 = 30^3 = 30 \cdot 30 \cdot 30 = \mathbf{27\,000\ cm^3} = \mathbf{27\ dm^3} = \mathbf{27\ Liter}$$

Zusammengefaßt ist zu sagen:

a) Es wird quadriert, wenn aus bekannter Länge a die Fläche F berechnet werden soll.

b) Es wird kubiert*, wenn aus bekannter Länge a der Rauminhalt V berechnet werden soll.

Die „3. Potenz“ ist geometrisch noch vorstellbar, die 4. und alle weiteren Potenzen entziehen sich aber dieser Möglichkeit. Während man sich die Potenzen a^4, a^5, a^6, a^{10}, a^{5000} usw. jeweils als ein Produkt gleicher Faktoren vorstellen kann,

$$\begin{aligned} \text{z. B.: } a^4 &= a \cdot a \cdot a \cdot a, \\ a^5 &= a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a, \\ a^6 &= a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \quad \text{usw.,} \end{aligned}$$

ist dies unmöglich bei Potenzen mit gebrochenen Exponenten.

$$a^{0,5},\ a^{\frac{1}{7}},\ a^{\frac{2}{3}},\ a^{0,05} \quad \text{usw.**}$$

---

* Kubieren = zur 3. Potenz erheben.

** Potenzen mit gebrochenen Exponenten können als eine Potenz aufgefaßt werden, aus der eine Wurzel gezogen wird.

$$a^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{a^5}.$$

Beweis:

$$\left.\begin{aligned} \left(\sqrt[6]{a^5}\right)^6 &= a^5 \\ \left(a^{\frac{5}{6}}\right)^6 &= a^{\frac{5 \cdot 6}{6}} = a^5 \end{aligned}\right\} \sqrt[6]{a^5} = a^{\frac{5}{6}}$$

(vgl. S. 8 u. 12).

Wie später noch ersichtlich wird, lassen sich derartige Potenzen nur mit Hilfe der Logarithmen berechnen.

Potenzen mit gleichen Hoch- und Grundzahlen (Exponenten und Basen) lassen sich addieren und subtrahieren.

Beispiele:

1. $2^3 + 2^3 + 2^3 = 3 \cdot 2^3 = 3 \cdot 8 = 24$
2. $3^{0,7} + 3^{0,7} - 3^{0,7} = 3^{0,7}$
3. $5^2 + 5^2 + 5^2 - 2 \cdot 5^2 = 5^2 = 25$
4. $a^b + a^b + a^b = 3a^b$

Potenzen mit gleichen Grundzahlen und verschiedenen Hochzahlen können multipliziert, dividiert, potenziert und radiziert (s. auch S. 8) werden. Für die Exponenten dieser Potenzen gelten folgende Regeln, die auch für das Rechnen mit den Logarithmen gelten.

1. *Multiplikation*

Die Aufgabe $2^3 \cdot 2^4$ kann so aufgefaßt werden:

$$2^3 \cdot 2^4 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3\,\text{mal}} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{4\,\text{mal}} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{3 + 4 = 7\,\text{mal}} = 2^{3+4} = 2^7$$

Die *Exponenten werden addiert.*

2. *Division*

Es wird eine ähnliche Aufgabe gewählt:

$$\frac{2^6}{2^3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2} = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$$

oder

$$\frac{2^6}{2^2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$$

Es kann auch geschrieben werden:

$$2^6 : 2^3 = \frac{2^6}{2^3}, \quad 2^6 : 2^2 = \frac{2^6}{2^2} \quad \text{usw.}$$

Der Exponent des Ergebnisses entspricht der Differenz der Exponenten. Also gilt:

$$\frac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2 \quad \text{und} \quad \frac{2^6}{2^3} = 2^{6-3} = 2^3$$

3. *Potenzieren*

Eine Potenz kann auch potenziert werden, wie das nachfolgende Beispiel zeigt:

$$(2^3)^4 = 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 = 2^{3+3+3+3} = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12}$$

oder:

$$(2^3)^4 = (\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3\,\text{mal}})^4 = \underbrace{\overbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2)}^{3\,\text{mal}} \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2)}_{4 \cdot 3 = 12\,\text{mal}}$$

$$2^{3 \cdot 4} = 2^{12}$$

Die Exponenten werden miteinander multipliziert.

Für Potenzen mit gleichen Exponenten, aber verschiedenen Basen gilt:

$$2^4 \cdot 3^4 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{4\,\text{mal}} \cdot \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{4\,\text{mal}} = (2 \cdot 3)^4 = 6^4$$

und:

$$\frac{6^4}{3^4} = \frac{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \left(\frac{6}{3}\right)^4 = 2^4$$

Das Radizieren (Wurzelziehen)*

Wird beim Potenzieren bei gegebener Länge a die Fläche F und bei gegebener Kantenlänge a der Rauminhalt V gesucht, so ist es beim Radizieren gerade umgekehrt.

Bei gegebener quadratischer Fläche F wird die Länge a gesucht.

Beispiel:

Ein gleichseitiger Sportplatz hat eine Fläche von $2500\,\text{m}^2$. Wie groß ist die Seitenlänge a?

Diese Aufgabe wird so geschrieben:

$a = \sqrt[2]{2500} = 50$ (es wird gelesen: Quadratwurzel oder 2. Wurzel aus $2500 = 50$), denn es gilt: $50^2 = 2500$, Länge $a = 50$ m.

Bei der Quadratwurzel wird der Wurzelexponent (2) meist weggelassen.

$$a = \sqrt{2500}$$

* Das Wurzelzeichen $\sqrt{}$ entwickelte sich im Laufe der Zeit vermutlich aus dem lateinischen *r*, dem Anfangsbuchstaben des lateinischen Wortes radix = Wurzel.

Die Umkehr der 3. Potenz ist die „3. Wurzel“, kurz „Kubikwurzel“ genannt.

Beispiel:
Ein gleichseitiger Würfel (Kubus) hat ein Volumen $V = 8\ \mathrm{m}^3$. Wie groß ist die Kantenlänge a?

$$a = \sqrt[3]{8} = 2, \quad \text{denn es gilt:} \quad 2^3 = 8$$

Wurzeln mit höheren oder gebrochenen Wurzelexponenten ($\sqrt[5]{2}$, $\sqrt[3]{20}$, $\sqrt[0,7]{8}$ usw.) sind geometrisch nicht mehr deutbar.

Das Radizieren ist also die Umkehrung des Rechenverfahrens beim Potenzieren. Allgemein kann geschrieben werden:

$$\underbrace{a = \sqrt[n]{b}}_{\text{Wurzel}} \rightarrow \underbrace{a^n = b}_{\text{Potenz}}$$

wobei n eine beliebige Zahl darstellt.

Nun kann auch die Potenzaufgabe „*Wurzel aus einer Potenz*“ gelöst werden.

Beispiele:

1. Eine quadratische Fläche F wird als Potenz geschrieben: $F = a^2$. Es wird nach der Seite gefragt: $a = \sqrt{F} = \sqrt{a^2} = a$. Die Quadratwurzel hebt das Quadrat auf.

2. $\sqrt{5^4} = \sqrt{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}$. Der Radikand* $(5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5)$ soll, da es sich um eine Quadratwurzel handelt, in zwei gleiche Faktoren zerlegt werden. Wie lauten diese Faktoren (a)? Augenscheinlich sind es $(5 \cdot 5)$. Also lautet das Ergebnis:
$$\sqrt{5^4} = \sqrt{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = 5 \cdot 5 = 5^2$$

3. $\sqrt[3]{2^6} = \sqrt[3]{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = 2 \cdot 2 = 2^2$

4. $\sqrt[4]{3^{12}} = \sqrt[4]{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3$

Der Exponent des Ergebnisses ist der Quotient aus Potenzexponent und Wurzelexponent.

$$\sqrt{3^4} = 3^{\frac{4}{2}} = 3^2 \qquad \sqrt[3]{7^6} = 7^{\frac{6}{3}} = 7^2$$

$$\sqrt[4]{3^{12}} = 3^{\frac{12}{4}} = 3^3 \qquad \sqrt[m]{b^n} = b^{\frac{n}{m}}$$

* Der Radikand ist die Grundzahl, aus der die Wurzel gezogen wird.

Das Logarithmieren

Zuerst wurde berechnet: $a^n = b$ (Potenz). Sodann wurde a gesucht: $\sqrt[n]{b} = a$ (Wurzel). Nun wird n gesucht, und man schreibt:

$$n = {}^{a}\log b^{*}$$

Wird der Exponent einer Potenz gesucht, von der die Basis und das Ergebnis bekannt sind, so nennt man dieses *Logarithmieren.* Ist das Radizieren *eine* Umkehrung, so ist das Logarithmieren eine *zweite* Umkehrung des Potenzierens.

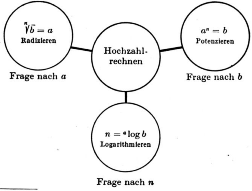
Beispiel:

Potenz: $10^2 = 100$

Wurzel: $\sqrt{100} = 10$

Logarithmus zur Basis 10: $\lg 100 = 2$; denn $10^2 = 100$

Den Zusammenhang zwischen Potenz, Wurzel und Logarithmus kann man schematisch darstellen.



* Es wird gelesen: n ist der Logarithmus von b zur Basis a. log Logarithmus, allgemein; lg gewöhnlicher (dekadischer, Briggsscher) Logarithmus mit der Basis 10; ln natürlicher Logarithmus mit der Basis e (s. S. 128).

Es bestehen also drei Möglichkeiten des Hochzahlrechnens.

Wie kann man nun das Logarithmieren deuten? An Hand einiger Beispiele läßt sich diese Frage am besten beantworten.

1. Die Zahl b sei 9, und die Zahl a sei 3. Zwischen beiden Zahlen besteht ein Zusammenhang nach vorstehenden Gleichungen. Wie lautet der Exponent n?

n muß 2 sein, denn es gilt: $a^n = b \rightarrow 3^2 = 9$.*

Demnach handelt es sich bei $b = 9$ um eine Fläche. In diesem Beispiel war die Frage nach n eine Frage nach der Dimension des geometrischen Gebildes (hier ein Quadrat).

2. Die Zahl $b = 8$ und die Zahl $a = 2$ sind nach obigen Gleichungen miteinander verbunden. Wie groß ist n?

n muß 3 sein, weil $a^n = b \rightarrow 2^3 = 8$ ist.

Die Antwort auf die Frage nach der Dimension ist zu beantworten: Es handelt sich um ein Volumen (weil $n = 3$).

Die Frage nach dem Exponenten n kann man aber nur so lange als eine Frage nach der Dimension des geometrischen Gebildes auffassen, wie es sich bei n um die Zahlen 2 und 3 handelt. Bei anderen Exponenten ist das nicht mehr möglich. In diesen Fällen wird danach gefragt, wie oft die Basis mit sich selbst multipliziert wird. Aber auch diese Frage wird sinnlos, handelt es sich um die Exponenten 1 und 0.

3. Zwischen den Größen „Kraft P" und „Last Q" besteht bei einem Potenzflaschenzug folgende Beziehung:

$$P = \frac{Q}{2^n}$$

n ist dabei die Anzahl der losen Rollen.

Die Aufgabe lautet nun:

Wieviel lose Rollen besitzt der Flaschenzug, wenn die Last $Q = 8$ kg mit einer Kraft $P = 1$ kg hochgezogen wird?

Hier wird nach dem Exponenten n gefragt.

n muß 3 sein, da $2^3 = 8$ ist.

* Der Pfeil → zeigt hier und auch in allen späteren Anwendungen eine *Zugehörigkeit* an.

Eine beliebige Zahl N* kann man sich als eine Potenz vorstellen, so z. B. die Zahl 8 als 2^3, die Zahl 4 als 2^2 usw. Legt man die Basis für diese Potenzen vorher fest, so ist folglich jede Zahl N als Potenz a^n deutbar, wobei n für diese Zahl N charakteristisch ist.

Beispiel:

Als Basis wird die Zahl 2 genommen.

N	n
4	2
8	3
16	4
32	5
64	6 usw.

Also ist 2 der Logarithmus der Zahl 4 zur Basis 2
„ „ 3 „ „ „ „ 8 „ „ 2
„ „ 4 „ „ „ „ 16 „ „ 2 usw.

Der Logarithmus ist der Exponent einer Potenz (mit feststehender Basis), deren Wert die Zahl (der Numerus) ist. Beim Logarithmieren rechnet man also nicht mit den eigentlichen Zahlen (N), sondern mit angenommenen Potenzen, die man an ihre Stelle setzt. Weil diese Potenzen nun alle die gleiche Basis haben, wird das Logarithmieren ein Rechnen mit den Exponenten dieser Potenzen, und für dieses Rechnen gelten die bereits erläuterten Regeln des Potenzierens.

Beispiele:

1. Es soll gerechnet werden: $4 \cdot 8 = 32$. Nun ist die Zahl 4 als Zweierpotenz (Basis 2):

$$4 = 2^2$$

Für die Zahl 8 gilt analog: $8 = 2^3$. Die Rechnung lautet nun

$$4 \cdot 8 = 2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3} = 2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$$

Hier werden die Exponenten, also die Logarithmen der Zahlen 4 und 8, addiert.

Bei der Multiplikation von Potenzen mit gleichen Basen werden die Logarithmen addiert.

* N vom lateinischen numerus = Zahl

2. $\frac{64}{8} = \frac{2^6}{2^3} = 2^{6-3} = 2^3 = 8$

Bei der Division von Potenzen mit gleichen Basen werden die Logarithmen subtrahiert.

3. $32^2 = (2^5)^2 = 2^{5 \cdot 2} = 2^{10} = 1024$

Beim Potenzieren werden die Logarithmen multipliziert.

4. $\sqrt{16} = \sqrt[2]{2^4} = 2^{\frac{4}{2}} = 2^2 = 4$

Beim Radizieren werden die Logarithmen dividiert.

Aus Bild 1 sind auch die Zweierlogarithmen* der Zahlen 1, 2, 3, 5, 6, 7 usw. zu ersehen.

N	n
1	0
2	1
3	1,58
4	2
5	2,32
6	2,58

usw.

N	n
0,5	-1
0,25	-2
0,125	-3

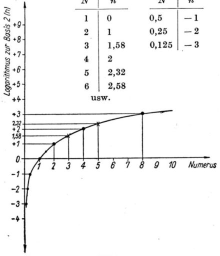


Bild 1

* Logarithmen zur Basis 2.

Beispiele:

1. Die Aufgabe $2 \cdot 3$ soll mit Hilfe der Logarithmenkurve in Bild 1 gerechnet werden.

$$2 \cdot 3 = 2^1 \cdot 2^{1,58} = 2^{1+1,58} = 2^{2,58}$$

2,58 ist der Logarithmus (zur Basis 2) einer Zahl, die aus der Kurve abgelesen werden kann. Es ist die Zahl (Numerus) 6.

2. $\frac{3 \cdot 5}{4} = x$ $\qquad 3 = 2^{1,58}$

$5 = 2^{2,32}$

$4 = 2^2$

$$\frac{2^{1,58} \cdot 2^{2,32}}{2^2} = \frac{2^{1,58+2,32}}{2^2} = 2^{3,9-2} = 2^{1,9}$$

Aus der Kurve entnehmen wir für den Logarithmus 1,90 den Numerus 3,75.

Aus der logarithmischen Kurve in Bild 1 lassen sich leicht weitere Logarithmen ablesen:

N	n
0,125	-3
0,25	-2
0,5	-1
1	0
2	1
4	2
8	3

usw.

3 ist der Logarithmus von 8 $\rightarrow 2^3 = 8$ (zur Basis 2)
0 „ „ „ „ 1 $\rightarrow 2^0 = 1$
-1 „ „ „ „ 0,5 $\rightarrow 2^{-1} = 0,5$
-2 „ „ „ „ 0,25 $\rightarrow 2^{-2} = 0,25$
-3 „ „ „ „ 0,125 $\rightarrow 2^{-3} = 0,125$ usw.

Negative Logarithmen sind negative Exponenten. Potenzen mit negativen Exponenten ergeben sich bei den Divisionsaufgaben, z. B.

$$\frac{2^3}{2^6} = 2^{3-6} = 2^{-3} \quad \text{und} \quad \frac{2^5}{2^6} = 2^{5-6} = 2^{-1}$$

Potenzen mit negativen Exponenten sind demnach Kehrwerte der Potenz mit positiven Exponenten.

$$2^{-2} = \frac{1}{2^2} \qquad 2^{-5} = \frac{1}{2^{+5}} = \frac{1}{2^5}$$

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} \qquad 2^{-7} = \frac{1}{2^7} \quad \text{usw.}$$

$$2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$$

Der Sonderfall 2^0 kann so erklärt werden: $\frac{2^1}{2^1} = 2^{1-1} = 2^0 = 1$; denn $\frac{2^1}{2^1} = \frac{2}{2} = 1$.

Jede Potenz mit dem Exponenten 0 *ergibt die Zahl* 1.

Ebenso ist $5^0 = \frac{5}{5} = 1$.

Die Zweierlogarithmen höherer Zahlen (Numeri):

N	*n*
16	4
32	5
64	6
128	7
256	8
512	9
1024	10
2048	11
4096	12

usw.

Beispiele:

1. $16 \cdot 64 = x$

   $^2\log 16 = 4, \quad ^2\log 64 = 6, \quad 4 + 6 = 10$

   10 ist der Logarithmus des Numerus 1024. $16 \cdot 64 = \mathbf{1024}$.

2. $\frac{512}{8} = x, \quad ^2\log 512 = 9, \quad ^2\log 8 = 3, \quad 9 - 3 = 6$

   6 ist der Logarithmus von 64, $x = \mathbf{64}$.

3. $16^3 = x, \quad ^2\log 16 = 4, \quad 3 \cdot 4 = 12$

   12 ist der Logarithmus von 4096, $x = \mathbf{4096}$.

4. $\sqrt[4]{4096} = x, \quad ^2\log 4096 = 12, \quad 12 : 4 = 3$

   3 ist der Logarithmus von 8, $x = \mathbf{8}$.

5. $1024 \cdot 0{,}125 = x, \quad ^2\log 1024 = 10, \quad ^2\log 0{,}125 = -3,$

   $10 + (-3) = 10 - 3 = 7,$

   7 ist der Logarithmus von 128, $x = \mathbf{128}$.

6. $\frac{256}{0{,}25} = x, \ ^2\log 256 = 8, \ ^2\log 0{,}25 = -2, \ 8 - (-2) = 8 + 2 = 10,$

   10 ist der Logarithmus von 1024, $x = \mathbf{1024}$.

7. $0{,}5^2 = x, \quad ^2\log 0{,}5 = -1, \quad 2 \cdot (-1) = -2,$

   -2 ist der Logarithmus von 0,25, $x = \mathbf{0{,}25}$.

8. $\sqrt[3]{0{,}125} = x, \quad ^2\log 0{,}125 = -3, \quad (-3) : 3 = -1,$

   -1 ist der Logarithmus von 0,5, $x = \mathbf{0{,}5}$.

Zusammenfassend kann gesagt werden:

Der Logarithmus ist ein Exponent eines Potenzsystems mit gleichbleibender Basis. Wenn also 8 der (Zweier-) Logarithmus der Zahl 256 ist, was so geschrieben wird:

$$8 = {}^2\log 256,$$

so muß mithin gelten:

$$2^{^2\log 256} = 2^8 = 256.$$

Daraus ergibt sich weiterhin, daß sämtliche Regeln für das Rechnen mit Logarithmen in Wirklichkeit Regeln des Potenzrechnens sind. Diese lauten für das Zweiersystem:

1. Multiplikation von Zahlen:

$$a \cdot b \rightarrow {}^2\log(a \cdot b) = {}^2\log a + {}^2\log b$$

Addition der Logarithmen.

$$8 \cdot 16 \rightarrow {}^2\log(8 \cdot 16) = {}^2\log 8 + {}^2\log 16$$

Der Logarithmus eines Produktes ist gleich der Summe der Logarithmen der einzelnen Faktoren.

2. Division von Zahlen:

$$\frac{a}{b} \rightarrow {}^2\log \frac{a}{b} = {}^2\log a - {}^2\log b$$

Subtraktion der Logarithmen.

$$\frac{128}{32} \rightarrow {}^2\log \frac{128}{32} = {}^2\log 128 - {}^2\log 32$$

Der Logarithmus eines Quotienten ist gleich der Differenz der Logarithmen von Zähler und Nenner.

3. Potenzieren von Zahlen:

$$a^2 \rightarrow {}^2\log a^2 = 2 \cdot {}^2\log a$$

Multiplikation der Logarithmen (2 ist als Exponent auch ein Logarithmus).

$$8^2 \rightarrow {}^2\log 8^2 = 2 \cdot {}^2\log 8$$

Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Produkt aus dem Exponenten und dem Logarithmus der Basis.

4. Radizieren von Zahlen:

$$\sqrt[3]{a} \rightarrow {}^2\log \sqrt[3]{a} = \frac{{}^2\log a}{3}$$

Division der Logarithmen (3 ist als Wurzelexponent auch ein Logarithmus).

$$\sqrt[3]{64} \rightarrow {}^2\log \sqrt[3]{64} = \frac{{}^2\log 64}{3}$$

Der Logarithmus einer Wurzel ist gleich dem Quotienten aus dem Logarithmus des Radikanden und dem Wurzelexponenten.

Wenn man das Wesen der Logarithmen an dem Zweierlogarithmus auch gut erklären kann, so haben diese jedoch für die Praxis keine Bedeutung. Die in den Logarithmentafeln enthaltenen „gewöhnlichen Logarithmen“ gliedern sich in das dekadische Zahlensystem* ein, weshalb man sie auch „Dekadische Logarithmen“ nennt. Daraus ergeben sich für das praktische Rechnen viele Vereinfachungen. Wie bereits gesagt, sind die Logarithmen Exponenten; da es nun weiterhin ein dekadisches System ist, handelt es sich folglich um die bekannten „Zehnerpotenzen“, die in der folgenden Reihe aufgeführt sind.

$$\begin{aligned}
0{,}000\,001 &= \frac{1}{1\,000\,000} = \frac{1}{10^6} = 10^{-6}\\
0{,}000\,01 &= \frac{1}{100\,000} = \frac{1}{10^5} = 10^{-5}\\
0{,}000\,1 &= \frac{1}{10\,000} = \frac{1}{10^4} = 10^{-4}\\
0{,}001 &= \frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3} = 10^{-3}\\
0{,}01 &= \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}\\
0{,}1 &= \frac{1}{10} = \frac{1}{10^1} = 10^{-1}\\
1 &= \frac{1}{1} = 10^0\\
10 &= 10^1\\
100 &= 10^2\\
1000 &= 10^3\\
10\,000 &= 10^4\\
100\,000 &= 10^5\\
1\,000\,000 &= 10^6
\end{aligned}$$

* Dekadisches Zahlensystem = Zehnersystem. Die gewöhnlichen oder dekadischen Logarithmen werden auch häufig nach dem ersten Berechner der Logarithmentafeln „Briggssche Logarithmen“ genannt.

Die Exponenten der Zehnerpotenzen sind die Logarithmen der in dieser Reihe links stehenden Zahlen. Es gilt:

${}^{10}\log 0{,}000001 = -6$	${}^{10}\log 1 = 0$
${}^{10}\log 0{,}00001 = -5$	${}^{10}\log 10 = 1$
${}^{10}\log 0{,}0001 = -4$	${}^{10}\log 100 = 2$
${}^{10}\log 0{,}001 = -3$	${}^{10}\log 1000 = 3$
${}^{10}\log 0{,}01 = -2$	${}^{10}\log 10000 = 4$
${}^{10}\log 0{,}1 = -1$	${}^{10}\log 100000 = 5$
	${}^{10}\log 1000000 = 6$

Aus dieser Aufstellung ist zu ersehen:

Der Logarithmus von 1 ist gleich 0, da $10^0 = 1$ ist.

$$(10^0 = 10^{10}\log 1 = 1) \quad \text{(siehe S. 13 u. 14)}$$

Der Logarithmus von 10 ist gleich 1, da $10^1 = 10$ ist.

$$(10^1 = 10^{10}\log 10 = 10)$$

Mithin liegen die Logarithmen aller Zahlen von 1 bis 10 zwischen 0 und 1, und weiterhin die Logarithmen aller Zahlen zwischen

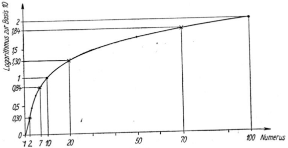


Bild 2

10 und 100 liegen zwischen 1 und 2 usw. Die Kurve in Bild 2 zeigt, wie man diese Zwischenwerte ermitteln kann. In der Kurve sind eingezeichnet:

$${}^{10}\log 2 = 0{,}30 \quad \text{und} \quad {}^{10}\log 7 = 0{,}84$$

außerdem: ${}^{10}\log 1 = 0, \quad {}^{10}\log 10 = 1, \quad {}^{10}\log 100 = 2$

Die Logarithmen der Zahlen 20 und 70 unterscheiden sich von denen der Zahlen 2 und 7 lediglich darin, daß statt der vorangestellten 0 eine 1 steht. Bei 200 und 700 ist es dann eine 2 (2,30 und 2,84), bei 2000000 und 7000000 heißt es 6,30 und 6,84 usw. Mit der Kenntnis der Logarithmen aller Zahlen zwischen 1 und 10 lassen sich alle anderen Logarithmen entwickeln.

${}^{10}\log 1 = 0{,}000$	${}^{10}\log 4 = 0{,}602$	${}^{10}\log 7 = 0{,}845$	${}^{10}\log 9 = 0{,}954$
${}^{10}\log 2 = 0{,}301$	${}^{10}\log 5 = 0{,}699$	${}^{10}\log 8 = 0{,}903$	${}^{10}\log 10 = 1{,}000$
${}^{10}\log 3 = 0{,}477$	${}^{10}\log 6 = 0{,}778$		

Normgemäß schreibt man zur Vereinfachung bei den Zehnerlogarithmen nicht ${}^{10}\log$, sondern nur lg, was von nun an auch im nachfolgenden Text erfolgen wird.

Wie ist es nun zu erklären, daß $\lg 2 = 0{,}301$ und $\lg 20 = 1{,}301$ und $\lg 200 = 2{,}301$ ist?

Zunächst ist $\lg 2 = 0{,}301$. Für $\lg 20$ kann man schreiben $\lg(2 \cdot 10) = \lg 2 + \lg 10$.

Das ergibt $\lg 2 = 0{,}301$ und $\lg 10 = 1{,}000$

$$\begin{array}{r} 0{,}301 \\ +\ 1{,}000 \\ \hline \lg 20 = 1{,}301 \end{array}$$

Für Zahlen kleiner als 1 gilt analog:

$$\lg 2 = 0{,}801, \quad \lg 0{,}02 = \lg\left(2 \cdot \frac{1}{100}\right)$$

$$\lg \frac{1}{100} = \lg \frac{1}{10^2} = \lg 10^{-2} = -2$$

$$\begin{array}{r} \lg 2 = 0{,}301 \\ +\ \lg 10^{-2} = 0{,}000 - 2 \\ \hline \lg 0{,}02 = 0{,}301 - 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \lg 0{,}0002 & = 0{,}301 - 4 \\ \lg 0{,}002 & = 0{,}301 - 3 \\ \lg 0{,}02 & = 0{,}301 - 2 \\ \lg 0{,}2 & = 0{,}301 - 1 \ (\text{oder: } -0{,}699)^* \\ \lg 2 & = 0{,}301 - 0, \text{ also } 0{,}301 \\ \lg 20 & = 0{,}301 + 1, \quad ,, \quad 1{,}301 \\ \lg 200 & = 0{,}301 + 2, \quad ,, \quad 2{,}301 \\ \lg 2000 & = 0{,}301 + 3, \quad ,, \quad 3{,}301 \quad \text{usw.} \end{array}$$

---

* Diese Form der Logarithmen soll hier nicht behandelt werden.

Das gleiche gilt für jede andere Zahl. Hier noch einige weitere Beispiele:

1.

$$\begin{aligned} \lg 0{,}003 &= 0{,}477 - 3 \\ \lg 0{,}3 &= 0{,}477 - 1 \\ \lg 3 &= 0{,}477 \\ \lg 30000 &= 3{,}477 \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \lg 3{,}47 &= 0{,}540 \quad \text{(Dieser Wert wurde einer Logarithmentafel entnommen)} \\ \lg 0{,}0374 &= 0{,}540 - 2 \\ \lg 347 &= 2{,}540 = 0{,}540 + 2 \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \lg 2{,}85 &= 0{,}455 \\ \lg 0{,}285 &= 0{,}455 - 1 \\ \lg 28{,}5 &= 1{,}455 = 0{,}455 + 1 \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

Durch die Kenntnis der Logarithmen der Zahlen von 1 bis 10 ist man in der Lage, die Logarithmen aller Zahlen zu entwickeln. Darin liegt der große Vorteil der dekadischen Logarithmen gegenüber allen anderen Logarithmensystemen.

Wie die angeführten Beispiele zeigen, besteht der Logarithmus einer Zahl aus zwei Anteilen, einer *ganzen Zahl* und einem *echten Dezimalbruch*. Die positive oder negative ganze Zahl wird *Kennziffer*, der Dezimalbruch aber *Mantisse* genannt.

Zahlen mit gleicher Ziffernfolge, d. h. Zahlen, die sich nur durch eine Zehnerpotenz unterscheiden, haben stets dieselbe Mantisse. Zahlen größer als 10 haben eine positive Kennziffer. Zahlen zwischen 1 und 10 haben die Kennziffer 0. Zahlen zwischen 0 und 1 haben eine negative Kennziffer, die hinter die Mantisse gestellt wird.

Beispiele:

$$\text{Zahlen größer als 10:}\left\{\begin{aligned} \lg 20 &= 1{,}301 \\ \lg 200 &= 2{,}301 \\ \lg 2000 &= 3{,}301 \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} \text{Mantisse: 0,301 (Tafelwerte)} \\ \text{Kennziffern: 1, 2 und 3} \\ \text{(im Kopf)} \end{array}$$

$$\text{Zahlen zwischen 1 und 10: } \lg 2 = 0{,}301 \quad \left\{\begin{array}{l} \text{Mantisse: 0,301} \\ \text{Kennziffer: 0} \end{array}\right.$$

$$\text{Zahlen kleiner als 1:}\left\{\begin{aligned} \lg 0{,}2 &= 0{,}301 - 1 \\ \lg 0{,}02 &= 0{,}301 - 2 \\ \lg 0{,}002 &= 0{,}301 - 3 \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} \text{Mantisse: 0,301} \\ \text{Kennziffer: } -1,\ -2 \\ \text{und } -3 \end{array}$$

Die Kennziffer ist also immer die Zahl, die für die zuständige Zehnerpotenz als Exponent auftritt.

$$\begin{aligned} 20 &= 2 \cdot 10^1 \rightarrow \text{Kennziffer} = 1 \\ 200 &= 2 \cdot 10^2 \rightarrow \quad \text{,,} \quad = 2 \\ 2000 &= 2 \cdot 10^3 \rightarrow \quad \text{,,} \quad = 3 \\ 2 &= 2 \cdot 10^0 \rightarrow \quad \text{,,} \quad = 0 \\ 0{,}2 &= 2 \cdot 10^{-1} \rightarrow \quad \text{,,} \quad = -1 \\ 0{,}02 &= 2 \cdot 20^{-2} \rightarrow \quad \text{,,} \quad = -2 \\ 0{,}002 &= 2 \cdot 10^{-3} \rightarrow \quad \text{,,} \quad = -3 \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

Es ist daraus klar zu ersehen, daß das gute Beherrschen der Zehnerpotenzreihe Voraussetzung für das sichere Anwenden der Logarithmen ist. Nicht anzuraten ist das Auswendiglernen von Regeln, die sich auf die Anzahl der Nullen vor und nach dem Komma des Numerus beziehen*. Erreicht werden muß, daß für jede Zahl der entsprechende Exponent der Zehnerpotenzreihe bekannt ist. Damit ist auch die Kennziffer des Logarithmus dieser Zahl bekannt. Die Logarithmentafeln enthalten nur die Mantissen; die für die jeweiligen Zahlen zuständige Kennziffer muß der Benutzer der Tafel auswendig wissen. Eine einfache Logarithmentafel hat etwa folgendes Aussehen:

Zahl N	lg 1 bis 1000									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	—	0000	3010	4771	6021	6990	7782	8451	9031	9542
1	0000	0414	0792	1139	1461	1761	2041	....	....	....
2	3010	3222	3424	3617	3802	3979	....	....	....	....
3	4771	4914	5051	5185	5315	....	....	....	....	....
4	6021	6128	6232	6335	....					
5	....	....	....	....	....					
6	....									
.	....									
.										

* Oft wird dem Lernenden der Merkhinweis gegeben, daß man die Kennziffer aus der *Anzahl der Nullen* bestimmen kann.

Zum Beispiel haben alle Tausender (unter 10000) 3 Nullen, also erhält der Logarithmus die Kennziffer 3. Alle Hunderter haben 2 Nullen, also ist die Kennziffer 2. Die Einer haben keine Null, *Beispiel* (dick eingezeichnete Zahl in vorstehender Tafel):

$$\lg 24 \left\{\begin{matrix}\text{Mantisse: } 0{,}3802 \\ \text{Kennziffer: } 1\end{matrix}\right\} \lg 24 = \mathbf{1{,}3802}$$

Weitere Rechenbeispiele:

1. $2 \cdot 3 = x,$

$$\begin{aligned} \lg 2 + \lg 3 &= \lg x \\ \lg 2 &= 0{,}3010 \\ + \lg 3 &= 0{,}4771 \\ \lg 2 \cdot 3 &= 0{,}7781 \\ \lg x &= 0{,}7781 \end{aligned}$$

Die Mantisse 0,7781 ist nach obiger Tabelle dem Numerus 6 zugehörig (der Tabellenwert ist auf 2 aufgerundet).

$$\text{num } 0{,}7781 = 6$$
$$\boldsymbol{x = 6}$$

2. $\frac{8}{4} = x,$

$$\begin{aligned} \lg 8 - \lg 4 &= \lg x \\ \lg 8 &= 0{,}9031 \\ - \lg 4 &= 0{,}6021 \\ \lg x &= 0{,}3010 \\ \text{num } 0{,}3010 &= 2 \end{aligned}$$
$$\boldsymbol{x = 2}$$

3. $2^3 = x$

$$\begin{aligned} 3 \cdot \lg 2 &= \lg x \\ \lg 2 &= 0{,}3010 \\ 3 \cdot 0{,}3010 &= 0{,}9030 \\ \text{num } 0{,}9030 &= 8 \text{ (Tabellenwert ist aufgerundet)} \end{aligned}$$
$$\boldsymbol{x = 8}$$

4. $\sqrt{9} = x,$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \lg 9 &= \lg x \\ \lg 9 &= 0{,}9542 \\ \frac{1}{2} \cdot 0{,}9542 &= 0{,}4771 \\ \text{num } 0{,}4771 &= 3 \end{aligned}$$
$$\boldsymbol{x = 3}$$

---

mithin ist die Kennziffer 0. Alle Zehntel haben eine Null vor dem Komma, das ergibt die Kennziffer -1 usw.

Diese Methode halte ich indessen nicht für günstig, weil der Lernende hierbei ganz formal eine Regel lernen muß, die nur in sehr loser Verbindung mit dem Wesen der Logarithmen steht.

Zur Wiederholung: $\lg 32 = 1{,}5051,\quad$ weil $10^{1{,}5051} = 32$ ist.

$$\lg 430 = 2{,}6335 \quad \text{„} \quad 10^{2{,}6335} = 430 \text{ „}$$
$$\lg 0{,}016 = 0{,}2041 - 2$$

Die Zahl 0,016 liegt zwischen 0,01 und 0,1; also lautet die Kennziffer -2. Man kann auch sagen: $0{,}016 = \frac{1{,}6}{100} = 1{,}6 \cdot 10^{-2}$, also Kennziffer -2.

$$10^{0{,}2041-2} = 0{,}016$$

Probe:

Der Exponent $0{,}2041 - 2$ muß erst ausgerechnet werden:

$$\begin{array}{r} +\,0{,}2041 \\ -\,2{,}0000 \\ \hline -\,1{,}7959 \end{array}$$

Die Zehnerpotenz lautet nun:

$$10^{-1{,}7959} = 0{,}016$$

oder

$$\frac{1}{10^{1{,}7959}} = 0{,}016$$

Der Wert dieser Zehnerpotenz wird logarithmisch berechnet:

$$10^{1{,}7959} = x$$
$$1{,}7959 \cdot \lg 10 = \lg x$$
$$1{,}7959 \cdot 1 = 1{,}7959$$
$$\text{num } 1{,}7959 = 62{,}5 \text{ (laut Logarithmentafel)}$$
$$\frac{1}{62{,}5} = \mathbf{0{,}016}$$

Zum Abschluß sollen die 4 Rechenregeln der Logarithmen noch einmal zusammengestellt werden.

	Potenzregel	Logarithmische Umformung	Logarithmische Regel
1.	$10^p \cdot 10^q = 10^{p+q}$	$a \cdot b = 10^{\lg(a \cdot b)} = 10^{\lg a + \lg b}$ $= 10^{\lg b + \lg a}$	$\lg(a \cdot b) = \lg a + \lg b$
2.	$\frac{10^p}{10^q} = 10^{p-q}$	$\frac{a}{b} = 10^{\lg \frac{a}{b}} = \frac{10^{\lg a}}{10^{\lg b}}$ $= 10^{\lg a - \lg b}$	$\lg\left(\frac{a}{b}\right) = \lg a - \lg b$
3.	$(10^p)^q = 10^{p \cdot q}$	$a^q = 10^{\lg a^q} = (10^{\lg a})^p$ $= 10^{q \cdot \lg a}$	$\lg a^q = q \cdot \lg a$
4.	$\sqrt[q]{10^p} = 10^{\frac{p}{q}}$	$\sqrt[q]{a} = 10^{\lg \sqrt[q]{a}} = \sqrt[q]{10^{\lg a}}$ $= 10^{\frac{\lg a}{q}}$	$\lg \sqrt[q]{a} = \frac{\lg a}{q}$

B. Wie entsteht die logarithmische Skala?

Das Bild 3 zeigt, wie man zu einer logarithmischen Teilung und gleichzeitig zur logarithmischen Kurve gelangen kann. Die beiden Achsen der Zeichnung sind in Millimeter, also linear geteilt. Auf der waagerechten Achse sind die Numeri aufgetragen (0 bis 10). Für jede dieser Zahlen entnimmt man der Logarithmentafel die zugehörige Mantisse, z. B. für die Zahl 2 die Mantissen-Ziffernfolge 3010. Denkt man sich nun diese Ziffernfolge als 30,10, so ist für lg 10 die entsprechende Zahl 100. Es gilt dann:

$\lg 1 \rightarrow 00{,}00$	$\lg 6 \rightarrow 77{,}82$
$\lg 2 \rightarrow 30{,}10$	$\lg 7 \rightarrow 84{,}51$
$\lg 3 \rightarrow 47{,}71$	$\lg 8 \rightarrow 90{,}31$
$\lg 4 \rightarrow 60{,}21$	$\lg 9 \rightarrow 95{,}42$
$\lg 5 \rightarrow 69{,}90$	$\lg 10 \rightarrow 100{,}00$

Diese 100 Teile sind in Bild 3 auf der senkrechten Achse auf die Länge 125 mm* aufgetragen.

Von diesen 100 Teilen entfallen auf die Zahl 2 30,1 Teile, auf die Zahl 3 entfallen 47,71 Teile, auf die Zahl 9 entfallen 95,42 Teile.

Weil 100 Teile 125 mm entsprechen, sind es für 30,1 Teile:

$$\frac{30{,}1 \cdot 125}{100} \approx \mathbf{37{,}6\ mm}$$

Auf der senkrechten Achse beträgt die Länge der Strecke von 1 bis 2 = 37,625 mm.

Für die 47,71 Teile der Zahl 3 sind es

$$\frac{47{,}71 \cdot 125}{100} \approx \mathbf{60\ mm} \quad \text{usw.}$$

* Es ist das die Skalenlänge eines Taschenrechenschiebers, der zur Zeichnung der logarithmischen Teilung benutzt wird. (Bild 3 ist im Maßstab 1:2 verkleinert.)

Wichtig ist nur, daß beide Skalen mit den Numeri beziffert sind. Aus Bild 3 ist außerdem leicht zu ersehen, wie die logarithmische Kurve entwickelt wurde. Die Länge des Abstandes eines Punktes der N-Achse (waagerecht → Numerus) vom Schnitt-

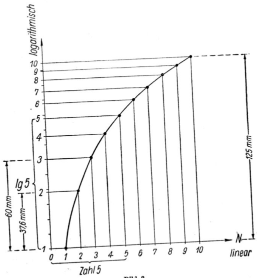


Bild 3

punkt beider Achsen stellt in einem bestimmten Maßstab (hier 100:125) den betreffenden Numerus dar, während die entsprechende Entfernung auf der L-Achse (senkrecht → Logarithmus) den dazugehörigen Logarithmus bedeutet. In Bild 3 sind die Strecken für lg 5 eingetragen.

C. Der logarithmische Rechenschieber

I. Die Theorie des Rechenschiebers

Die Wirkungsweise des Rechenschiebers können wir am besten verstehen, wenn wir zwei linear geteilte Strecken (Lineal → gleichmäßige Einteilung) nebeneinanderlegen und folgende Rechnung durchführen:

$$a + b = c$$

Wir wollen zur Zahl a die Zahl b addieren, wodurch wir als Summe die Zahl c erhalten. Selbstverständlich kann man die Aufgabe auch so schreiben:

$$b + a = c,$$

denn die Reihenfolge der Summanden ist beliebig. Wir nehmen nun folgende Zahlwerte an:

$$a = 4, \quad b = 5, \quad 4 + 5 = 9, \quad c = 9$$

Beachte:
In sämtlichen Zeichnungen sind zwei verschiedene Hinweispfeile eingezeichnet:
———→ Einstellpfeil, - - - → Ablesepfeil

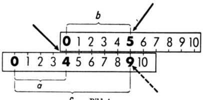


Bild 4

Bild 4 zeigt zwei linear geteilte Skalen. Auf der unteren Skala ist $a = 4$ und auf der oberen $b = 5$ eingestellt. Das Ergebnis der Addition, $c = 9$, ist wieder auf der unteren Skala abzulesen. Wie aus dem Bild zu ersehen ist, werden die linear geteilten

Strecken $a = 4$ und $b = 5$ addiert; das Ergebnis ist die Summenstrecke $c = 9$.

Weil die von uns benutzten Skalen in der Teilung nur bis zur Zahl 10 reichen, die Zahl c (Summe) aber auch über 10 liegen kann,

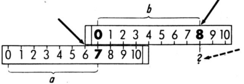


Bild 5

ist bei der Durchrechnung derartiger Beispiele ein kleiner Trick anzuwenden.

Bild 5 zeigt an dem Rechenbeispiel

$$a = 7$$
$$b = 8$$

die Unmöglichkeit der Durchführung, wie sie Bild 4 angibt.

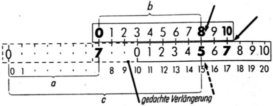


Bild 6

Wir denken uns an unserer unteren Skala rechts die gleiche Skala angehängt (Bild 6). Die gesamte untere Skala reicht nun von 0 bis 20. Von dieser Zahlenfolge entfallen auf die tatsächlich vorhandene untere Skala die Zahlen von 10 bis 20.

Jetzt kann der Wert für $c = 15$ abgelesen werden*. Wir sehen aber auch, daß über der Zahl 7 der unteren Skala die Zahl 10 der oberen Skala steht, womit uns die Möglichkeit der Einstellung

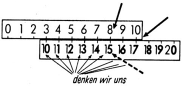


Bild 7

und Ablesung gegeben ist, ohne daß wir uns erst die Verlängerung der unteren Skala vorzustellen brauchen:

Wir stellen die 10 der oberen Skala auf $a = 7$ (oder auch $b = 8$) und lesen c unter dem Wert $b = 8$ ($a = 7$) ab. Allerdings steht da lediglich die Zahl $c = 5$; die wirkliche Stellenzahl muß man

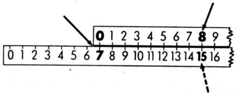


Bild 8

überschläglich durch Schätzen bestimmen. Auf Rechenschiebern müssen die Stellenwerte stets im Kopf bestimmt werden!

Bild 7 zeigt die Rechenaufgabe $7 + 8 = 15$ noch einmal, ohne die gedachte Verlängerung der unteren Skala. Vor jede Zahl

---

* Mathematisch läßt sich diese Maßnahme folgendermaßen erklären:

$$7 + 8 = 15$$

wird zu
$$7 + 8 - 10 = +5$$

Vor die Zahl 5 muß man sich auch eine 1 denken.

der unteren Skala müssen wir uns dabei eine 1 denken. Lautete die Aufgabe $70 + 80 = 150$, so ändert sich lediglich die Stellenzahl, die man durch die Überschlagsrechnung leicht ermitteln kann. Leichter ist es, die Aufgabe $7 + 8 = 15$ zu rechnen, wenn die Skalen Zahlenfolgen über 10 hinaus besitzen (Bild 8). Die Möglichkeit wird bei linear geteilten Maßstäben durch die sich ergebende große Länge der Skalen begrenzt. Wie wir noch später sehen werden, ist dieser Nachteil bei den logarithmisch geteilten Skalen nicht vorhanden. Die Rechenaufgabe $c - b = a$ ist mit diesen zwei Maßstäben als eine Subtraktion der linear geteilten Strecken durchzuführen. Nehmen wir einmal folgende Werte an:

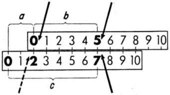


Bild 9

$$c = 7, \quad b = 5, \quad 7 - 5 = 2, \quad a = 2$$

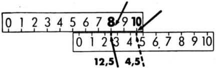


Bild 10

Bild 9 zeigt, wie von der Strecke $c = 7$ die Strecke $b = 5$ subtrahiert wird und die Strecke $a = 2$ (Differenz) übrigbleibt. Das in diesem Bild dargestellte Beispiel könnte man auch als ein Additionsbeispiel $a + b = c \rightarrow 2 + 5 = 7$ ansehen. Die Aufgabe $12{,}5 - 8 = 4{,}5$ ($c = 12{,}5$, $b = 8$, $a = 4{,}5$) kann nur mit Hilfe des besprochenen kleinen Rechentricks bewältigt werden (Bild 10*). Unter der 0 der oberen Skala läßt sich nichts ablesen,

* $12{,}5 - 8 = 4{,}5$ wird zu: $12{,}5 - 8 + 10 = 14{,}5$.

wohl aber unter der 10. Bild 11 zeigt wieder die gedachte Verlängerung, wodurch die Zusammenhänge besser veranschaulicht werden. Das Ergebnis wird unter der 10 der oberen Skala abgelesen. Durch diese gedachte Verlängerung der unteren Skala wird außerdem die eingezeichnete Zahl 12,5 verständlich.

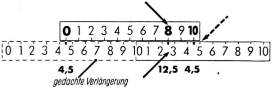


Bild 11

Was geschieht nun, wenn wir eine Addition bzw. Subtraktion logarithmisch geteilter Strecken vornehmen? Die Aufgabe lautet dann:

$$\lg a + \lg b = \lg c$$

Bild 12 zeigt die mit den logarithmisch geteilten Strecken durchgeführte Addition.

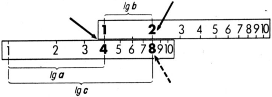


Bild 12

Die Zahlen verraten uns, daß es sich hierbei um eine Multiplikation der Numeri handelt, was unserer Erkenntnis über das Wesen der Logarithmen auch entspricht.

$$a \cdot b = c$$

$$\lg a + \lg b = \lg c$$

Das in Bild 12 angegebene Rechenbeispiel lautet:

$$a = 4 \qquad 4 \cdot 2 = 8$$
$$b = 2 \qquad c = 8$$

Bild 13 zeigt insgesamt vier Multiplikationsbeispiele.

Beispiel 1: $a = 2$, $b = 2$, $c = 2 \cdot 2 = 4$
,, 2: $a = 2$, $b = 3$, $c = 2 \cdot 3 = 6$
,, 3: $a = 2$, $b = 4$, $c = 2 \cdot 4 = 8$
,, 4: $a = 2$, $b = 5$, $c = 2 \cdot 5 = 10$

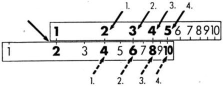


Bild 13

Auf dem Rechenschieber werden diese Multiplikationen zu Additionen der entsprechenden Logarithmen (Bild 13).

1. $\lg 2 + \lg 2 = \lg 4$ → (siehe Tab. S. 21)

$$\begin{array}{r} 0{,}301 \\ +0{,}301 \\ \hline 0{,}602 \end{array}$$
num $0{,}602 = 4$

2. $\lg 2 + \lg 3 = \lg 6$ →

$$\begin{array}{r} 0{,}301 \\ +0{,}477 \\ \hline 0{,}778 \end{array}$$
num $0{,}778 = 6$

3. $\lg 2 + \lg 4 = \lg 8$ →

$$\begin{array}{r} 0{,}301 \\ +0{,}602 \\ \hline 0{,}903 \end{array}$$
num $0{,}903 = 8$

4. $\lg 2 + \lg 5 = \lg 10$ →

$$\begin{array}{r} 0{,}301 \\ +0{,}699 \\ \hline 1{,}000 \end{array}$$
num $1{,}000 = 10$

Die Aufgabe $2 \cdot 6 = 12$ läßt sich nach der Einstellung, wie auf den Bildern 12 und 13 dargestellt, nicht durchführen. Hierbei muß wieder der kleine Trick angewendet werden, wie er auf den Seiten 28 und 29 angegeben wurde. Bild 14 zeigt die praktische Durchführung dieses Rechenbeispiels.

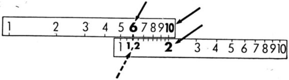


Bild 14

Die Subtraktion der Logarithmen entspricht einer Division der entsprechenden Numeri. Bild 15 zeigt eine Subtraktion logarithmisch geteilter Strecken. Von der Strecke $\lg c$ wird die Strecke $\lg b$ subtrahiert, es verbleibt die Strecke $\lg a$. Das entspricht der Aufgabe:

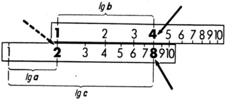


Bild 15

$$\frac{c}{b} = a, \qquad (c : b = a)$$

logarithmisch: $\lg c - \lg b = \lg a$.

Die dargestellte Aufgabe lautet:

$$c = 8, \quad b = 4, \quad \frac{8}{4} = 2 = a$$

Bild 16 zeigt die Aufgabe $\frac{20}{8} = 2{,}5$. Das Ergebnis wird unter der 10 der oberen Skala abgelesen (siehe Trick → S. 28 u. 29). *Wir sehen, daß man mit linear geteilten Maßstäben addieren und subtrahieren, mit logarithmischen hingegen multiplizieren und divi-*

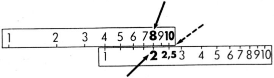


Bild 16

dieren kann. Multiplikation und Division sind die einfachsten Rechenoperationen, die mit einem logarithmischen Rechenschieber durchgeführt werden können.

Als wichtigste Regel ist zu merken:

> Die mit dem Rechenschieber zu rechnende Aufgabe ist vorher im Kopf überschläglich zu lösen. Auf diese Weise kontrolliert man die *Richtigkeit des Ergebnisses* und erhält außerdem den richtigen *Stellenwert.*

II. Der Aufbau des Rechenschiebers

Meist bestehen die Rechenschieber aus Holz, das mit Zelluloid- oder Kunststoffplatten überzogen ist. Es gibt jedoch auch solche, die ganz aus Kunststoff hergestellt sind. Neuerdings fertigen einige Firmen Rechenschieber ganz aus Metall. Ebenfalls neu sind die Zweiseiten-Rechenschieber, massiv aus Kunststoff hergestellt. Sie tragen auf beiden Seiten Teilungen, insgesamt etwa 18 bis 22 an der Zahl (wie etwa beim System „Studio" von Aristo).

An jedem Rechenschieber sind folgende drei Hauptteile zu unterscheiden:

1. der feste *Stabkörper* (der eigentliche Rechenschieber),
2. die *Zunge* (auch *Schieber* genannt),
3. der bewegliche *Läufer.*

Auf den Bildern 17 u. 18 sind die Hauptteile gut zu erkennen. Bild 17 zeigt einen Taschenrechenschieber von 12,5 cm Skalenlänge. Die normalen Rechenschieber (Bild 18) haben eine Skalenlänge von 25 cm. Für Büros usw. gibt es eine besondere Ausführung von 50 cm Skalenlänge. Bei der letztgenannten Größe ist die Ablesegenauigkeit am größten.

Man unterscheidet auf dem Rechenschieber die unbedingt nötigen *Hauptteilungen* (Skalen) von den *Zusatzteilungen*, die je nach dem

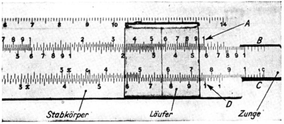


Bild 17

Verwendungszweck des Schiebers verschieden sein können. Von den Hauptteilungen trägt der Stabkörper zwei, die man auf dem Bild 17 (Taschenrechenschieber) erkennen kann: die Teilungen *A* und *D*. Die übrigen zwei Hauptteilungen trägt die Zunge: die Teilungen *B* und *C*. Als Zusatzteilung besitzt der Stabkörper über der Hauptteilung *A* (quadratische Skala von 1 bis 100) die Teilung *K* (kubische Skala von 1 bis 1000), unter der Hauptteilung *D* (Normalteilung von 1 bis 10) die Teilung *M*, die verschieden sein kann. Der in Bild 17 gezeigte Taschenrechenstab hat lediglich die vier Hauptteilungen. Der übliche 25 cm-Rechenschieber hat oben an der abgeschrägten Meßkante eine Millimeterteilung (Zentimetermaß), bis 270 mm reichend. An der unteren, senkrechten Kante befindet sich ein Verkleinerungsmaßstab 1:25. Der Taschenrechenschieber hat nur die obere Anlegekante mit der Millimeterteilung, bis 140 mm reichend.

Die Zunge weist zwischen den zwei Hauptteilungen B (quadratische Skala) und C (normale Skala) die Teilung R (reziproke Skala von

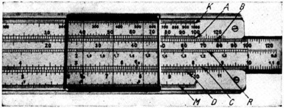


Bild 18

10 bis 1) auf (Bild 18). Auf der Rückseite befinden sich außerdem noch Teilungen (meist drei), deren Zweck später erläutert wird.

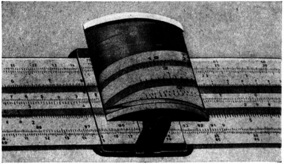


Bild 18a. Läufer mit aufgesteckter Ablese-Lupe

Der Läufer ist entweder als Einstrich- (Bild 17) oder als Dreistrichläufer (Bild 18) ausgebildet. Im letzten Falle wird der Mittel-

strich benutzt, die übrigen zwei Striche dienen besonderen Berechnungen, wie wir später noch sehen werden. Sehr praktisch sind die sog. „Lupenläufer". Bei diesen ist entweder eine halbzylindrische Linse aufgekittet, oder aber die Linse ist größer und kann nachträglich auf jeden Läufer aufgesteckt werden. Die erzielte Vergrößerung ist in der Regel eine zweifache.

Zu erwähnen sind noch die roten Verlängerungen der Teilungen nach beiden Seiten hin. Sie sollen ein Umstellen der Zunge ersparen, wenn Werte nahe 1 (oder 10) auftreten.

Normale Multiplikations- und Divisionsaufgaben rechnen wir stets auf den Hauptteilungen C, D und (wenn vorhanden) R. Hier ist die Einstellgenauigkeit am größten. Alle drei Teilungen reichen von 1 bis 10 (R von 10 bis 1). Beim 25 cm-Normalrechenschieber sind diese Skalen 25 cm lang.

Wie ist nun diese logarithmische Teilung entstanden? Nach der Tabelle auf S. 21 kennen wir die für die Zahlen von 1 bis 10 zugehörigen Logarithmen. Denken wir uns nun diese Logarithmen als Zentimeterwerte, also

$$\lg 2 = 0{,}3010 \rightarrow 0{,}3010 \text{ cm}$$

oder

$$\lg 5 = 0{,}6990 \rightarrow 0{,}6990 \text{ cm}$$

Nun multiplizieren wir mit der Zahl 25 (Skala ist 25 cm lang):

$$0{,}3010 \cdot 25 = 7{,}53 \text{ cm}.$$

Auf diese Weise erhalten wir die Strecke von 1 bis 2 auf der Normalskala, in cm gemessen. Die übrigen Strecken sind:

$$\begin{aligned}
\lg 3 &= 0{,}4771, & 0{,}4771 \cdot 25 &= 11{,}93 \text{ cm}\\
\lg 4 &= 0{,}6021, & 0{,}6021 \cdot 25 &= 15{,}05 \text{ cm}\\
\lg 5 &= 0{,}6990, & 0{,}6990 \cdot 25 &= 17{,}48 \text{ cm}\\
\lg 6 &= 0{,}7782, & 0{,}7782 \cdot 25 &= 19{,}46 \text{ cm}\\
\lg 7 &= 0{,}8451, & 0{,}8451 \cdot 25 &= 21{,}13 \text{ cm}\\
\lg 8 &= 0{,}9031, & 0{,}9031 \cdot 25 &= 22{,}58 \text{ cm}\\
\lg 9 &= 0{,}9452, & 0{,}9542 \cdot 25 &= 23{,}86 \text{ cm}\\
\lg 10 &= 1{,}0000, & 1{,}0000 \cdot 25 &= 25 \text{ cm}
\end{aligned}$$

Für den $\lg 1$ gilt: $\lg 1 = 0$.

Die logarithmischen Teilungen beginnen also immer mit 1; eine 0 gibt es auf diesen Teilungen nicht. Beim Taschenrechenschieber werden die Zentimeterwerte mit der Zahl 12,5 und beim 50 cm-Rechenschieber mit der Zahl 50 multipliziert. Bild 19 zeigt die Entwicklung der logarithmischen Teilung.

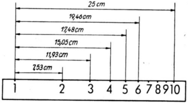


Bild 19

III. Lesen und Einstellen auf den Teilungen (Skalen)

Ehe wir den Rechenschieber praktisch benutzen, also Rechenaufgaben mit seiner Hilfe lösen können, müssen wir uns mit den Teilungen oder besser mit den Unterteilungen der Skalen vertraut machen.

Die Skalen des logarithmischen Rechenstabes sind bekanntlich nicht wie die eines Lineals gleichmäßig eingeteilt, vielmehr verengen sich die Abstände zwischen den Zahlen immer mehr, je weiter man nach rechts kommt. Immer sind die Abstände verschieden groß. Während die beiden Teilungen *A* und *B* einander gleich sind, stimmen die Teilungen *C*, *D* und *R* (jedoch gegenläufig) überein. Die auf diesen Teilungen angebrachten Zahlen sind ohne Berücksichtigung des Kommas abzulesen. Lautet die auf dem Rechenschieber eingestellte Zahl (das Ergebnis einer Rechenoperation) beispielsweise 1,25 oder 12,5, so lesen wir ab 1-2-5 (eins, zwei, fünf) oder:

80,5 → 8-0-5, 1,165 → 1-1-6-5, 15,2 → 1-5-2 usw.

Uns interessiert stets nur die Ziffernfolge; die Kommastellung kann uns der Rechenschieber nicht angeben. Diese müssen wir bekanntlich (siehe S. 29) im Kopf ermitteln.

Wir wollen uns nun mit den einzelnen Skalenabschnitten der Normalteilungen (*C*, *D* und *R*) befassen. Der Abschnitt 1 bis 2 ist

auf den Teilungen der längste. Bild 20 zeigt diesen Abschnitt bei allen drei Rechenschieberarten. Dieser Abschnitt ist in Zehntel unterteilt (1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,7; 1,8; 1,9). Diese Zehntelstrecken haben nun wiederum Unterteilungen, wie sie in Bild 20 von 1 bis 1,1 eingezeichnet sind. Während man auf dem Taschenrechenschieber noch weiterhin die Fünftel der Zehntelstrecke (1 bis 1,1)* genau einstellen kann, sind es beim Normalrechenschieber nochmals Zehntel, was die Ablesegenauigkeit beträchtlich erhöht. Eine noch größere Einstellgenauigkeit

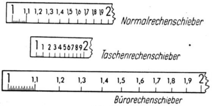


Bild 20

bietet der Bürorechenschieber, bei dem die Hundertstelstrecke (1 bis 1,01) noch einmal halbiert ist (0,005).

Nehmen wir nun den Normalrechenschieber (25 cm-Schieber). Der Abschnitt 1 bis 2 ist weiter unterteilt. Jeder Teilabschnitt hat nochmals 10 Teilabschnitte. Der Teilstrich nach dem jeweils 5. Abschnitt ist etwas länger gehalten, wodurch die Übersichtlichkeit vergrößert wird. Beschriftet sind diese kleinen Zehntelteilstriche nicht, da sonst die Übersichtlichkeit leiden würde. In dem Teilabschnitt 1 bis 2 können wir mithin 3stellige Zahlenfolgen genau einstellen, eine 4stellige muß geschätzt werden:

genau:	1-0-5, 1-0-6, 1-0-9
oder:	1-2-5, 1-5-6, 1-9-9
geschätzt:	1-0-5-3, 1-0-6-7
oder:	1-2-5-3, 1-5-6-7 u. a.

* In Bild 20 sind diese Unterteilungen nur immer von 1 bis 1,1 eingetragen, in Wirklichkeit sind sie aber auch zwischen 1,1 und 1,2 usw. bis 2 vorhanden.

Beim Büroschieber können wir eine 4stellige Zahlenfolge genau einstellen, wenn am Ende eine 0 oder 5 steht:

genau: 1-0-0-5, 1-1-2-5 usw.

Der 2. Abschnitt, in dem eine vom Abschnitt 1 abweichende Unterteilung vorgenommen wurde, reicht von 2 bis 4. Bild 21 zeigt diesen Abschnitt von einem Normalrechenschieber. Hier sind die Strecken von 2 bis 3 und von 3 bis 4 jeweils in 10 Teilabschnitte eingeteilt, von denen jeder wiederum durch 4 Striche in 5 Abschnitte aufgeteilt ist*. Wenn also in dem Teilabschnitt von 1 bis 2

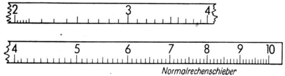


Bild 21

der Abstand der kleinen Teilstriche $\frac{1}{10}$ betrug, so ist es hier $\frac{1}{5}$, der Schritt hat sich mithin vergrößert. Folgende 3stellige Ziffern lassen sich genau einstellen:

2-0-2	2-0-8	3-1-2
2-0-4	3-0-0	3-1-4 usw.
2-0-6	3-1-0	

Die 3. Ziffer muß immer lauten: 0, 2, 4, 6, 8

geschätzt:	2-0-1	2-0-5	2-0-9
	2-0-3	2-0-7	2-1-1 usw.

Die 3. Ziffer: 1, 3, 5, 7, 9, muß geschätzt werden.

Bild 21 enthält auch den 3. und letzten Abschnitt der Normalteilung, die Strecke von 4 bis 10. Die Abschnitte zwischen zwei benachbarten Zahlen (4 und 5, 5 und 6, 6 und 7, 7 und 8, 8 und 9, 9 und 10) sind in Zehntel unterteilt. Zwischen diesen befindet sich ein Halbierungsstrich**. Somit kann nur dann eine 3stellige Zahl genau eingestellt werden, wenn die letzte Ziffer dieser Zahl durch 5 teilbar ist.

* Nur zwischen 2 und 2,1 eingezeichnet.

** Nur zwischen 4 und 4,1 eingezeichnet.

genau:	4-0-5	geschätzt:	4-1-3
	4-1-0		5-2-7
	4-1-5 usw.		6-9-2 usw.

Die Reziprokteilung R läuft den Teilungen C und D entgegen (gegenläufig), ist aber sonst mit diesen identisch.

Die Teilungen A und B reichen von 1 bis 100. Sie sind untereinander gleich und enthalten zwei gleichlange Teilungen von 1 bis 10, die nur halb so lang sind wie die Teilungen C und D. Aus diesem Grunde können nicht so viele Unterteilungen wie auf der Normalskala angebracht sein. Es sind 3 Abschnitte auf den Skalen zu unterscheiden:

1. von 1 bis 2 (10 bis 20)
2. von 2 bis 5 (20 bis 50)
3. von 5 bis 10 (50 bis 100)

Der 1. Abschnitt (1 bis 2 bzw. 10 bis 20) ist so unterteilt wie der 2. Abschnitt (2 bis 4) der Skalen C, D und R.

Der 2. Abschnitt (2 bis 5 bzw. 20 bis 50) ist so unterteilt wie der 3. Abschnitt (4 bis 10) der Skalen C, D und R.

Der 3. Abschnitt (5 bis 10 bzw. 50 bis 100) ist nur in Zehntel unterteilt.

Über der Teilung A befindet sich auf dem Normalrechenschieber (Bild 18) die kubische Teilung K. Sie reicht von 1 bis 1000 und besteht aus 3 gleich langen Teilungen:

1. 1 bis 10
2. 10 bis 100
3. 100 bis 1000

Alle drei Teilungen zusammen haben die Länge der Normalteilung C, D und R (25 cm). Die Unterteilungen der 3 Strecken (1 bis 10, 10 bis 100, 100 bis 1000) sind gleich denen der Skalen A und B.

Schließlich enthält noch die Vorderseite des Normalrechenschiebers ganz unten eine Teilung, die meist dem Ablesen dekadischer Logarithmen dient. In diesem Falle nennt man sie die Mantissenteilung M. Diese Skala ist linear in 10 Abschnitte geteilt (,0 bis ,1 bis ,2 bis ,3 bis ,4 bis ,5 bis ,6 bis ,7 bis ,8 bis ,9 bis ,0). Diese

Einzelstrecken sind in Zehntel und diese wieder in Fünftel unterteilt.

In vielen Fällen deckt sich der Läuferstrich nicht mit einem der Teilungsstriche der Skalen, dann muß die letzte Ziffer der Zahlen-

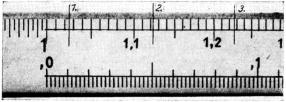


Bild 22

folge geschätzt werden. Das Ablesen auf den Teilungen und insbesondere das Schätzen muß vom Anfänger oft geübt werden. Sicherheit im Handhaben des Rechenschiebers ist nicht zuletzt eine Sache des mühelosen Ablesens und Einstellens der Zahlen.

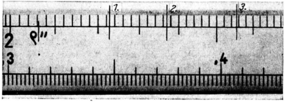


Bild 23

Wir wollen uns deshalb einige Fälle ansehen, bei denen die letzte Ziffer der Zahlenfolge geschätzt werden muß. Die Bilder 22, 23 u. 24 zeigen Ausschnitte aus den drei Abschnitten (1 bis 2, 2 bis 4, 4 bis 10) der Normalskala D (Normalrechenschieber).

Das 1. Beispiel (Bild 22) zeigt vergrößert einen Teil der Strecke 1 bis 2. Die eingezeichneten Ablesestriche geben Ziffernfolgen an, deren letzte Ziffer geschätzt werden muß. Bild 23 zeigt einen vergrößerten Ausschnitt aus der Strecke 2 bis 4 und Bild 24 einen solchen aus der Strecke 4 bis 10.

Die eingestellten Ziffernfolgen lauten:

Bild 22	1.	1–0–2–5	Bild 23	1.	2–2–2–9	Bild 24 1.	4–1–2
	2.	1–1–2–2		2.	2–3–7	2.	4–4–7
	3.	1–2–2–7		3.	2–5–5–4	3.	4–8–2–5

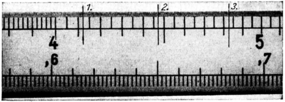


Bild 24

Die auf den Bildern außerdem unten noch sichtbare Skala ist die Mantissenskala M (dekadische Logarithmen). Die auf dem Rechenschieber ablesbaren Ergebnisse sind auf 3, höchstens 4 Stellen begrenzt. In der Praxis genügt aber diese Genauigkeit meist vollauf.

Für den Anfänger ist die nachfolgende Einstellungsübung bestimmt:

Zuerst wird die Zahl 1,2 auf A mit B 1 unter den Läuferstrich gestellt. Auf diese Weise ist die Zunge mit ihren Skalen etwas nach rechts gerückt. A 1 und B1 bzw. C1 und D1 stehen nicht mehr übereinander. In der ersten Spalte der Übungstabelle sind verschiedene Zahlen auf der Skala A angegeben, für die die anderen Spalten die entsprechenden Werte auf den anderen Skalen angeben. Für die Skalen A und B sind die Zahlen mit ihrem Stellenwert, für alle anderen aber nur in ihrer Ziffernfolge angegeben (System „Rietz“).

A	*B*	*C*	*D*	*R*	*K*	*M*
1,5	1,25	1–1–1–8	1–2–2–5	8–9–5	1–8–4	0–8–8
2,05	1,71	1–3–0–7	1–4–3	7–6–5	2–9–4	1–5–6
2,425	2,02	1–4–2–3	1–5–5–9	7–0–3	3–7–9	1–9–2
2,90	2,42	1–5–5–4	1–7–0–2	6–4–4	4–9–5	2–3–1
3,14	2,62	1–6–1–9	1–7–7–2	6–1–8	5–5–8	2–4–8
3,56	2,97	1–7–2–2	1–8–8–6	5–8–1	6–7–0	2–7–6
4,05	3,37	1–8–3–6	2–0–1	5–4–5	8–1–5	3–0–3
4,80	4,00	2–0–0	2–1–9	5–0–0	1–0–5	3–4–0
6,80	5,67	2–3–8	2–6–0–9	4–2–0	1–7–7	4–1–6
9,35	7,80	2–7–9	3–0–6	3–5–8	2–8–6	4–8–5
10,20	8,50	2–9–1–5	3–1–9–2	3–4–3	3–2–6	5–0–4
12,90	10,75	3–2–8	3–5–9	3–0–5	4–6–4	5–5–5
19,48	16,25	4–0–3	4–4–1–5	2–4–8–2	8–6–0	6–4–5
22,5	18,75	4–3–3	4–7–4	2–3–1	1–0–7	6–7–6
30,0	25,0	5–0–0	5–4–7	2–0–0	1–6–4	7–3–8
45,0	37,5	6–1–2	6–7–0	1–6–3–4	3–0–2	8–2–6
59,0	49,2	7–0–1	7–6–7–5	1–4–2–8	4–5–5	8–8–5
67,5	56,3	7–5–0	8–2–1	1–3–3–4	5–5–5	9–1–4
95,0	79,2	8–9–0	9–7–5	1–1–2–4	9–2–8	9–8–9

IV. Wie wird mit dem Rechenschieber gearbeitet?

1. Die Multiplikation

Die Multiplikationsaufgabe lautet:

$$a \cdot b = c,$$

wobei an Stelle der Buchstaben jede beliebige Zahl gesetzt werden kann. Wir können aber auch schreiben:

$$b \cdot a = c,$$

denn die Reihenfolge der Faktoren ist beliebig. Diese Tatsache hat für den Rechenschieber einige Bedeutung, können wir doch die Rechnung mit der jeweils zweckmäßigeren Zahl beginnen; das ist die Zahl, die sofort, ohne Umstellung eingestellt, bei der Rechnung auf dem Schieber schneller erledigt werden kann.

Nehmen wir einmal folgende Multiplikationsaufgabe an:

$$a \cdot b = c$$

$$a = 35{,}5, \quad b = 2{,}45, \quad c = 87$$

$$35{,}5 \cdot 2{,}45 = 87$$

Wir können diese Aufgabe sowohl auf den Skalen *A* und *B* als auch auf den Skalen *C* und *D* berechnen. Meist benutzen wir der größeren Genauigkeit halber die Skalen *C* und *D*. Die obige Aufgabe können wir aber auch ebensogut auf *A* und *B* rechnen, denn, wie wir uns leicht überzeugen können, sind die drei Ziffern

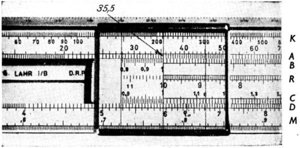


Bild 25

auch auf diesen Skalen genau einzustellen. Bild 25 (System „Rietz") zeigt, wie wir $a = 35{,}5$ auf *A* suchen und die 1 von *B* darunterstellen. Weil die Skalen *A* und *B* bis 100 reichen, können wir das Ergebnis gleich mit der richtigen Stellenzahl ablesen. Bild 26 zeigt uns, wie über $b = 2{,}45$ (auf *B*) das Ergebnis auf *A* abzulesen ist. Weil sich die zwei Skalen berühren, wäre es gar nicht nötig gewesen, den Läufer zu benutzen. Obgleich wir das Ergebnis ($c = 87$) in diesem Falle sofort mit der richtigen Stellenzahl haben ablesen können, lesen wir die Ziffernfolge 8–7 und überschlagen im Kopf, welche Kommastellung vorliegt. Auf diese Weise vermeiden wir Flüchtigkeitsfehler und erziehen uns zur Selbstkontrolle.

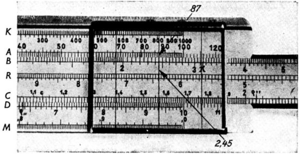


Bild 26

Versuchen wir nun folgende Aufgabe zu lösen:

$$a \cdot b = c$$

$$151{,}5 \cdot 60 = 9090$$

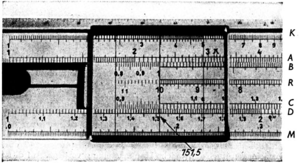


Bild 27

Wir können uns leicht überzeugen, die Ziffernfolge 1–5–1–5 ist auf der Skala A nicht genau einstellbar. Wir rechnen also auf den Skalen C und D. Bild 27 (System „Rietz") zeigt, wie wir $a = 151{,}5$ auf D einzustellen haben. Über 1–5–1–5 stellen wir die 1 der Skala C und können (Bild 28) unter der 6 auf C das Ergebnis auf D

9–0–9 ablesen.

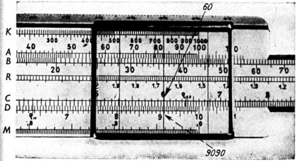


Bild 28

Nun bestimmen wir im Kopf die Kommastellung.

$$c = 9090$$

Es kann aber sein, daß wir nicht so verfahren können. Wir hatten bei beiden Aufgaben die Strecken $\lg a$ und $\lg b$ addiert und erhielten die Summenstrecke $\lg c$. Da wir den Anfang von $\lg b$ über das Ende von $\lg a$ stellen konnten, war dieser Zusammenhang (Addition der Strecken) auch ganz sinnfällig. Nehmen wir aber einmal die Aufgabe

$$0{,}87 \cdot 1850$$

an, und beginnen wir die Rechnung auch mit $a = 0{,}87$. Stellen wir den Anfang von b (eigentlich: Strecke $\lg b$) über das Ende von a (auf D), so ist das Ergebnis nicht ablesbar, da die Zunge unseres Schiebers rechts weit aus dem Stabkörper herausragt.

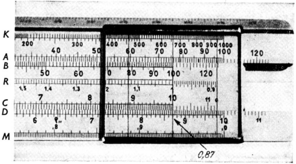


Bild 29

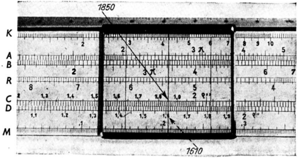


Bild 30

Wir müssen also den bereits früher erläuterten Trick anwenden und folgendermaßen verfahren (Bild 29, System „Rietz"):

$$a \cdot b = c$$

$$0{,}87 \cdot 1850 = 1610$$

Wir stellen über 8–7 auf D die 10 der Skala C. b = 1–8–5 auf C steht nun über 1–6–1 auf D (Bild 30).

2. Die Division

Die Aufgabe sieht so aus:

$$\frac{a}{b} = c$$

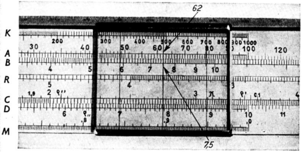


Bild 31

Die Strecke $\lg b$ muß jetzt von der Strecke $\lg a$ subtrahiert werden; das Ergebnis ist die Differenzstrecke $\lg c$. Zuerst rechnen wir wieder eine Aufgabe auf den Skalen A und B.
Die Bilder 31 u. 32 (System „Rietz") zeigen die Lösung der Aufgabe.

$$\frac{a}{b} = c, \qquad \frac{62}{7{,}5} = 8{,}27$$

Wir können natürlich auch schreiben:

$$a : b = c, \qquad 62 : 7{,}5 = 8{,}27$$

$a = 6\text{–}2$ stellen wir auf A ein (Bild 31). Wir schieben $b = 7\text{–}5$ (auf B) darunter und können über der Zahl 1 (auf B) auf A das Ergebnis

8–2–7 ablesen (Bild 32).

Die Überschlagsrechnung ergibt die Kommastellung:

$$c = 8{,}27$$

Folgende Aufgabe rechnen wir wieder auf den Skalen C und D, da wir eine 4stellige Zahl auf A und B nicht genau einstellen

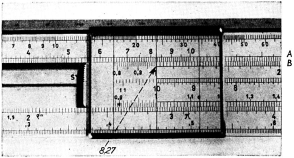


Bild 32

können. (Das ist aber nicht der alleinige Grund dafür. Da wir die Stellenzahl des Rechenergebnisses nicht kennen, diese aber über 3 Stellen hinausgehen kann, benutzen wir schon deshalb die Skalen C und D.)

$$\frac{a}{b} = c, \quad \frac{0{,}1665}{20{,}25} = \mathbf{0{,}00822}^{*}$$

(Bild 33 u. 34, System „Rietz“)

* Bestimmung der Stellenzahl siehe Anhang d).

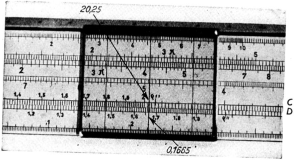


Bild 33

Wir stellen $a = 1\text{–}6\text{–}6\text{–}5$ auf der Skala D ein. $b = 2\text{–}0\text{–}2\text{–}5$ schieben wir darüber und können nun unter C 10 auf D das Ergebnis ablesen:

8–2–2

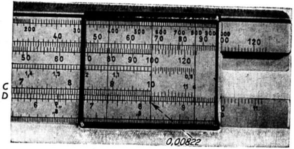


Bild 34

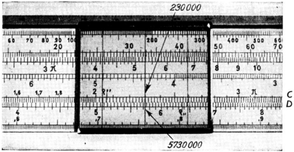


Bild 35

Es kann aber auch sein, daß wir das Resultat unter der 1 von C auf D ablesen müssen.

$$\frac{a}{b} = c, \qquad \frac{5\,730\,000}{230\,000} = 24{,}9$$

(Bild 35 u. 36, System „Rietz")

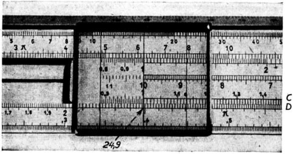


Bild 36

a = 5–7–3 stellen wir auf D ein (Bild 35). Darüber steht b = 2–3. Unter C 1 (Bild 36) steht auf D:

$$c = 2\text{–}4\text{–}9, \qquad c = 24{,}9$$

3. Multiplikation und Division mit Hilfe der Reziprokskala R

Beim Kopfrechnen haben wir uns angewöhnt, folgendermaßen zu rechnen:

Die Aufgaben sollen lauten:

1. $8 \cdot 0{,}2$, 2. $9 \cdot 0{,}25$, 3. $15 \cdot 0{,}5$, 4. $10 \cdot 0{,}05$

Aus diesen Multiplikationsaufgaben machen wir Divisionsaufgaben:

1. $8:5$, 2. $9:4$, 3. $15:2$, 4. $10:20$

Durch diesen kleinen Trick wird die Rechnung viel leichter. Wie kommen wir nun zu den Zahlen 5, 4, 2 und 20?
Es sind das die reziproken Werte (Kehrwerte) von 0,2; 0,25; 0,5 und 0,05.

1. $\frac{1}{0{,}2} = 5$, 2. $\frac{1}{0{,}25} = 4$, 3. $\frac{1}{0{,}5} = 2$, 4. $\frac{1}{0{,}05} = 20$

Also lauten die vorstehenden Aufgaben jetzt:

$$1.\ 8:\frac{1}{0{,}2} = \frac{8}{5}, \qquad 2.\ 9:\frac{1}{0{,}25} = \frac{9}{4},$$

$$3.\ 15:\frac{1}{0{,}5} = \frac{15}{2}, \qquad 4.\ 10:\frac{1}{0{,}05} = \frac{10}{20}$$

Diesen Rechentrick können wir auch auf dem Rechenschieber ausführen, indem wir die rote Reziprokskala R auf der Zunge (zwischen B und C) benutzen. Aus der Multiplikation wird dann eine Division. Wir verfahren also so, wie wir es bei der Division gemacht haben. Unsere Aufgabe soll lauten:

$$a \cdot b = c, \qquad 44\,250 \cdot 0{,}034 = 1505$$

a = 4–4–2–5 suchen wir auf D und stellen den Läufermittelstrich darüber. Unter diesen Strich schieben wir b = 3–4 auf R (Bild 37, System „Rietz"). Nun schieben wir den Läufermittelstrich über R 10 (Bild 38) und können unter dem Strich auf D die Lösung ablesen:

$$1\text{–}5\text{–}0\text{–}5, \qquad c = 1505$$

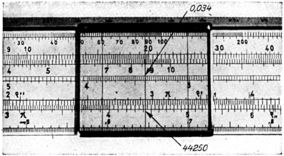


Bild 37

Kommen wir bei der Multiplikation und Division auf A und B bzw. C und D auch ohne den Läufer aus, so ist das jetzt, beim Benutzen der Skala R, nicht mehr möglich.

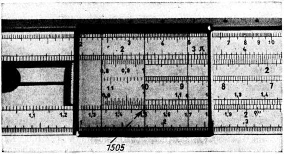


Bild 38

Und nun wollen wir noch eine Multiplikationsaufgabe rechnen, bei der das Ergebnis unter R 1 auf D steht.

(Bild 39 u. 40, System „Rietz“)

$$a \cdot b = c, \qquad 1007 \cdot 3 = 3021$$

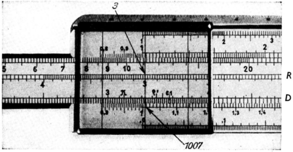


Bild 39

Bild 39 zeigt, wie wir 1–0–0–7 auf D einstellen müssen. Darüber stellen wir wieder den Läuferstrich und schieben die 3 auf R darüber. Auf Bild 40 sehen wir, wie unter dem über R 1 stehenden Läuferstrich auf D das Produkt 3–0–2 abzulesen ist.

Es fällt uns auf, daß wir die 1 von 3021 nicht ablesen können. Auf dem Rechenschieber lautet das Ergebnis somit:

$$1007 \cdot 3 = 3020$$

So wie sich die Multiplikation in eine Division verwandeln läßt, so ist es auch umgekehrt möglich, die Division in eine Multiplikation zu überführen. Wieder gehen wir vom Kopfrechnen aus. Die Aufgaben:

$$1.\ \frac{6}{0{,}2}, \quad 2.\ \frac{8}{0{,}5}, \quad 3.\ \frac{12}{0{,}05}, \quad 4.\ \frac{15}{0{,}75}$$

rechnen wir als Multiplikationsaufgaben:

1. $\frac{6}{0,2} = 6 \cdot \frac{1}{0,2} = 6 \cdot 5$, 2. $\frac{8}{0,5} = 8 \cdot \frac{1}{0,5} = 8 \cdot 2$,

3. $\frac{12}{0,05} = 12 \cdot \frac{1}{0,05} = 12 \cdot 20$, 4. $\frac{15}{0,75} = 15 \cdot \frac{1}{0,75} = 15 \cdot \frac{4}{3}$

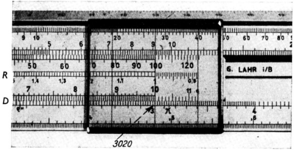


Bild 40

Wir multiplizieren mit den reziproken Werten. Wir wollen folgende Aufgabe auf diese Weise durchrechnen (Bild 41 u. 42, System „Rietz")

$$\frac{a}{b} = c, \quad \frac{765}{2} = 382{,}5$$

Aus dieser Divisionsaufgabe (die im Kopf allerdings auch als Division ausgeführt wird) machen wir eine Multiplikationsaufgabe

$$765 \cdot 0{,}5 = 382{,}5$$

Wir stellen R 1 über 7–6–5 auf D (Bild 41). Gleichzeitig steht C 10 darüber.
Unter der 2 auf R (Bild 42) steht auf D das Ergebnis:

3–8–2–5

Wir sehen aber auch, daß auf C die 5 darübersteht (Multiplikation mit Trick).

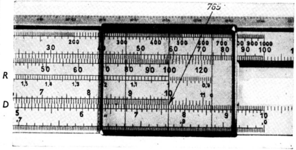


Bild 41

Zuletzt wollen wir noch die Aufgabe

$$\frac{a}{b} = c, \quad \frac{2{,}9}{4} = 0{,}725 \quad \text{ausrechnen.}$$

(Bild 43 u. 44, System „Rietz")

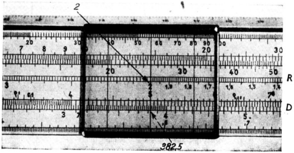


Bild 42

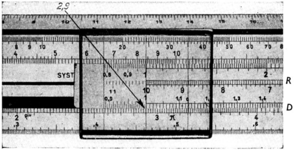


Bild 43

Über $a = 2{,}9$ auf D stellen wir R 10 (bzw. C 1) (Bild 43). Unter $b = 4$ auf R (Bild 44) lesen wir auf D das Ergebnis ab. Gleichzeitig finden wir bestätigt, daß wir in Wirklichkeit eine Multiplikation mit 0,25 durchgeführt haben, denn unter dem Läuferstrich steht auf C 2–5. Zur Strecke $\lg a$ wurde die Strecke $\lg b$ ($b = 0{,}25$) addiert.

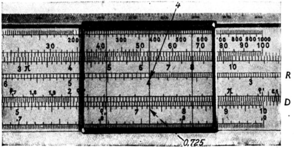


Bild 44

4. Beispiele zur Anwendung der Multiplikation und Division

Wir benutzen für diese Beispiele nicht mehr den Normalrechenschieber System „Rietz", sondern rechnen einige Beispiele mit dem 50 cm langen Bürorechenschieber „Elektro" und einige mit einem 12,5 cm langen Taschenrechenschieber. Auch wenn wir diese Rechenschieber nicht besitzen, ist es für uns wertvoll, diese Beispiele durchzuarbeiten, denn so erhöhen wir unsere Sicherheit im Ablesen der Ziffernfolge.

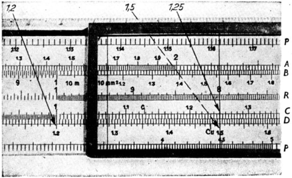


Bild 45

1. Welches Gewicht haben $V = 1{,}25\,\mathrm{m^3}$ gelöschter Kalk? $\gamma^* = 1{,}2\,\mathrm{t/m^3}$

$$G = \gamma \cdot V, \qquad G = 1{,}2 \cdot 1{,}25 = \mathbf{1{,}5\ t}$$

   Bild 45 (Bürorechenschieber „Elektro") zeigt die Ausrechnung. 1–2 auf D, darüber die 1 von C. Unter 1–2–5 (auf C) lesen wir auf D 1–5 ab.

2. An einem Hebelarm von $r = 8$ m greift eine Kraft $P = 7$ kg an. Wie groß ist das Drehmoment M?

$$M = P \cdot r, \qquad M = 7 \cdot 8 = \mathbf{56\ kgm}$$

---

* γ = Wichte in g/cm³, kg/dm³ oder t/m³

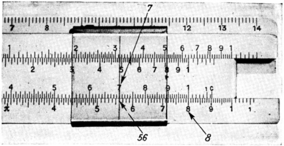


Bild 46

Bild 46 zeigt die Ausrechnung mit Hilfe eines Taschenrechenschiebers.
8 wird auf D eingestellt. Die 10 von C (auf dem Rechenschieber steht allerdings eine 1) stellen wir darüber. Unter C 7 steht auf D 5–6

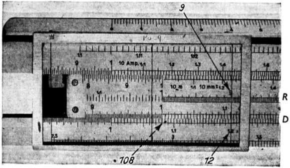


Bild 47

3. Eine Kraftwagenbatterie mit $U = 12$ V wird mit $J = 9$ A belastet. Wie groß ist die elektrische Leistung N?

$$N = U \cdot J$$

$$N = 12 \cdot 9 = \mathbf{108\ W}$$

Die Ausrechnung (Bild 47) erfolgt mit dem Bürorechenschieber „Elektro".
Die Spannung $U = 12$ V stellen wir auf D ein. Wir benutzen die Reziprokskala, weshalb wir über 12 den Läuferstrich stellen.

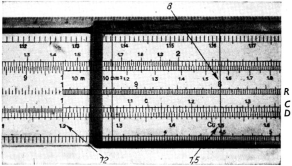


Bild 48

(Der Übersichtlichkeit wegen wurde in diesem Beispiel der rechte Läuferstrich genommen). Unter der 1 von C (identisch mit 1 auf R) lesen wir auf D das Ergebnis 1–0–8 ab.

4. Wir laufen mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $v = 8$ km in der Stunde. Welchen Weg s haben wir in $t = 1{,}5$ Stunden zurückgelegt?

$$s = t \cdot v$$

$$s = 1{,}5 \cdot 8 = \mathbf{12\ km}$$

Wieder benutzen wir zur Ausrechnung die Reziprokskala R. (Bild 48)

Über 1–5 auf D stellen wir den Läufermittelstrich. 8 auf R stellen wir unter diesen Strich und können unter C 1 (bzw. R 1) 1–2 ablesen.

5. Wie groß ist die Beschleunigung b eines gleichmäßig beschleunigten Körpers, wenn in $t = 1{,}5$ Sekunden eine Geschwindigkeitszunahme von $v = 9$ m/s erfolgt ist?

$$b = \frac{v}{t} = \frac{9}{1{,}5} = \mathbf{6\ m/s^2}$$

(Bild 49, Taschenrechenschieber)

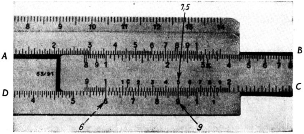


Bild 49

Über 9 auf D stellen wir 1,5 auf C und lesen unter der 1 von C auf D das Ergebnis ab.

6. Ein Körper wurde $h = 8$ m hochgehoben, wobei eine Arbeit $A = 1{,}6$ kgm aufgebracht wurde. Wie groß war die benötigte Kraft P?

$$P = \frac{A}{h} = \frac{1{,}6}{8} = \mathbf{0{,}2\ kg}$$

(Bild 50, Taschenrechenschieber)

Über 1–6 auf D stellen wir die 8 auf C. Unter der 10 auf C (als 1 angegeben) steht auf D das Ergebnis.

7. Ein Gegenstand hat ein Gewicht von $G = 8{,}58$ kg. Er wird nach seinem senkrechten Fall abgebremst und gibt dabei

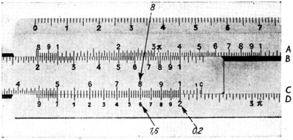


Bild 50

eine Bewegungsenergie von $E_k = 8$ kgm ab. Wie tief ist er gefallen?

$$h = \frac{E_k}{G} = \frac{8}{8{,}58} = \mathbf{0{,}932\ m}$$

(Bild 51, Bürorechenschieber „Elektro")

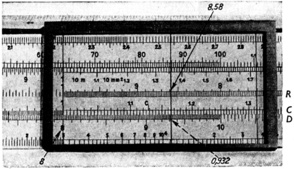


Bild 51

Die Zahl 8 stellen wir auf D ein. Darüber stellen wir die 1 von C. Unter 8–5–8 auf R lesen wir auf D das Resultat ab.

8. An eine Spannungsquelle von $U = 1200$ V ist ein Belastungswiderstand von $R = 900\,\Omega$ angeschlossen. Wie groß ist die Stromstärke J?

$$J = \frac{U}{R} = \frac{1200}{900} = \mathbf{1{,}333\ A}$$

(Bild 52, Bürorechenschieber „Elektro")

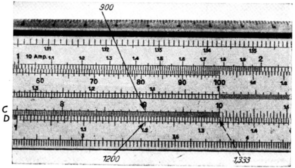


Bild 52

Wir schieben über 1–2 (auf D) die Zahl 9 (auf C) und erhalten unter C 10 auf D das Ergebnis 1–3–3–3

9. Eine Fläche von $F = 80\ \mathrm{m}^2$ wird von $\Phi = 120$ Lumen beleuchtet. Wie groß ist die Beleuchtungsstärke E?

$$E = \frac{\Phi}{F} = \frac{120}{80} = \mathbf{1{,}5\ Lux}$$

(Bild 53, Bürorechenschieber „Elektro")

Über 1–2 auf D schieben wir die 1 von C bzw. R. Nun stellen wir den Läuferstrich auf 8 der Reziprokskala R. Das Ergebnis steht unter dem Läuferstrich auf D: 1–5.

Weitere Anwendungsbeispiele (Metallberufe)

(gerechnet mit dem Normalrechenschieber System „Rietz")

1. Wie groß ist der Teilkreisdurchmesser d_0 eines Zahnrades mit $z = 87$ Zähnen und dem Modul $m = 2{,}25$?

$$\text{Teilkreisdurchmesser } d_0 = m \cdot z$$
$$= 2{,}25 \cdot 87 = 1\text{–}9\text{–}5\text{–}7$$

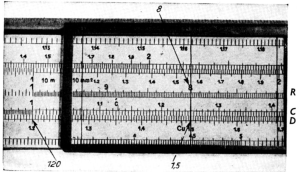


Bild 53

Die 7 muß dabei geschätzt werden.

$$d_0 = \mathbf{195{,}7\ mm}$$

2. Wie groß ist der Wirkungsgrad des Getriebes einer Drehmaschine, wenn der Antriebsmotor 6,5 PS leistet, durch die Schneidarbeit des Stahles jedoch nur 5,78 PS abgenommen werden?

$$\eta = \frac{5{,}78}{6{,}5} = 8\text{–}8\text{–}9$$

Die 9 muß geschätzt werden.

$$\eta = \mathbf{0{,}899}$$

3. Wieviel kg wiegen 5,8 m gleichschenkliger Winkelstahl 40 × 40 × 5 mm, wenn das Gewicht je Meter 2,97 kg beträgt?

$$G = 5{,}8 \cdot 2{,}97 = 1\text{–}7\text{–}2\text{–}3$$

Die 3 muß geschätzt werden.

$$G = \mathbf{17{,}23\ kg}$$

4. Ein Hebel mit einem Querschnitt von 22 mm² wird mit 14000 kg gezogen. Wie groß ist die Zugspannung in kg/mm²?

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{14\,000}{22} = 6\text{–}3\text{–}6$$

$$\sigma = \mathbf{636\ kg/mm^2}$$

5. In einem einfachen Riementrieb mit der Übersetzung 1:1,85 hat das treibende Rad einen Durchmesser von 450 mm. Wie groß muß das getriebene Rad sein?

$$i = \frac{d_2}{d_1}, \quad d_2 = i \cdot d_1 = \frac{1}{1{,}85} \cdot 450 = 2\text{–}4\text{–}3\text{–}2$$

Die letzte 2 muß geschätzt werden.

$$d_2 = \mathbf{243{,}2\ mm}$$

6. Ein Gasmesser zeigt auf einer Skala den Durchfluß von 660 Liter Gas je Stunde an. Wieviel Liter Gas durchströmen den Gasmesser in 28 Stunden?

$$Q = 660 \cdot 28 = 1\text{–}8\text{–}4\text{–}8$$

Die letzte 8 muß geschätzt werden.

$$Q = \mathbf{18\,480\ Liter}$$

7. Es ist die Kapazität eines Akkumulators zu bestimmen, der 125 A während 8,25 h abzugeben vermag.

$$\text{Kapazität} = J \cdot t = 125 \cdot 8{,}25 = 1\text{–}0\text{–}3\text{–}1$$

Die letzte 1 muß geschätzt werden.

$$\text{Kapazität} = \mathbf{1031\ Ah}$$

5. Zweimalige Multiplikation

Eine mehrmalige Multiplikation kann sehr einfach werden, wenn man einen Rechenschieber mit reziproker Teilung R benutzt. Wir wollen dazu folgendes Beispiel durchrechnen:

$$a \cdot b \cdot c = d$$

$$1{,}4 \cdot 9{,}5 \cdot 1{,}25 = 16{,}62$$

Den ersten Teil der Aufgabe: $a \cdot b = 1{,}4 \cdot 9{,}5$ rechnen wir mit Hilfe der Skalen D und R. Bild 54 zeigt die Einstellung auf

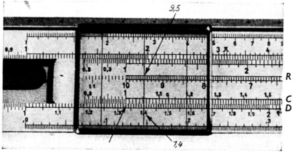


Bild 54

einem Normalrechenschieber „System Rietz". $a = 1{,}4$ suchen wir auf D. Darüber stellen wir den Läuferstrich (Mittelstrich). Nun schieben wir 9,5 auf R unter diesen Mittelstrich. Das Zwischenergebnis ist unter der 1 von C auf D abzulesen (Anzeigepfeil ohne Zahl).

Den zweiten Teil der Aufgabe zeigt Bild 55. Ausgehend von dem Zwischenergebnis, wird nun eine Multiplikation mit $c = 1{,}25$ auf C vorgenommen. Das Endergebnis ist auf D abzulesen. Für diesen letzten Rechengang benötigen wir den Läufer überhaupt nicht, da sich die Skalen C und D berühren. Die ganze Aufgabe erfordert lediglich eine Einstellung der Zunge mit Hilfe des Läufers.

Die Reihenfolge der Faktoren ($a \cdot b \cdot c$ oder $a \cdot c \cdot b$ oder $c \cdot a \cdot b$ usw.) ist mathematisch beliebig, jedoch für die zweckmäßige Anwendung des Rechenschiebers von Bedeutung und muß vor dem Beginn der Rechnung in der zweckmäßigsten Weise festgelegt werden*. (Über Bestimmung der Stellenzahl siehe Anhang.)

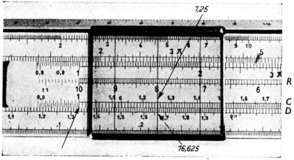


Bild 55

Beispiele aus dem Baugewerbe

1. Eine Baugrube (ohne Böschung) soll ausgehoben werden. Die Maße sind:

Länge l	$= 10{,}20$ m
Breite b	$= 6{,}40$ m
Höhe (Tiefe) h	$= 1{,}20$ m

Wieviel m³ Erde sind auszuheben?

$$V = l \cdot b \cdot h = 10{,}20 \cdot 6{,}40 \cdot 1{,}20 = 7\text{–}8\text{–}3$$

$$V = \mathbf{78{,}3\ m^3} \quad \text{(genau 78,336)}$$

* Soll beispielsweise auf den Skalen C und D die Aufgabe $1{,}2 \cdot 9{,}5 \cdot 4{,}8$ gerechnet werden, so ist es ratsam, die Rechnung mit der Zahl zu beginnen, die etwa in der Mitte zwischen 1 und 10 steht.

$$4{,}8 \cdot 1{,}2 \cdot 9{,}5$$

Die Rechnung $9{,}5 \cdot 1{,}2$ beginnt man mit der größeren (9,5), die man auf D einstellt. C 10 wird dann darübergestellt.

2. Ein Maurer soll ein Zimmer verputzen. Die Maße desselben sind:

Länge l	$= 6{,}45$ m
Breite b	$= 4{,}53$ m
Höhe h	$= 2{,}85$ m

Zuerst sind Länge und Breite im Kopf zu addieren.

$$6{,}45 + 4{,}53 = 10{,}98 \text{ m}$$

Die gesamte Verputzfläche in m² beträgt:

$$F = 10{,}98 \cdot 2 \cdot 2{,}85 = 6\text{–}2\text{–}6$$

$$F = \mathbf{62{,}6\ m^2} \quad \text{(genau: 62,59)}$$

3. Von einem Neubaugelände ist Erde abzufahren. Es sind 386,5 m³ Boden ausgehoben. Die Auflockerung beträgt 25%. Wieviel m³ Erde sind abzufahren?

$$V = 386{,}50 \cdot 1{,}25 = 4\text{–}8\text{–}3 \quad \text{(von 386,5 wird die 5 geschäzt)}$$

$$V = \mathbf{483\ m^3}$$

4. Die in dem Beispiel 3 errechnete Bodenmenge soll mit Kipploren abgefahren werden. Jede Lore faßt $^3/_4$ m³. Wieviel Loren werden mit der ausgehobenen Erde beladen?

$$\text{Anzahl} = \frac{483}{0{,}75} = \mathbf{644\ Kipploren}$$

5. Ein Steinmetz arbeitet 28,4 Std. Der Stundenlohn beträgt 1,40 DM. Er erhält eine Staubzulage von 20 Pf je Std. Außerdem erhält er einen Zuschlag von 15% als Leistungslohn. Wie hoch ist sein Gesamtlohn?

Zuerst sind im Kopf zu addieren:

$$1{,}40 + 0{,}20 = 1{,}60$$

$$\text{Lohn} = 1{,}60 \cdot 28{,}4 \cdot 1{,}15 = 5\text{–}2\text{–}2$$

$$\text{Lohn} = \mathbf{52{,}2\ DM} \quad \text{(genau: 52,26)}$$

Beispiele für den Kaufmann

1. Ein Kunde hat vom Rechnungsbetrag bedingungsgemäß 16,–DM Skonto abgezogen. Er überreicht 314,– DM. Wieviel % beträgt der Abzug?

a) als *Proportion gerechnet*:

$$16 : 330 = x : 100$$

$$x = \frac{16 \cdot 100}{330} = 4{,}85$$

Der Abzug betrug **4,85%**

b) nach dem *Dreisatz* gerechnet:

330,— DM Rechnungsbetrag ≙ 100%

16,— DM Skonto ≙ x%

$$x = \frac{16 \cdot 100}{330} = \mathbf{4{,}85\,\%}$$

2. Ein Geschäft hat einen Umsatz von 12500 DM. Die Umsatzsteuer beträgt 4%. Wie hoch ist der Betrag in DM?

$$x = \frac{12\,500 \cdot 4}{100} = \mathbf{500}$$

Steuer = **500 DM**

3. Ein Warenvorrat von 2860 DM erfährt durch unsachgemäße Lagerung eine Minderung von 420 DM. Wieviel Prozent sind das?

$$x = \frac{420 \cdot 100}{2860} = \frac{42\,000}{2860} = 14{,}7$$

Verlust = **14,7%**

4. Welches Kapital ergibt bei 4% 312 DM Zinsen?

$$K = \frac{312 \cdot 100}{4} = 7800$$

Kapital = **7800 DM**

5. Eine in 6 Monaten fällige Schuld in Höhe von 30000 DM soll sofort bezahlt werden. Wie hoch ist der Barwert, wenn ein Diskont von 4,8% berechnet wird?

30000 DM entsprechen 102,4% $\left(\frac{4{,}8}{2} = 2{,}4\%\text{, da nur } {}^1/_2 \text{ Jahr}\right)$

Damit wird der Barwert (100%)

$$x = \frac{30\,000}{1{,}024} = 29\,300$$

Barwert = **29300 DM**

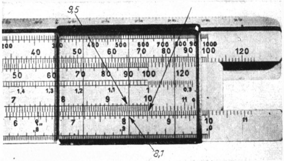


Bild 56

6. Kombinierte Multiplikation und Division

Zuerst wollen wir eine Aufgabe von der Form

$$\frac{a \cdot b}{c} = d$$

lösen.

Bild 56 zeigt den ersten Teil der Aufgabe, die mit folgenden Zahlen durchgerechnet werden soll:

$$\frac{8{,}1 \cdot 8{,}5}{9{,}5} = 7{,}25$$

(Normalrechenschieber System „Rietz")

Zuerst führen wir die Division durch. $a = 8{,}1$ wird auf D eingestellt. Darüber, auf C, wird $c = 9{,}5$ geschoben (es geht auch ohne

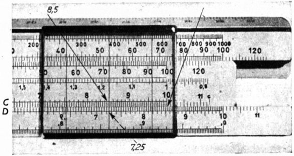


Bild 57

den Läuferstrich). Das Zwischenergebnis können wir unter 10 (Pfeil ohne Zahl) auf D ablesen. Die jetzt durchzuführende Multiplikation mit $b = 8{,}5$ (Bild 57) kann ebenfalls ganz ohne den Läufer erfolgen. Unter 8,5 auf C lesen wir auf D das Ergebnis $d = 7{,}25$ ab.

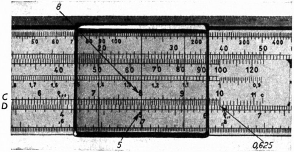


Bild 58

Eine Aufgabe, bei der sich im Nenner ein Produkt befindet, von der Form

$$\frac{a}{b \cdot c} = d$$

ist folgendermaßen zu lösen:

Wir wählen die Zahlen $\frac{5}{8 \cdot 1{,}3} = 0{,}481$ und benutzen wieder den Normalrechenschieber System „Rietz“.

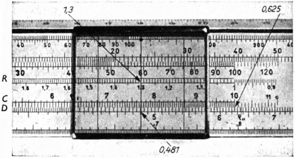


Bild 59

Bild 58 zeigt den ersten Teil der Aufgabe. Zuerst dividieren wir $a:b = 5:8$.

$a = 5$ stellen wir auf D ein. $b = 8$ auf C schieben wir (ohne Läufer) darüber.

Das Zwischenergebnis (0,625) können wir unter der 10 von C auf D ablesen. Nun müssen wir abermals durch $c = 1{,}3$ dividieren (Bild 59). Wir schieben den mittleren Läuferstrich auf die Zahl 1,3 auf R. Unter dem Strich ist nun auf D das Endergebnis $d = 0{,}481$ abzulesen. Auch diese Aufgabe läßt sich also sehr einfach lösen; Zunge und der Läufer werden nur einmal bewegt.

Wird nur mit den Skalen C und D gerechnet, so ist folgende Reihenfolge zweckmäßig:

$\frac{5 \cdot 3}{2}$ 1. 5 durch 2 dividiert (Division)
2. mit 3 multipliziert (Multiplikation)

$\frac{6 \cdot 7}{9 \cdot 8}$ 1. 6 durch 9 dividiert (Division)
2. mit 7 multipliziert (Multiplikation)
3. durch 8 dividiert (Division)

Berechnungsbeispiele
(gerechnet mit dem Normalrechenschieber System „Rietz")

1. Wieviel kg wiegt ein Stahlstab von 28 × 12 mm Querschnitt und 850 mm Länge? $\gamma = 7{,}85$ kg/dm³

$$G = 0{,}28 \cdot 0{,}12 \cdot 8{,}5 \cdot 7{,}85 = 2\text{–}2\text{–}4$$
$$\mathbf{G = 2{,}24\ kg}$$

2. Wie groß ist die Schnittgeschwindigkeit, wenn ein Werkstück von 125 mm Durchmesser mit einer Drehzahl $n = 350$ U/min bearbeitet wird?

$$v = \frac{\pi \cdot d \cdot n}{1000} = \frac{3{,}14 \cdot 125 \cdot 350}{1000} = 1\text{–}3\text{–}7\text{–}4$$

Die 4 muß geschätzt werden.

$$\mathbf{v = 137{,}4\ m/min}$$

3. Mit wieviel U/min müssen sich die 850 mm großen Scheiben einer Bandsäge drehen, damit das Sägeband eine Schnittgeschwindigkeit von 1100 m/min erhält?

$$n = \frac{1000 \cdot v}{\pi \cdot d} = \frac{1000 \cdot 1100}{3{,}14 \cdot 850} = 4\text{–}1\text{–}2$$

Die 2 muß geschätzt werden.

$$\mathbf{n = 412\ U/min}$$

4. Ermittle die Umfangsgeschwindigkeit in m/min einer Schleifscheibe von 380 mm Durchmesser, wenn ihre Drehzahl 1400 U/min beträgt.

$$v = \frac{\pi \cdot d \cdot n}{1000} = \frac{3{,}14 \cdot 380 \cdot 1400}{1000} = 1\text{–}6\text{–}7$$
$$\mathbf{v = 1670\ m/min}$$

Wird nach m/s gefragt, so ergibt sich:

$$v = \frac{\pi \cdot d \cdot n}{1000 \cdot 60} = \frac{3{,}14 \cdot 380 \cdot 1400}{1000 \cdot 60} = 2\text{–}7\text{–}8\text{–}4$$
$$v = 27{,}84\ \text{m/s}$$

5. Wie groß ist die Flächenpressung in einem 85 mm langen Gleitlager von 65 mm Durchmesser, wenn der Lagerdruck

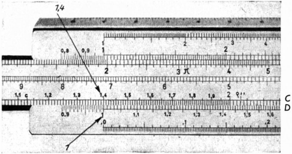


Bild 60

6500 kg beträgt?

$$p = \frac{P}{d \cdot l} = \frac{6500}{6{,}5 \cdot 8{,}5} = 1\text{–}1\text{–}7\text{–}6$$

Die 6 muß geschätzt werden.

$$\mathbf{p = 117{,}6\ kg/cm^2}$$

7. Reziproke Werte

Bei Rechenschiebern ohne die Reziprokteilung R führen wir die Rechnung als normale Division mit Hilfe der Skalen C und D durch.

$$\frac{1}{a} = b$$

Bild 60 zeigt die praktische Durchführung einer solchen Division.

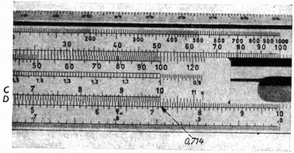


Bild 61

(Normalrechenschieber System „Rietz")

$$\frac{1}{1{,}4} = 0{,}714$$

$a = 1{,}4$ auf C schieben wir über die 1 von D. Das Ergebnis $b = 0{,}714$ lesen wir unter der 10 (auf C) auf D ab (Bild 61).

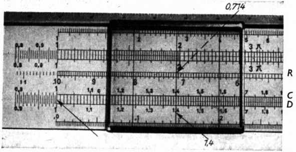


Bild 62

Wollen wir jedoch eine ganze Reihe von reziproken Werten ermitteln, so benutzen wir einen Schieber mit einer Reziprokteilung. Zu diesem Zwecke wird die Zunge so in den Stabkörper eingeschoben, daß sich die Skalen A und B, C und D genau gegenüberstehen.

In den Bildern 62 und 63 wird das durch den Pfeil ohne Zahl angezeigt. Die Zunge darf nun nicht mehr bewegt werden, der Läufer allein dient der Lösung der Aufgabe. In Bild 62 ist das

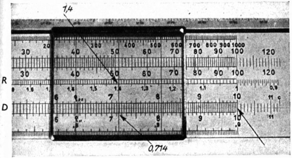


Bild 63

Beispiel noch einmal gezeigt. Selbstverständlich geben auf dem Foto auch der linke und der rechte Läuferstrich reziproke Werte an.

Linker Läuferstrich: $\frac{1}{1{,}241} = 0{,}805$

Rechter Läuferstrich: $\frac{1}{1{,}58} = 0{,}633$

Wir können den reziproken Wert auch auf D ablesen, wenn wir die Zahl a auf R einstellen (Bild 63). Wir stellen 1,4 auf R ein und lesen auf D das Ergebnis 0,714 ab. Zu jedem Wert auf R steht auf D der reziproke Wert.

8. Konstante Verhältnisse und Proportionen

Sollen wir konstante Zahlenverhältnisse ermitteln (insbesondere für Tabellen usw.), so können wir diese Werte auf dem Schieber mühelos finden.

$$\frac{a}{b} = \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3} = \frac{x_4}{y_4} = \frac{x_5}{y_5} = \frac{x_6}{y_6} \quad \text{usw.}$$

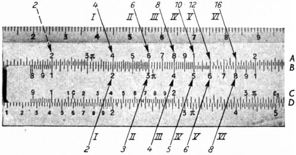


Bild 64

oder

$$n = \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3} = \frac{x_4}{y_4} \quad \text{usw.}$$

Bild 64 zeigt auf einem Taschenrechenschieber die Ausrechnung des Beispiels:

$$2 = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{8}{4} = \frac{10}{5} = \frac{12}{6} = \frac{16}{8} \quad \text{usw.}$$

Die 1 auf B wird unter $a = 2$ auf A geschoben. Selbstverständlich kann man diese Rechnung auch auf den Teilungen C und D ausführen. Diese gleiche Schieberstellung erlaubt auch noch, das reziproke Zahlenverhältnis abzulesen (Bild 65).

$$0{,}5 = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} \quad \text{usw.}$$

Sollen beispielsweise laufend Zentimeterwerte in Zollwerte umgerechnet werden, so ersetzt der Rechenschieber eine Umrechnungstabelle. Für die einmalige Zungeneinstellung muß das Zahlenverhältnis zwischen Zoll und Zentimeter bekannt sein. Es gilt:

1 Zoll (inch) = 2,54 cm

C 1 wird über 2,54 auf D gestellt. Nun kann man allein mit dem Läuferstrich für jeden Zollwert auf C den entsprechenden Zentimeterwert auf D ablesen.

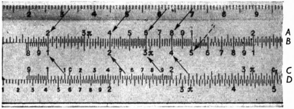


Bild 65

Bild 66 zeigt eine ähnliche Bestimmung von Funktionswerten auf den Teilungen C und D (Normalrechenschieber System „Rietz")

$$y = \frac{x}{a}$$

a ist konstant (im Beispiel $a = 1{,}2$)

Das Foto gibt drei Werte an. Es wurden der Übersichtlichkeit halber die drei Läuferstriche ausgewählt.

$x_1 = 12{,}5$	$y_1 = 10{,}42$
$x_2 = 14{,}1$	$y_2 = 11{,}75$
$x_3 = 15{,}92$	$y_3 = 13{,}27$

Selbstverständlich gilt auf der gesamten Länge der Skalen C und D das Verhältnis

$$a = 1{,}2 = \frac{x}{y}$$

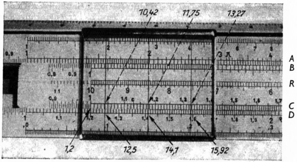


Bild 66

Lautet die Funktion $y = \dfrac{a}{x}$,

so benutzen wir die R-Skala auf der Zunge (Bild 67). (Normalrechenschieber System „Rietz")

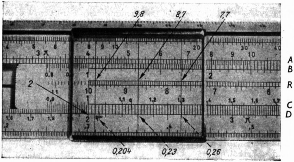


Bild 67

Das eingestellte Beispiel:

$$a = 2 \qquad \begin{array}{ll} x_1 = 9{,}8 & y_1 = 0{,}204 \\ x_2 = 8{,}7 & y_2 = 0{,}230 \\ x_3 = 7{,}7 & y_3 = 0{,}260 \end{array}$$

$$y = \frac{a}{x} \rightarrow a = x \cdot y \quad (\text{z. B. } 2 = 9{,}8 \cdot 0{,}204)$$

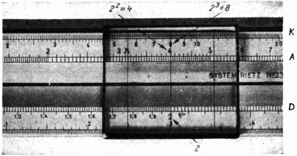


Bild 68

Auf S. 70 wurde bereits gesagt, wie man eine Dreisatzrechnung nach dem Proportionsprinzip rechnen kann. Jede Dreisatzrechnung kann grundsätzlich und ohne Schwierigkeit in eine Proportion umgestellt werden und ist dann mit dem Rechenschieber schnell und sicher auszurechnen. Das Proportionsprinzip ist für den Rechenschieber schlechthin die „goldene Regel"*. Einige einfache Beispiele sollen das beweisen.

1. Ein Auto verbraucht für 100 km Strecke 12 l Kraftstoff. Wieviel Kilometer kann der Wagen mit 7 l fahren?

Proportion: Die Kilometerzahlen verhalten sich zueinander wie die entsprechenden Kraftstoffverbrauche, also:

$$100 : x = 12 : 7 \quad \text{oder} \quad x : 100 = 7 : 12;$$

* Nach Dr. R. Stender, Der moderne Rechenstab, Frankfurt a. M., 1953.

als gewöhnliche Brüche geschrieben

$$\frac{x}{100} = \frac{7}{12}$$

und umgestellt:

$$x = \frac{100 \cdot 7}{12} = \text{rund } 58, \quad x = \mathbf{58\ km}$$

Rechnungsgang: Zuerst Division mit C und D, sodann Multiplikation mit Läufer; über C die Zahl 7 einstellen, auf D das Ergebnis ablesen.

Für das Aufstellen von Tabellenwerten ist diese Einstellung sehr praktisch. Das Verhältnis 100:12 ist konstant, es wird sich lediglich die Zahl 7 ändern. Nun stehen unter allen Zahlen auf C die entsprechenden Werte für x auf D; die beiden Skalen C und D sind also regelrechte Nomogrammteilungen geworden, von denen man sofort, ohne den Läufer benutzen zu müssen, die Ergebnisse ablesen kann.

2. Das gleiche Beispiel, aber dieses Mal wird nach dem Kraftstoffverbrauch gefragt. Wieviel Liter Kraftstoff benötigt der Wagen für eine Strecke von 170 km?

Ansatz:

$$x : 12 = 170 : 100$$

$$\frac{x}{12} = \frac{170}{100}$$

(die rechte Seite wird im Kopf ausgerechnet)

$$x = 12 \cdot 1{,}7 = \text{rund } 20{,}5$$

$$x = \mathbf{20{,}5\ l}$$

3. In der Herstellung haben die bestellten 850 Stück Abdichtungen 2450 DM gekostet. Was kostet ein Dutzend dieser Abdichtungen?

Proportion: Die Preise verhalten sich wie die entsprechenden Stückzahlen.

$$2450 : x = 850 : 12 \quad \text{oder}$$

$$x : 2450 = 12 : 850$$

$$\frac{x}{2450} = \frac{12}{850}, \quad x = \frac{2450 \cdot 12}{850} = 34{,}6$$

$$x = \mathbf{34{,}6\ DM}$$

Zuerst wird die Division 2450:850 auf C und D durchgeführt, alsdann wird mit R die Multiplikation vorgenommen.

4. Zwei elektrische Widerstände sind parallelgeschaltet. R_1 ist 8 Ω groß und R_2 hat einen Widerstand von 11,5 Ω. Durch den 8 Ω-Widerstand fließt ein Strom von 4,5 A. Wie groß ist die Stromstärke in dem Widerstand R_2?

Proportion: Die Stromstärken verhalten sich umgekehrt wie die Widerstände. Also lautet der Ansatz:

$$x : 4{,}5 = R_1 : R_2$$

$$\frac{x}{4{,}5} = \frac{R_1}{R_2}$$

Die Werte eingesetzt:

$$\frac{x}{4{,}5} = \frac{8}{11{,}5}$$

umgestellt:

$$x = \frac{4{,}5 \cdot 8}{11{,}5} = 3{,}13$$

$$x = \mathbf{3{,}13\ A}$$

Die Umrechnungen vom Grad- zum Bogenmaß und vom Altgrad zum Neugrad erfolgen ebenfalls nach dem Proportionsprinzip.

1. x verhält sich zu $2 \cdot \pi$ wie etwa 35° zu 360°

$$\frac{x}{2 \cdot \pi} = \frac{35}{360} \rightarrow x = \frac{2 \cdot \pi \cdot 35}{360}$$

$$x = \text{Bogenmaß von } 35°$$

2. x verhält sich zu 400^g wie 67° zu 360°

$$\frac{x}{400} = \frac{67}{360} \rightarrow x = \frac{400 \cdot 67}{360}$$

$$x = \text{Neugrad des Winkels von 67 Altgrad } (67°)$$

9. Das Quadrat und die Quadratwurzel

Die Teilung A reicht von 1 bis 100, die von D von 1 bis 10. Zu jeder Zahl auf D steht auf A das Quadrat (Quadratzahl). Wir benutzen zum Ablesen den mittleren Läuferstrich oder den Anfang bzw. das Ende der Zungenteilungen. Wir schieben den Läuferstrich beispielsweise auf die Zahl 2 auf D. Unter dem Läuferstrich können wir nun auf A das Quadrat = 4 ablesen. Die Kommastellung ist auch hier im Kopf zu bestimmen. Bild 68 zeigt diese Rechenaufgabe.

$$a = 2, \quad a^2 = 2^2 = 4$$

(Normalrechenschieber System „Rietz", Zunge ist entfernt).

Über Kubus und Kubikwurzel s. S. 103ff.

Es ist zu empfehlen, einige Beispiele durchzurechnen. $3^2 = 9$, $4^2 = 16$, $5^2 = 25$, $6^2 = 36$ usw.

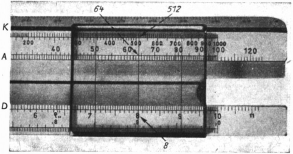


Bild 69

Bild 69 zeigt das Beispiel*

$$a = 8, \quad a^2 = 64$$

Weitere Übungsbeispiele:

$7{,}48^2 = 56$,	$2{,}5^2 = 6{,}25$,	$\pi^2 = 9{,}87$,	$0{,}369^2 = 0{,}136$,
$1{,}7^2 = 2{,}89$	$21{,}5^2 = 462$,	$16^2 = 256$,	$0{,}125^2 = 0{,}0156$,
$5{,}14^2 = 26{,}4$,	$3{,}1^2 = 9{,}61$,	$100{,}5^2 = 10100$,	$88^2 = 7740$,
$2{,}57^2 = 6{,}6$,	$1{,}65^2 = 2{,}72$,	$190{,}5^2 = 36300$,	$41{,}5^2 = 1720$,
$1{,}063^2 = 1{,}13$,	$32{,}5^2 = 1056$,	$8{,}55^2 = 73{,}1$,	$0{,}3^2 = 0{,}09$,
$0{,}4^2 = 0{,}16$,	$0{,}5^2 = 0{,}25$,	$0{,}75^2 = 0{,}562$,	$0{,}9^2 = 0{,}81$,
$1{,}1^2 = 1{,}21$.			

* Die in den Ergebnissen angegebenen 4. Stellen sind mit dem Normalrechenschieber meistens nicht einstellbar. Ihre Bestimmung gestattet der größere Bürorechenschieber.

Die Kommastellung bestimmen wir bei folgenden Aufgaben so:

1. $14{,}6^2 = 2\text{–}1\text{–}3$

im Kopf: $14^2 = 196$
$15^2 = 225$,

mithin lautet das Ergebnis: **213**

2. $2{,}3^2 = 5\text{–}2\text{–}9$

im Kopf: $2^2 = 4$
$3^2 = 9$

also: $2{,}3^2 = \mathbf{5{,}29}$

3. $87{,}1^2 = 7\text{–}5\text{–}9$

im Kopf: $80^2 = 6400$
$90^2 = 8100$
$87{,}1^2 = \mathbf{7590}$

Es genügt aber auch, wenn wir nur eine Grenze bestimmen.

4. $6{,}8^2 = 4\text{–}6\text{–}2$

im Kopf: $7^2 = 49$
$6{,}8^2 = \mathbf{46{,}2}$

5. $1{,}7^2 = 2\text{–}8\text{–}9$
$2^2 = 4$
$1{,}7^2 = \mathbf{2{,}89}$

Bei den Dezimalbrüchen ist es etwas schwieriger.

6. $0{,}24^2 = 5\text{–}7\text{–}6$

$$\left(\frac{24}{100}\right)^2 = \frac{24^2}{100^2} = \frac{576}{10000} = \mathbf{0{,}0576}$$

7. $0{,}4^2 = 1\text{–}6$

$$\frac{16}{100} = \mathbf{0{,}16}$$

8. $0{,}005^2 = 2\text{–}5$

$$\frac{5^2}{1000^2} = \left(\frac{5}{10^3}\right)^2 = \frac{5^2}{10^{3\cdot 2}} = \frac{25}{10^6} = 25 \cdot 10^{-6} = \mathbf{0{,}000025}$$

Ein Quadrat (2. Potenz) wird durch die Quadratwurzel rückgeführt, d. h., von einer gegebenen quadratischen Fläche wird die Seitenlänge gefunden. Das Ziehen der Quadratwurzel ist mithin die Umkehrung der Rechenweise beim Erheben zur 2. Potenz (Quadrat). Der Wurzelradikand wird auf der Teilung A ein-

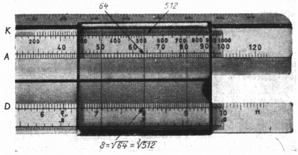


Bild 70

gestellt. Das Ergebnis steht dann unter dem Läuferstrich auf der Teilung *D*. Die Bilder 70 u. 71 zeigen diesen umgekehrten Vorgang.

$$\sqrt{64} = 8$$

(Normalrechenschieber System „Rietz", ohne Zunge)

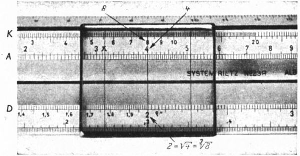


Bild 71

Auch das Potenzbeispiel des Bildes 68 läßt sich umkehren in

$$\sqrt{4} = 2$$

Allein ganz so einfach wie das Potenzieren, z. B. Quadrieren, ist das Wurzelziehen nicht. Wenn wir uns folgende Zahlen ansehen, erkennen wir auch den Grund dafür.

$$\sqrt{4{,}0} = 2{,}0$$
$$\sqrt{40{,}0} = 6{,}325$$
$$\sqrt{400{,}0} = 20{,}0$$
$$\sqrt{4000{,}0} = 63{,}25$$
$$\sqrt{40\,000{,}0} = 200{,}0$$
$$\sqrt{400\,000{,}0} = 632{,}5 \text{ usw.}$$

Obgleich alle Zahlen (Radikanden) vorn mit einer 4 beginnen (und dahinter nur Nullen stehen), ergeben sich als Wurzelwerte (Lösungen) *zwei verschiedene Zahlenfolgen*. Die Stellenzahl dieser Zahlenfolgen wird von der Stellenzahl des Radikanden bestimmt. Um die richtige Lösung zu erhalten, teilen wir jeden Radikanden (wie beim schriftlichen Wurzelziehen) vom Komma aus nach links (bzw. nach rechts) in Zweiergruppen ein.

In der ersten Gruppe ganz links bleibt dann eine einstellige oder eine dreistellige Zahl übrig.

$\sqrt{4} = \sqrt{'04^*} = 2$ (einstellig)

$\sqrt{40} = \sqrt{'40} = 6{,}325$ (zweistellig)

$\sqrt{400} = \sqrt{4'00} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{100} = 2 \cdot 10 = 20$ (einstellig)

$\sqrt{4000} = \sqrt{40'00} = \sqrt{40} \cdot \sqrt{100} = 6{,}325 \cdot 10 = 63{,}25$ (zweistellig)

$\sqrt{40000} = \sqrt{4'00'00} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{10000} = 2 \cdot 100 = 200$ (einstellig)

$\sqrt{400000} = \sqrt{40'00'00} = \sqrt{40} \cdot \sqrt{10000} = 6{,}325 \cdot 100 = 632{,}5$ (zweistellig) usw.

Die in der ersten Zweiergruppe *einstelligen Radikanden* werden auf dem linken Abschnitt der Skala *A* (von 1 bis 10) eingestellt.

---

* Der obere Strich in den Zahlen trennt die Zweiergruppen voneinander.

Die *zweistelligen Radikanden* werden auf dem rechten Abschnitt der Skala A (von 10 bis 100) eingestellt.

Beispiele:

$\sqrt{2} = 1{,}414$, $\sqrt{20} = 4{,}47$, $\sqrt{200} = 14{,}14$, $\sqrt{2000} = 44{,}7$ usw.
$\sqrt{3{,}4} = 1{,}844$, $\sqrt{14{,}6} = 3{,}821$, $\sqrt{230} = 15{,}17$, $\sqrt{870} = 29{,}5$,
$\sqrt{5200} = 72{,}1$, $\sqrt{60} = 7{,}75$, $\sqrt{61} = 7{,}81$, $\sqrt{34} = 5{,}83$,
$\sqrt{130} = 11{,}4$

Die Kommastellung bestimmen wir so, daß wir uns den Radikanden nicht nur für das Einstellen auf der Rechenschieberskala A in Zweiergruppen denken, sondern diese Gruppen auch rechnerisch (im Kopf) auswerten.

Beispiele:

$$\sqrt{230} = \sqrt{2{,}3 \cdot 100} = 1{,}517 \cdot 10 = 15{,}17$$
$$\sqrt{870} = \sqrt{8{,}7 \cdot 100} = 2{,}95 \cdot 10 = 29{,}5$$
$$\sqrt{5200} = \sqrt{52 \cdot 100} = 7{,}21 \cdot 10 = 72{,}1$$
$$\sqrt{137} = \sqrt{1{,}37 \cdot 100} = 1{,}17 \cdot 10 = 11{,}7$$
$$\sqrt{37564} = \sqrt{3{,}7564 \cdot 10^4} = 1{,}938 \cdot 10^2 = 193{,}8$$

Nun wollen wir Dezimalbrüche als Radikanden nehmen.

Beispiele:

$$\sqrt{4} = 2$$
$$\sqrt{0{,}4} = \sqrt{\frac{4}{10}} \quad \text{Wurzel aus 10 ist keine ganze Zahl, also erweitern wir Zähler und Nenner mit 10}$$
$$\sqrt{\frac{4}{10}} = \sqrt{\frac{40}{100}} = \frac{6{,}325}{10} = \mathbf{0{,}6325}$$
$$\sqrt{0{,}04} = \sqrt{\frac{4}{100}} = \frac{2}{10} = \mathbf{0{,}2}$$
$$\sqrt{0{,}004} = \sqrt{\frac{4}{1000}} \quad \text{mit 10 erweitern:}$$
$$\sqrt{\frac{4}{1000}} = \sqrt{\frac{40}{10000}} = \frac{6{,}325}{100} = \mathbf{0{,}06325} \quad \text{usw.}$$

Das Ergebnis (Wurzelwert) ist stets größer als der Radikand (gilt nur bei Radikanden, die kleiner als 1 sind).

$$\sqrt{0{,}17} = \sqrt{\frac{17}{100}} = \frac{4{,}12}{10} = \mathbf{0{,}412}$$
$$\sqrt{0{,}017} = \sqrt{\frac{17}{1000}} = \sqrt{\frac{1{,}7}{100}} = \frac{1{,}304}{10} = \mathbf{0{,}1304}$$
$$\sqrt{0{,}0215} = \sqrt{\frac{2{,}15}{100}} = \frac{1{,}467}{10} = \mathbf{0{,}1467}$$

1. $\sqrt{0{,}042} = \sqrt{\frac{4{,}2}{100}}$, **2.** $\sqrt{0{,}0789} = \sqrt{\frac{7{,}89}{100}}$,

3. $\sqrt{0{,}905} = \sqrt{\frac{90{,}5}{100}}$, **4.** $\sqrt{0{,}0028} = \sqrt{\frac{28}{10000}} = \frac{\sqrt{28}}{100}$,

5. $\sqrt{0{,}5} = \sqrt{\frac{50}{100}}$, **6.** $\sqrt{0{,}523} = \sqrt{\frac{52{,}3}{100}}$,

7. $\sqrt{0{,}0523} = \sqrt{\frac{5{,}23}{100}}$, **8.** $\sqrt{0{,}00008} = \sqrt{\frac{80}{10^6}} = \frac{\sqrt{80}}{1000}$,

9. $\sqrt{0{,}25576} = \sqrt{\frac{25{,}576}{100}}$, **10.** $\sqrt{0{,}07856} = \sqrt{\frac{7{,}856}{100}}$,

11. $\sqrt{0{,}00859} = \sqrt{\frac{85{,}9}{10000}} = \frac{\sqrt{85{,}9}}{100}$, **12.** $\sqrt{0{,}24089} = \sqrt{\frac{24{,}089}{100}}$.

Ergebnisse:*

1. 0,205; **2.** 0,281; **3.** 0,951; **4.** 0,0529; **5.** 0,707; **6.** 0,723; **7.** 0,229; **8.** 0,00894; **9.** 0,506; **10.** 0,281; **11.** 0,0927; **12.** 0,491.

* Vgl. Anmerkung auf Seite 84.

Anwendungsbeispiele:

1. Ein quadratischer Platz hat eine Fläche von $1840\ m^2$. Welche Seitenlänge hat er?

$$\text{Seitenlänge} = \sqrt{1840} = \sqrt{18'40} = \mathbf{42{,}9\ m}$$

2. Wie lang ist die Diagonale in einem Rechteck von 4 cm (6) und 3 cm (2) Seitenlänge?
(Pythagoreischer Lehrsatz)

$$\text{Diagonale } \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = \mathbf{5\ cm}$$

$$\text{Diagonale } \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} = \mathbf{6{,}325\ cm}$$

3. Wie lange fällt ein Stein von einem 45 m (60 m) hohen Turm?

$$g \approx 10\ m/s^2$$

$$\text{Zeit} = \sqrt{\frac{h \cdot 2}{g}} = \sqrt{\frac{45}{5}} = \sqrt{9} = \textbf{3 Sekunden}$$

$$t = \sqrt{\frac{60 \cdot 2}{10}} = \sqrt{\frac{120}{10}} = \sqrt{12} = \mathbf{3{,}464\ s}$$

10. Quadrat und Quadratwurzel kombiniert mit Multiplikation und Division

Die einzelnen Verbindungen des Quadrates bzw. der Quadratwurzel mit den Rechenvorgängen Multiplikation bzw. Division wollen wir jetzt erörtern und einige entsprechende Beispiele dafür durchrechnen. Alle Berechnungen wurden mit dem Normalrechenschieber System „Rietz" durchgeführt.

1. Ein Produkt soll *quadriert* werden.

$$\boxed{(a \cdot b)^2 = c}$$

Die Multiplikation $a \cdot b$ führen wir auf den Skalen C und D bzw. D und R durch. Über dem Ergebnis auf D steht auf A das Quadrat.

Beispiel (Bild 72):

Wir wollen das Volumen eines zylindrischen Ringes berechnen. Es gilt die Formel:

$$V = \frac{\pi^2 \cdot d^2 \cdot R}{4}$$

d Zylinderdurchmesser $= 0{,}7$ cm
R Ringdurchmesser $= 4$ cm

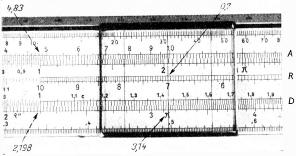


Bild 72

Wir setzen die Werte ein:

$$V = \frac{\pi^2 \cdot d^2 \cdot 4}{4} = \pi^2 \cdot d^2 = (\pi \cdot d)^2 = (3{,}14 \cdot 0{,}7)^2$$

Hier wird also ein Produkt quadriert. Über π auf D stellen wir die 7 auf R und erhalten das Zwischenergebnis 2–1–9–8 auf D. Über D steht auf A das Quadrat davon: 4–8–3

$$V = \mathbf{4{,}83\ cm^3}$$

2. Beim Quadrieren eines Quotienten verfahren wir genau so:

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^2 = c}$$

Auf den Skalen C und D bzw. D und R dividieren wir $\frac{a}{b}$. Über das Ergebnis stellen wir den Läufermittelstrich und können dann auf A das Quadrat ablesen.

Beispiel:

Wie stark drückt eine hydraulische Presse, wenn die Zylinderdurchmesser $d_1 = 12$ cm, $d_2 = 0{,}9$ cm und die bewegende Kraft $P_2 = 5$ kg bekannt sind?

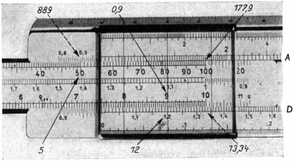


Bild 73

Die gesuchte Kraft P_1 berechnet man nach der Proportion:

$$\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 = \frac{P_1}{P_2}$$

Nach P_1 umgestellt:

$$P_1 = P_2 \cdot \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 = 5 \cdot \left(\frac{12}{0{,}9}\right)^2$$

Bild 73 zeigt uns die Lösung dieser Aufgabe. Über 1–2 auf D schieben wir die Zahl 9 auf C. Unter der 10 von C steht das 1. Zwischenergebnis:

1–3–3–4

Darüber auf A finden wir das Quadrat von 13,34 (= 177,9). Die Multiplikation mit 5 führen wir mit den Skalen A und B durch. Über 5 (auf B) steht auf der linken Verlängerung (rot) der Skala A das Endergebnis 8–8–9.

$$P_1 = \mathbf{889\ kg}$$

3. Soll ein Quadrat mit einer Zahl multipliziert werden

$$\boxed{a^2 \cdot b = c}$$

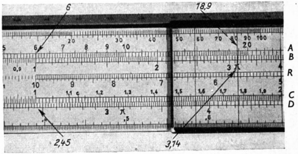


Bild 74

so stellen wir a auf D ein, schieben den Läufermittelstrich darüber und erhalten auf A das Quadrat a^2. Nun multiplizieren wir auf den Skalen A und B. Das Ergebnis c wird auf A (über b auf der Zungenteilung B) abgelesen.

Beispiel (Bild 74):

Wir berechnen eine Kreisfläche. Wir wählen die Formel

$$F = r^2 \cdot \pi$$

Der Radius beträgt 2,45 cm

$$F = 2{,}45^2 \cdot \pi$$

Die Zahl 2,45 stellen wir auf D ein und erhalten darüber auf A das Quadrat (6). Die Multiplikation mit π führen wir auf den

Skalen A und B durch. Die Zunge schieben wir so, daß die 1 von B unter der 6 auf A zu stehen kommt. Über π auf B steht auf A das Ergebnis

$$F = \mathbf{18{,}9\ cm^2}$$

4. Im Gegensatz zu diesem Beispiel dividieren wir jetzt ein Quadrat durch eine Zahl.

$$\boxed{\frac{a^2}{b} = c}$$

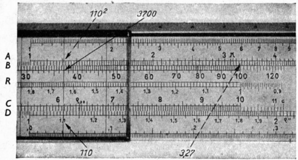


Bild 75

Auch hier wird a auf D eingestellt, wodurch a^2 auf A ermittelt wird. Nun dividieren wir durch die Zahl b, die wir auf B suchen und unter a^2 (auf A) schieben. Das Ergebnis wird auf A über der 1 bzw. 100 der Zungenteilung B abgelesen.

Beispiel (Bild 75):

Wie groß ist die Leistung N bei bekannter Spannung U und bekanntem Widerstand R?

$$U = 110\,\mathrm{V}, \quad R = 3700\,\Omega$$

$$N = \frac{U^2}{R}, \quad N = \frac{110^2}{3700}$$

Die Zahl 1–1 stellen wir auf D ein und erhalten auf A 110^2. Die Zahl 3–7 auf B schieben wir darunter und lesen über B 100 auf A das Ergebnis 3–2–7 ab.

$$N = \mathbf{3{,}27\ W}$$

5. Wird eine Zahl durch ein Quadrat dividiert

$$\boxed{\frac{a}{b^2} = c}$$

so stellen wir b auf D ein, erhalten durch den darübergestellten Läuferstrich auf A das Quadrat b^2. Darunter stellen wir B 100 und lesen unter a auf A das Ergebnis auf B ab. Wir können

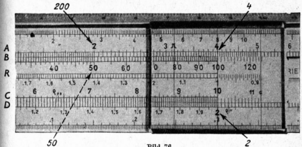


Bild 76

auch a (auf B eingestellt) unter Quadrat von b^2 schieben und lesen auf B unter der 1 von A das Ergebnis ab*.

Beispiel (Bild 76):

Wie groß ist die Beleuchtungsstärke E einer 200kerzigen Lampe (HK) in der Entfernung $r = 2$ m? ($\alpha = 0°$)

$$E = \frac{J}{r^2}$$

$$E = \frac{200}{2^2} = \frac{200}{4} = \mathbf{50\ Lux}$$

* Vgl. Abschnitt 12 „Hinweis für das Formelrechnen" Seite 110.

Die Zahl 2 stellen wir auf D ein und erhalten auf A das Quadrat. Jetzt stellen wir B 100 darunter und lesen unter der 2 auf A das Ergebnis auf B ab.

Die Aufgabe kann auch anders gelöst werden. Man beginnt dann die Rechnung wie üblich mit der Einstellung des Zählers.

Der Zähler (200) wird auf A eingestellt. Da die Zahl 200 nicht vorhanden ist, müssen wir die Zahl 2 nehmen. Darüber wird der Läufermittelstrich gestellt. Den Nenner 2 auf C schieben wir

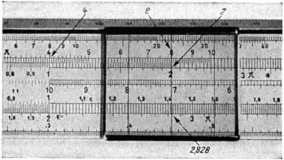


Bild 77

nun unter den Läuferstrich und können alsdann über 100 auf B das Ergebnis (50) auf A ablesen.

6. Beim geometrischen Mittel

$$\boxed{\sqrt{a \cdot b} = c}$$

wird das Produkt $a \cdot b$ auf den Skalen A und B ausgerechnet. Auf das Ergebnis dieser Multiplikation stellen wir den Läuferstrich und lesen unter diesem auf D das Ergebnis ab.

Beispiel (Bild 77):

Ein Lehrsatz des Euklid besagt, daß das Produkt der beiden Kathetenprojektionen p und q auf die Hypotenuse gleich dem

Quadrat der Höhe h auf der Hypotenuse ist

$$p \cdot q = h^2, \qquad h = \sqrt{p \cdot q}$$
$$q = 2 \text{ cm}, \qquad p = 4 \text{ cm}$$

Auf A stellen wir 4 ein und schieben B 1 darunter. Über der 2 auf B steht das Produkt 8. Wir schieben den Läuferstrich darüber und erhalten dadurch auf D den Wurzelwert 2–8–2–8.

$$h = \mathbf{2{,}828 \text{ cm}}$$

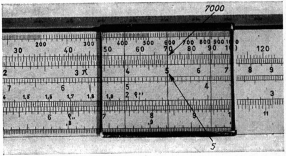


Bild 78

7. Auch bei der Form

$$\boxed{\sqrt{\frac{a}{b}} = c}$$

verfahren wir so, nur ist es jetzt ein Quotient, den wir zuerst auf den Skalen A und B ermitteln.

Beispiel (Bild 78 u. 79):

Wir wollen das Übersetzungsverhältnis $\ddot{u}$ eines Ausgangstransformators berechnen. Der innere Widerstand der Endröhre beträgt $R_i = 7000\ \Omega$. Die Lautsprecherspule hat $R_a = 5\ \Omega$ Widerstand.

$$\ddot{u} = \sqrt{\frac{R_i}{R_a}}, \quad \ddot{u} = \sqrt{\frac{7000}{5}}$$

Der Radikand wird nach erfolgter Division noch 4stellig sein, weshalb wir, um für das nachfolgende Radizieren die nötige 2stellige Zahl auf A zu erhalten, den ersten Gang der Rechnung mit 70:5 auf den Skalen A und B beginnen (Bild 78). Das Zwischenergebnis (1400) steht über B 1 auf A (Bild 79). Nun ziehen wir die Quadratwurzel und haben auf D den Wurzelwert 3–7–4.

$$\ddot{u} = 37{,}4$$

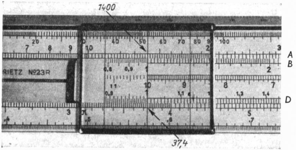


Bild 79

8. Lautet die Aufgabe

$$\boxed{\frac{\sqrt{a}}{b} = c}$$

so stellen wir a auf A ein, schieben den Läufermittelstrich darüber und erhalten so auf D den Wurzelwert. Nun führen wir mit Hilfe der Skalen C und D die Division durch b durch.

Beispiel (Bild 80 u. 81):

Die Frequenz f des mathematischen Pendels wird durch die Pendellänge l und die Erdbeschleunigung g bestimmt.

$$f = \frac{1}{2 \cdot \pi} \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$l = 0{,}202 \text{ m}, \qquad g \approx 10 \text{ m/s}^2$$

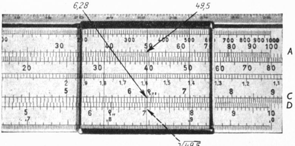


Bild 80

Der Radikand ausgerechnet:

$$\frac{10}{0{,}202} = 49{,}5 \quad \text{(bei } g = 9{,}81 \text{ ist es } 48{,}5\text{)}$$

Damit wird die Aufgabe:

$$f = \frac{\sqrt{49{,}5}}{6{,}28}$$

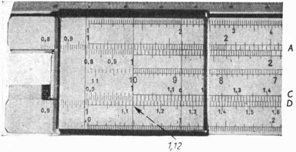


Bild 81

Wir stellen 49,5 auf A ein und erhalten auf D den Wurzelwert. Nun schieben wir 6,28 auf C darüber und lesen unter C 1 auf D (Bild 81) das Ergebnis ab: 1–1–2

$$f = \mathbf{1{,}12\ Hz}$$

9. Wird eine Zahl durch einen Wurzelwert dividiert

$$\boxed{\frac{a}{\sqrt{b}} = c}$$

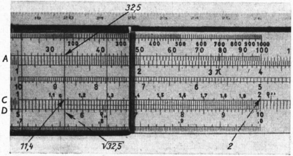


Bild 82

so erhalten wir den Wurzelwert $\sqrt{b}$ wie bei der vorherigen Aufgabe auf D. Nun schieben wir a auf C über den Wert $\sqrt{b}$ (auf D) und erhalten über der 1 bzw. 10 von D das Ergebnis*.

Beispiel (Bild 82):
Wie groß ist die Stromstärke I eines induktiven Stromkreises?

$$U = 11{,}4\ \mathrm{V}, \qquad R = 2\ \Omega, \qquad \omega L = 5{,}34\ \Omega$$

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} = \frac{11{,}4}{\sqrt{2^2 + 5{,}34^2}} = \frac{11{,}4}{\sqrt{32{,}5}}$$

* Vgl. Abschnitt 12 Hinweis für Formelrechnen . . . S. 110.

Zuerst ziehen wir aus 32,5 die Quadratwurzel. Wir stellen den Radikanden auf A ein und erhalten auf D den Wurzelwert. Darüber schieben wir 11,4 auf C und erhalten über D 10 auf C das Ergebnis.

$$I = \mathbf{2\ A}$$

Beginnt man die Rechnung mit der Einstellung des Zählers, so wird dieser unter dem Läufermittelstrich auf D eingestellt. Anschließend schiebt man den Nenner (Wurzelradikand 32,5) auf B unter diesen Strich. Das Ergebnis steht dann unter C 10 auf D (2).

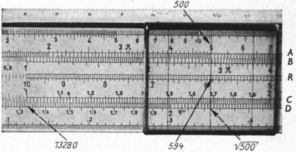


Bild 83

10. Als letzte Kombinationsmöglichkeit verbleibt

$$\boxed{a \cdot \sqrt{b} = c}$$

b wird auf A gesucht und der Läufermittelstrich darübergestellt. Unter dem Strich erhalten wir auf D den Wurzelwert $\sqrt{b}$. Nun multiplizieren wir auf den Skalen C und D bzw. D und R.

Beispiel (Bild 83):
Die Geschwindigkeit der Elektronen in einer Glühkatodenröhre wird von der angelegten Anodenspannung U_A bestimmt.

$$v = 594\sqrt{U_A}, \qquad U_A = 500\ \mathrm{V}, \qquad v = 594 \cdot \sqrt{500}$$

Die Zahl 5 stellen wir auf A ein (nicht 50). Auf D erhalten wir dann den Wurzelwert. Über diesen stellen wir 5–9–4 auf R und können unter C 1 bzw. R 10 das Ergebnis auf D ablesen: 1–3–2–8

$$v = \mathbf{13280\ km/s}$$

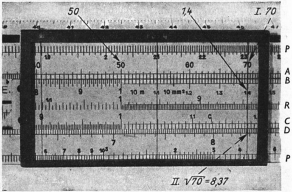


Bild 84

Zum Schluß wollen wir die Kombinationsaufgabe

$c = \frac{1}{\sqrt{a \cdot b}}$ mit den Werten $\frac{1}{\sqrt{50 \cdot 1{,}4}} = 0{,}1195$ durchrechnen (Bürorechenschieber „Elektro").

Bild 84 zeigt den ersten Teil der Rechnung. Auf den Skalen A und B rechnen wir das Produkt $a \cdot b = 50 \cdot 1{,}4$ aus. Das Zwischenergebnis $50 \cdot 1{,}4 = 70$ finden wir auf A. Nun schieben wir den Läuferstrich darüber und bestimmen damit den Wurzelwert $\sqrt{70}$, wir finden ihn unter dem Läuferstrich auf D. Hat der Rechenschieber eine Reziprokskala R, so können wir, ohne daß ein weiterer Vorgang nötig ist, unter dem Läuferstrich, der uns

den Wurzelwert anzeigt, auf R auch den reziproken Wert

$$\frac{1}{\sqrt{70}} = \frac{1}{8{,}37} = 0{,}1195$$

ablesen (Bild 85). Natürlich muß dabei die Zunge so eingeschoben werden, daß sich D 1 mit C 1 bzw. A 1 mit B 1 decken.

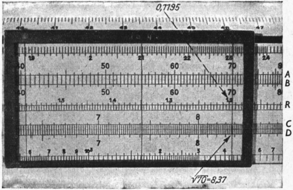


Bild 85

11. Kubus und Kubikwurzel

(3. Potenz und 3. Wurzel)

Bei vielen Rechenschiebern befindet sich über der quadratischen Skala A (von 1 bis 100) die Skala K, Kubikskala genannt. Diese reicht von 1 bis 1000. Die Teilung der Skalen C und D ist hier dreimal hintereinander aufgetragen, und dennoch ist die gesamte Skala nicht länger, als es die Normalskalen C und D sind. Die zugehörige Bereichsskala zu K ist die Normalskala D. Während wir auf der Skala A die Quadrate der auf D eingestellten Zahlen ablesen können, sind es auf der Skala K die Kuben (3. Potenz). Bild 68 (S. 81) zeigt neben dem Quadrat von 2 auch den Kubus.

$$2^3 = 8$$

Wir können auf dieser Skala Zahlen (Kuben) bis 1000 ablesen. So ergibt nach Bild 69 (S. 84):

$$8^3 = 512$$

Erst bei $10^3 = 1000$ wird die obere Grenze der Skala erreicht. Die Ermittlung der Stellenzahl ist hier noch etwas schwieriger, als es bei dem Quadrieren schon war; denn eine zweimalige Multiplikation mit sich selbst

$$a \cdot a \cdot a = a^3$$

ergibt viel größere Abweichung vom Ausgangswert, als wir es beim Quadrat kennengelernt haben.

Haben wir bei der 2. Potenz von 10 erst 100 erreicht:

$$10^2 = 100$$

so ist es hier schon die Zahl 1000:

$$10^3 = 1000$$

Das Quadrat von 100^2 ergab 10000. Jetzt gilt

$$100^3 = 1\,000\,000$$

Wir können uns als Anhaltspunkt merken:
Alle Zahlen von 1 bis 10 ergeben in der 3. Potenz Zahlen zwischen 1 und 1000.

$$1^3 = 1$$
$$10^3 = 1000$$

Alle Zahlen von 10 bis 100 ergeben in der 3. Potenz Werte zwischen 1000 und 1000000.

$$10^3 = 1000$$
$$100^3 = 1\,000\,000$$

Die Kenntnis der Kubikwerte der ganzen Zahlen von 1 bis 10 soll uns mehr Sicherheit im Bestimmen der Stellenzahl geben.

$1^3 = 1$	$6^3 = 216$
$2^3 = 8$	$7^3 = 343$
$3^3 = 27$	$8^3 = 512$
$4^3 = 64$	$9^3 = 729$
$5^3 = 125$	$10^3 = 1000$

Und nun wollen wir uns einmal echte Brüche (kleiner als 1) ansehen. Es gilt

$$0{,}1^2 = 0{,}01 \quad \text{und} \quad 0{,}1^3 = 0{,}001$$

$$\left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} \qquad \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000}$$

$$0{,}01^2 = 0{,}0001 \quad \text{und} \quad 0{,}01^3 = 0{,}000001$$

Daraus entnehmen wir:

Alle Zahlen zwischen 1 und 0,1 (also 0,2; 0,3; 0,4; 0,5 usf.) ergeben Kuben zwischen 1 und 0,001.

Alle Zahlen zwischen 0,1 und 0,01 ergeben Kuben zwischen 0,001 und 0,000001. Bei derartigen Zahlen ist es ratsam, sich der Zehnerpotenzreihe zu bedienen.

$$0{,}1^3 = 10^{-3}$$
$$0{,}01^3 = 10^{-6}$$
$$0{,}001^3 = 10^{-9}$$
$$0{,}0001^3 = 10^{-12}$$

Beispiele:*

$1{,}1^3 = 1{,}33$; $1{,}5^3 = 3{,}375$; $1{,}68^3 = 4{,}74$; $2{,}2^3 = 10{,}65$
$3{,}5^3 = 42{,}8$; $6{,}8^3 = 314$; $8{,}5^3 = 614$; $12^3 = 1728$;
$20^3 = 8000$; $200^3 = 8\,000\,000$; $49{,}2^3 = 119\,000$; $100{,}5^3 = 1\,015\,000$

Dezimalbrüche:

$0{,}9^3 = 0{,}729$; $0{,}8^3 = 0{,}512$; $0{,}75^3 = 0{,}422$; $0{,}7^3 = 0{,}343$;
$0{,}6^3 = 0{,}216$; $0{,}5^3 = 0{,}125$; $0{,}4^3 = 0{,}064$; $0{,}3^3 = 0{,}027$;
$0{,}25^3 = 0{,}0156$; $0{,}2^3 = 0{,}008$; $0{,}125^3 = 0{,}00195$.

Wir rechnen:

$$0{,}2^3 = \left(\frac{2}{10}\right)^3 = \frac{2^3}{10^3} = \frac{8}{1000} = \mathbf{0{,}008}$$

$$0{,}125^3 = \left(\frac{125}{1000}\right)^3 = \left(\frac{1{,}25}{10}\right)^3 = \frac{1{,}953}{1000} = \mathbf{0{,}00195}$$

$$0{,}0042^3 = \left(\frac{42}{10\,000}\right)^3 = \frac{42^3}{10^{12}} = \frac{74\,100}{10^{12}} = \mathbf{7{,}41 \cdot 10^{-8}}$$

Aus Bild 70 (S. 86) ersehen wir, daß die Zahl 8 die Quadratwurzel aus 64 und die Kubikwurzel aus 512 ist. Die Kubikwurzel aus 8 ist wiederum

$$\sqrt[3]{8} = 2 \quad \text{(Bild 71, S. 86)}$$

* Vgl. Anmerkung auf S. 84.

Wir können auf dem Rechenschieber die Wurzeln aus den Zahlen von 1 bis 1000 sofort — mit richtiger Stellenzahl — ablesen.

$$\sqrt[3]{8} = 2$$
$$\sqrt[3]{80} = 4{,}31$$
$$\sqrt[3]{800} = 9{,}28$$

Wie sieht es nun bei noch größeren Zahlen (über 1000) aus?

$$\sqrt[3]{8000} = \sqrt[3]{8 \cdot 1000} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{1000} = 2 \cdot 10 = 20$$
$$\sqrt[3]{80\,000} = \sqrt[3]{80 \cdot 1000} = \sqrt[3]{80} \cdot \sqrt[3]{1000} = 4{,}31 \cdot 10 = \mathbf{43{,}1}$$
$$\sqrt[3]{800\,000} = \sqrt[3]{800} \cdot \sqrt[3]{1000} = 9{,}28 \cdot 10 = \mathbf{92{,}8}$$

Wieder sind es die drei Wurzelwerte, nur jetzt als Zehner.

$$\sqrt[3]{8\,000\,000} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{10^6} = 2 \cdot 10^{\frac{6}{3}} = 2 \cdot 10^2 = \mathbf{200}$$
$$\sqrt[3]{80\,000\,000} = \sqrt[3]{80} \cdot \sqrt[3]{10^6} = \sqrt[3]{80} \cdot 10^{\frac{6}{3}} = 4{,}31 \cdot 100 = \mathbf{431}$$
$$\sqrt[3]{800\,000\,000} = \sqrt[3]{800} \cdot 10^{\frac{6}{3}} = 9{,}28 \cdot 100 = \mathbf{928}$$

Wurden die Radikanden der Quadratwurzeln in Zweiergruppen eingeteilt, so sind es hier Dreiergruppen.

Wir stellen ein:

$\sqrt[3]{3}$	→	3 der Skala K
$\sqrt[3]{30}$	→	30 „ „ „
$\sqrt[3]{300}$	→	300 „ „ „
$\sqrt[3]{3'000}$	→	3 „ „ „
$\sqrt[3]{30'000}$	→	30 „ „ „
$\sqrt[3]{300'000}$	→	300 „ „ „
$\sqrt[3]{3'000'000}$	→	3 „ „ „ usw.

Auch bei Dezimalbrüchen können wir in diese Dreiergruppen einteilen.

Wir stellen ein:

$\sqrt[3]{0{,}300'}$ → 300 der Skala K

denn es gilt:

$$\sqrt[3]{0{,}3} = \sqrt[3]{\frac{3}{10}} = \sqrt[3]{\frac{300}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{300}}{10}$$

$\sqrt[3]{0{,}030'}$ → 30 der Skala K

$$\sqrt[3]{\frac{3}{100}} = \sqrt[3]{\frac{30}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{30}}{10}$$

$\sqrt[3]{0{,}003'}$	→	3 der Skala K
$\sqrt[3]{0{,}000'300'}$	→	300 „ „ „
$\sqrt[3]{0{,}000'030'}$	→	30 „ „ „

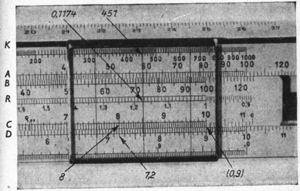


Bild 86

Beispiele:

$\sqrt[3]{4} = 1{,}587$;	$\sqrt[3]{70} = 4{,}12$
$\sqrt[3]{87{,}5} = 4{,}44$;	$\sqrt[3]{779} = 9{,}2$
$\sqrt[3]{0{,}75} = 0{,}909$;	$\sqrt[3]{0{,}2} = 0{,}585$
$\sqrt[3]{0{,}482} = 0{,}784$;	$\sqrt[3]{0{,}008} = 0{,}2$

Wir wollen nun eine gemischte Aufgabe durchrechnen.

$$\sqrt[3]{451} \cdot 0{,}1174 \cdot 8 = \mathbf{7{,}2}$$

Bild 86 zeigt die zugehörigen Einstellungen. Zuerst suchen wir auf K die Zahl 451, schieben den Läufermittelstrich darüber und erhalten damit auf D den Wurzelwert. Nun multiplizieren wir diesen Wert mit 0,1174. Zu diesem Zweck schieben wir R so, daß diese Zahl unter dem Läufermittelstrich steht. Das Zwischenergebnis (0,9) steht unter der 10 auf D. Die zweite Multiplikation führen wir mit der Skala C durch. Unter der Zahl 8 auf C steht auf D das Ergebnis 7,2.

Bringen wir die Skalen A und K zueinander in Beziehung, so gibt das folgenden interessanten Fall.

$$d = \text{Zahl auf } D$$
$$a = \text{,, \quad ,, } A$$
$$k = \text{,, \quad ,, } K$$
$$a = d^2 \rightarrow d = \sqrt{a}$$
$$k = d^3 \rightarrow d = \sqrt[3]{k}$$
$$d = d$$
$$\sqrt{a} = \sqrt[3]{k} \rightarrow a^{\frac{1}{2}} = k^{\frac{1}{3}}$$

Wir quadrieren beide Seiten:

$$a^{\frac{2}{2}} = k^{\frac{2}{3}}$$

$$\boxed{a = k^{\frac{2}{3}}}$$

$$\boxed{k = a^{\frac{3}{2}}}$$

Für jede Zahl auf der Skala A finden wir auf K die Potenz mit der Hochzahl $\frac{3}{2}$.

Umgekehrt sind auf A die Potenzen der auf K eingestellten Zahlen abzulesen, nur ist jetzt die Hochzahl $\frac{2}{3}$.

Beispiele:

1. Das 3. Keplersche Gesetz lautet: Die Quadrate der Umlaufzeiten der einzelnen Planeten verhalten sich wie die 3. Potenzen ihrer mittleren Entfernungen von der Sonne. Wieviel beträgt die mittlere Entfernung des Mars von der Sonne?

Umlaufzeit der Erde um die Sonne $T_2 = 365$ Tage
,, des Mars ,, ,, ,, $T_1 = 686$,,
mittl. Entfernung der Erde von der Sonne $a_2 = 149{,}5 \cdot 10^6$ km
,, ,, des Mars ,, ,, ,, $a_1 = ?$

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$
$$a_1^3 = a_2^3 \cdot \frac{T_1^2}{T_2^2}$$
$$a_1 = a_2 \cdot \sqrt[3]{\frac{T_1^2}{T_2^2}}$$
$$a_1 = a_2 \cdot \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{2}{3}}$$
$$= 149{,}5 \cdot 10^6 \left(\frac{686}{365}\right)^{\frac{2}{3}}$$
$$= 149{,}5 \cdot 10^6 \cdot 1{,}881^{\frac{2}{3}}$$
$$= 149{,}5 \cdot 10^6 \cdot 1{,}523$$
$$a_1 = 228 \cdot 10^6 \text{ km}$$

Der Mars ist $228 \cdot 10^6$ km von der Sonne entfernt (mittl. Entfernung).

2. Zwischen Anode und Kathode einer Radioröhre herrscht eine Spannung $U_A = 250$ V. Die räumliche Entfernung der beiden Elektroden beträgt $r = 8$ mm. Wie groß ist die Spannung in der Entfernung 4 mm von der Kathode?

Es gilt die Gleichung:

$$\frac{U_x}{U_A} = \left(\frac{x}{r}\right)^{\frac{4}{3}} = \left[\left(\frac{x}{r}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^2$$

Wir stellen die Gleichung um und setzen die Werte ein:

$$U_x = U_A \cdot \left[\left(\frac{x}{r}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^2 = 250 \left[\left(\frac{4}{8}\right)\right]^{\frac{2}{3}}\Big]^2$$

$$U_x = 250\left(0{,}5^{\frac{2}{3}}\right)^2$$

Der Wert in der Klammer wird umgeformt in:

$$\sqrt[3]{0{,}5^2}$$

Die Kubikwurzel aus $0{,}5^2$ können wir ziehen, wenn wir auf K die Zahl 500 einstellen. Nachdem wir den Läuferstrich darübergestellt haben, lesen wir unter diesem auf A 6–3 ab. Nach Bestimmung der Stellenzahl

$$0,63$$

Die Aufgabe lautet nach dieser Teillösung

$$U_x = 250 \cdot 0,63^2$$

Wir können auf den Skalen A und B bleiben, wenn wir so rechnen:

$$250 \cdot 0,63 \cdot 0,63.$$

Oder aber wir stellen 0,63 auf D ein und erhalten auf A das Quadrat, das wir mit 250 multiplizieren. Diese letzte Teilrechnung führen wir auf den Skalen A und B durch. Das Ergebnis lautet:

9–9–2

$$U_x = 99,2 \approx \mathbf{100\ V}$$

12. Hinweis für das Formelrechnen

Es können Gründe vorliegen, daß man bei der Berechnung nach einer Formel mit dem Nenner beginnt und nicht, wie üblich, mit dem Zähler. Der Grund kann beispielsweise der sein, daß sich im Nenner eine Potenz oder eine Wurzel befindet. Selbstverständlich kann man in solchen Fällen, wie allgemein gebräuchlich, zuerst einmal den Nenner (die Wurzel oder das Quadrat) berechnen, um sodann mit diesem Zwischenergebnis den normalen Weg, beginnend mit der Einstellung des Zählers, zu beschreiten. Nötig ist dies aber nicht; man kann auch die gesamte Rechnung in einem Ganzen erledigen.

Beispiel: Die Formel soll lauten:

$$x = \frac{256}{\sqrt{6,3} \cdot 0,383}$$

(Quadratwurzel siehe Abschnitt „Das Quadrat und die Quadratwurzel" auf Seite 83).

Man beginnt damit, auf A die Zahl 6,3 einzustellen. Auf D steht dann der Wurzelwert 2,51. Die nun folgende Multiplikation: $2,51 \cdot 0,383$ wird mit Hilfe der Reziprokskala R durchgeführt. Das Zwischenergebnis (0,961) steht unter C 10 auf D. Der Schieber bleibt in dieser Stellung stehen. Der Zähler 256 ist nun auf D zu suchen. Über diesem Wert steht sodann auf C das Ergebnis: 2–6–6–3

$$x = 266,3$$

Auch bei der folgenden Formel wird zuerst der Nenner eingestellt.

$$x = \frac{\mathbf{16,2}}{\mathbf{1,52^2 \cdot 4,3}}$$

(2. Potenz siehe Abschnitt „Das Quadrat und die Quadratwurzel" auf Seite 83).

Die Zahl 1,52 wird auf D eingestellt, auf A steht dann das Quadrat. Der Läufermittelstrich bleibt darüber stehen. Nun wird B 1 (bzw. B 10) daruntergeschoben. Über 4,3 auf B steht dann das Zwischenergebnis auf A (9,93). Dieser Wert wird mit dem Läufermittelstrich festgehalten und B 1 daruntergeschoben. Sodann wird auf A der Zähler 16,2 gesucht. Darunter steht dann auf B das gesuchte Ergebnis: 1,63.

13. Das Berechnen von Tabellenwerten

Fortlaufende Tabellenwerte können sehr schnell mit dem Rechenschieber ermittelt werden.

Der einfachste Fall ist der, daß Multiplikationen mit einem sich ändernden Faktor vorgenommen werden.

Beispiel:

1. $1085 \cdot 7,6 \ = 8–2–5$
2. $1085 \cdot 4,45 = 4–8–3$
3. $1085 \cdot 2,87 = 3–1–1–4$
4. $1085 \cdot 1,095 = 1–1–8–8$ usw.

Die Zahl 1085 wird dabei auf D eingestellt. Darüber wird C 1 geschoben. Diese Einstellung bleibt nun während des weiteren Rechnens bestehen. Es wird mit der C-Skala gerechnet; auf D steht dann das Ergebnis

Soll dividiert werden, so ist folgendermaßen zu verfahren:

1. $8,3 : 6,4 = 1–2–9–6$
2. $8,3 : 10,8 = 7–6–8$
3. $8,3 : 15,9 = 5–2–2$
4. $8,3 : 19,2 = 4–3–2$ usw.

Die Zahl 8,3 wird auf D eingestellt. Der Läufermittelstrich wird darüber geschoben und bleibt während der weiteren Berechnungen so stehen. Es wird nun nur noch mit der Zunge, und zwar mit der Skala C gerechnet. Das Ergebnis steht dann unter C 1 auf D.

Soll die Kreisfläche F bei verschiedenen Durchmessern d bestimmt werden, so wird die bekannte Formel für die Kreisfläche etwas vereinfacht:

$$F = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 = 0{,}785 \cdot d^2 *$$

$F = d^2 \cdot 0{,}785$ (Quadrate siehe Abschnitt „Das Quadrat und die Quadratwurzel" auf Seite 83).

1. $d^1 = 1{,}5 \rightarrow F = 0{,}785 \cdot 1{,}5^2 =$ 1–7–7 (1,77)
2. $d^2 = 2 \rightarrow F = 0{,}785 \cdot 2^2 =$ 3–1–4 (3,14)
3. $d^3 = 2{,}5 \rightarrow F = 0{,}785 \cdot 2{,}5^2 =$ 4–9–1 (4,91)
4. $d^4 = 3 \rightarrow F = 0{,}785 \cdot 3^2 =$ 7–0–7 (7,07)

Die Basen der Potenzen werden auf D eingestellt, also die Zahlen 1,5; 2; 2,5 und 3. Nun wird C 1 darübergestellt. Über 0,785 auf B steht dann auf A das Ergebnis. Bei der Rechnung wird der Läufer nicht gebraucht.

Ein weiterer häufiger Anwendungsfall ist der folgende:

Beispiel:

1. $\frac{253}{56 \cdot 3{,}2} =$ 1–4–1–2 (1,412)
2. $\frac{253}{56 \cdot 4{,}8} =$ 9–4–1 (0,941)
3. $\frac{253}{57 \cdot 10{,}7} =$ 4–2–2 (0,422)
4. $\frac{253}{56 \cdot 18{,}75} =$ 2–4–1 (0,241)

Man beginnt mit der Einstellung des gleichbleibenden Zählers 253 auf D. Die Division durch die gleichbleibende Zahl 56 wird mit Hilfe der Skala C durchgeführt. Über 2–5–3 auf D steht dann also 5–6 auf C. Das Zwischenergebnis $\left(\frac{253}{56}\right)$ kann man nun unter C 10 auf D ablesen. In dieser Stellung bleibt die Zunge für die Ausrechnung aller weiteren Werte stehen. Der Läufermittelstrich wird jetzt nur noch über die sich ändernde Zahl im Nenner

* Mit einem Dreistrichläufer lassen sich die Kreisflächen ebenfalls sehr schnell bestimmen. Vgl. S. 171 unten ff.

(3,2; 4,8; 10,7; 18,75) auf R gestellt. Unter dem Läuferstrich ist dann auf D das gesuchte Ergebnis abzulesen.
Zuletzt soll noch eine Formel benutzt werden, in der sich eine Wurzel befindet.

$$f = \frac{159}{\sqrt{L \cdot C}} = \frac{159}{\sqrt{L} \cdot \sqrt{C}} = \frac{159}{\sqrt{L}} \cdot \frac{1}{\sqrt{C}} \quad (L = 3{,}75\,\mu\text{H})$$

1. $C\,1 = 31$ pF
2. $C\,2 = 44{,}1$ pF
3. $C\,3 = 62{,}7$ pF
4. $C\,4 = 96{,}3$ pF
5. $C\,5 = 135$ pF

Zuerst wird der linke Faktor berechnet:

$$\frac{159}{\sqrt{3{,}75}} \approx 82{,}1$$

Die weiteren Rechnungen lauten nun:

1. $\frac{82{,}1}{\sqrt{31}} = 14{,}75$ MHz
2. $\frac{82{,}1}{\sqrt{44{,}1}} = 12{,}35$ MHz
3. $\frac{82{,}1}{\sqrt{62{,}7}} = 10{,}35$ MHz
4. $\frac{82{,}1}{\sqrt{96{,}3}} = 8{,}36$ MHz
5. $\frac{82{,}1}{\sqrt{135}} = 7{,}06$ MHz

Die Ausrechnung erfolgt so, daß man zuerst auf A die Wurzelradikanden (31; 44; 62,7; 96,3; 135) einstellt. Der Läufermittelstrich wird darübergestellt. Nun schiebt man die Zunge so, daß der Zähler 82,1 auf C unter den Strich kommt. Über D 1 (D 10) ist dann auf C das Ergebnis abzulesen.

Eine andere Möglichkeit der Ausrechnung wird auf Seite 101 oben angegeben. Die Zahl 82,1 wird dabei auf D eingestellt (Läufermittelstrich). Die verschiedenen Werte für C werden nacheinander auf B unter den Läufermittelstrich geschoben. Die jeweiligen Lösungen stehen dann unter C 1 auf D.

14. Winkelfunktionen

Auf der Rückseite der Zunge befinden sich zwei oder drei Skalen, die der Bestimmung der Winkelfunktionen dienen. Es gibt aber auch Rechenschieber, z. B. System „Darmstadt", bei denen auf der Zungenrückseite andere Skalen untergebracht sind. In diesem Falle befinden sich die Teilungen der Winkelfunktionen mit auf dem Stabkörper. Die Skalen tragen durchweg folgende Bezeichnungen:

S oder sin = Sinusteilung
T oder tg = Tangensteilung
$S\&T$ oder sin/tg = Sinus-Tangens-Teilung

Besitzen wir Funktionstafeln für Winkelfunktionen, so geben wir diesen, dem Rechenschieber gegenüber, den Vorzug; denn die Rechenschieberskalen sind in ihren Bereichen begrenzt und außerdem nicht sehr genau. So besteht bei der Sinusteilung am Ende von Teilstrich zu Teilstrich eine Differenz von 2 Grad — Minuten lassen sich überhaupt nicht einstellen. Auf zweierlei Art können wir die Skalen benutzen. Entweder wir lassen die Zunge so, wie sie ist, und stellen die Winkel in den Ausfräsungen des Stabkörpers ein, drehen den Stab herum und lesen auf der Vorderseite die Funktionswerte ab, oder aber wir schieben die Zunge umgekehrt in den Stabkörper (mit der Rückseite nach vorn) ein. In diesem Falle zeigt der Rechenschieber auf seiner Vorderseite eine richtige Funktionstabelle, aus der wir die Werte mit Hilfe des Läufers ablesen können. Interessieren uns lediglich die einzelnen Funktionswerte und suchen wir mehrere, so ist das zweite Verfahren zu empfehlen. Stehen jedoch diese zu bestimmenden Werte in einer Formel, bilden also mit anderen Zahlen eine kombinierte Rechnung, so wählen wir die erste Methode; denn hierbei können wir, von den ermittelten Funktionswerten ausgehend, auf der Vorderseite des Schiebers sofort weiterrechnen. Die beiden Ausfräsungen auf der Rückseite des Schiebers sind meist verschieden. Von Fall zu Fall ist zu untersuchen, welche Ausfräsung in Betracht kommt.

Auf welchen Skalen der Vorderseite können wir nun die Funktionswerte ablesen? Bei älteren Rechenschiebersystemen sind es häufig die Skalen A bzw. B, bei den neueren Arten sind es die Skalen C und D. Die Tangensteilung arbeitet stets mit den Skalen C und D zusammen. Mechanisches Merken wollen wir uns nicht angewöhnen; denn eine Regel ist schnell vergessen. Viel besser ist es, wir merken uns für bestimmte Winkel die zugehörigen Winkelfunktionen, stellen diese Winkel ein und sehen nach, auf welcher Skala der Funktionswert vorhanden ist.

Es kommen dafür folgende Winkel in Betracht:

$$\sin 0° = 0$$

$$\sin 30° = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

$$\sin 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0{,}707$$

$$\sin 60° = \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0{,}866$$

$$\sin 90° = 1$$

Am besten merken wir uns

$$\sin 30° = 0{,}5$$

$$\sin 45° = 0{,}707 \left[= \frac{1}{2}\sqrt{2}\right]$$

Auf der Tangensskala:

$$\operatorname{tg} 0° = 0$$

$$\operatorname{tg} 30° = \frac{1}{3}\sqrt{3} = 0{,}5774$$

$$\operatorname{tg} 45° = 1$$

Wir merken uns

$$\operatorname{tg} 30° = \frac{1}{3}\sqrt{3} = 0{,}577$$

$$\operatorname{tg} 45° = 1$$

Außerdem müssen wir uns einprägen:

Die Sinus- u. Cosinuswerte erstrecken sich von 0 bis 1
Die Tangens- u. Cotangenswerte „ „ „ 0 bis ∞

Lesen wir also auf A (bzw. B) die Sinus- oder Cosinuswerte ab, so teilen wir diesen Wert durch 100. Benutzen wir jedoch die Skala D (bzw. C), so dividieren wir durch 10; denn stets (ausgenommen $\sin 90° = \cos 0° = 1$) lauten die Werte:

0,. . . . .

Nicht so einfach verhält es sich mit den Tangensfunktionen. Diese Skalen reichen stets nur bis 45°. Von Winkeln darüber müssen wir durch Umrechnungen den Funktionswert ermitteln.

Die Funktionswerte tg 0° bis tg 45° reichen von 0 bis 1. Für sie gilt das, was über die Sinus- und Cosinuswerte gesagt wurde.

0,. . . . . .

Die Winkel über 45°:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 50° &= 1{,}1918 \\ \operatorname{tg} 60° &= 1{,}7321 \\ \operatorname{tg} 70° &= 2{,}7475 \\ \operatorname{tg} 80° &= 5{,}6713 \\ \operatorname{tg} 89° &= 57{,}29 \\ \operatorname{tg} 90° &= \infty \end{aligned}$$

Wie aus dieser Tabelle zu ersehen ist, erfolgt erst sehr spät (von 89 auf 90°) der große Sprung nach „unendlich groß".

14a. Die Sinusteilung

Die Skala beginnt mit 5° 44′ ($\sin 5° 44' = 0{,}1$)

sie endet mit 90° ($\sin 90° = 1$)

Handelt es sich um einen Rechenschieber, bei dem die Teilungen *A* und *B* zuständig sind, so multiplizieren wir alle Werte mit 0,01 (teilen durch 100), so daß die Skala (*A* bzw. *B*) von 0,01 bis 1 reicht, also alle Funktionswerte der Winkel 5° 44′ bis 90° enthalten kann (oder von 34′ bis 5° 44′).

Wir wollen sin 40° bestimmen. Wir stellen auf der Schieberrückseite die Zunge so, daß 40° auf der Sinusskala unter dem Ablesestrich der rechten Ausfräsung zu stehen kommt (Bild 87). Auf der Schiebervorderseite lesen wir unter *A* 100 auf *B* die Ziffern 6–4–2–5 ab. Es gilt:

$$\sin 40° = 0{,}6425$$

Sind aber die Skalen *C* und *D* zugehörig, so verfahren wir so: Wir stellen auf der Rückseite wieder den Winkel ein, lesen nun aber auf der Vorderseite über *D* 10 auf *C* die Ziffern 6–4–2–5 ab. Jetzt aber multiplizieren wir diesen Wert (6,425) nicht mit 0,01, sondern mit 0,1 und erhalten dadurch den Funktionswert 0,6425.

Übungsbeispiele:

$$\begin{aligned} \sin 12° 10' &= 0{,}2108 \\ \sin 25° 30' &= 0{,}4305 \\ \sin 6° 5' &= 0{,}1059 \\ \sin 62° 30' &= 0{,}8870 \\ \sin 48° 30' &= 0{,}7490 \end{aligned}$$

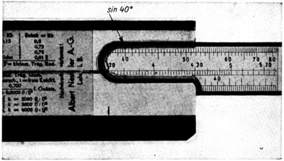


Bild 87

Wird die Cosinusfunktion gesucht, so rechnet man den Winkel für eine Sinusfunktion um und sucht diese. Oftmals sind auf der Sinusskala gegenläufig die Cosinuswerte* angegeben, so daß sich die Winkelumrechnung erübrigt. Den Zusammenhang zwischen den beiden Funktionen erkennen wir am besten an folgender Gegenüberstellung:

	sin	cos
0°	0	1
45°	0,707	0,707
90°	1	0

Die Funktionswerte laufen einander entgegen, sie sind für den Winkel 45° gleich groß. Bild 88 zeigt die Einstellung des Winkels

* Genauer: die Winkel, für die der Skalenwert der Cosinuswert ist.

$45°$ auf der Zungenrückseite. Auf der Vorderseite (Bild 89) steht unter der Zahl 100 von A auf B 70,7. Diesen Wert multiplizieren wir mit 0,01 und erhalten

$$\sin 45° = \cos 45° = 0{,}707$$

Sind die Cosinuswerte auf der Skala nicht mit angegeben, so berechnen wir sie nach der Gleichung

$$\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$$

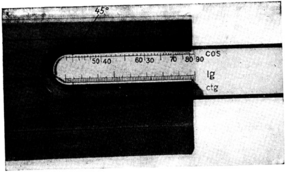


Bild 88

Beispiele:

1. $\cos 60° = \sin(90° - 60°) = \sin 30°$. Wir stellen $\sin 30°$ ein und erhalten den Wert

$$\sin 30° = \cos 60° = \mathbf{0{,}5}$$

2. $\cos 20° = \sin(90° - 20°) = \sin 70°$

$$\sin 70° = \cos 20° = \mathbf{0{,}94}$$

3. $\cos 55°\,20' = \sin(89°\,60' - 55°\,20')$

$$\begin{array}{rr} 89° & 60' \\ -55° & -20' \\ \hline 34° & 40' \end{array}$$

$$\cos 55°\,20' = \sin 34°\,40' = \mathbf{0{,}569}$$

Am rechten Ende der Sinusskala drängen sich die Werte zusammen und damit ist ein genaues Ablesen erschwert. Sollen also für diese Winkel (etwa von 60 . . . 90°) genaue Funktionswerte ermittelt werden, so kann man nach folgender Formel verfahren:

Es gilt: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ (trigonometrischer Pythagoras). Daraus wird $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$ (vgl. S. 176) (nach Dr. R. Stender). Nun ist $\cos^2\alpha = \sin^2(90° - \alpha)$. Diesen Ausdruck in die erste Gleichung eingesetzt:

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \sin^2(90° - \alpha)}$$

Ist nun in diesem Wurzelausdruck $\sin^2(90° - \alpha)$ klein, was hier zutrifft, so gilt die Näherungsformel:

$$\sqrt{1 - x} \approx 1 - \frac{x}{2}$$

und damit wird die gesamte Formel vereinfacht (der Wurzelausdruck entfällt):

$$\sin\alpha \approx 1 - \frac{1}{2}\cdot\sin^2(90° - \alpha)$$

Beispiel:

Der Funktionswert für den Winkel 78,6° soll genau bestimmt werden. $\sin 78{,}6° = ?$ $(78{,}6° = 78°\,36')$

1. $90° - 78{,}6° = 11{,}4°$

2. Für den Winkel 11,4° wird die Sinusfunktion gesucht.

$11{,}4° = 11°\,24'$

Auf D steht 0,1975. Unter dem Läuferstrich steht sofort auf A das Quadrat davon [denn es wird ja $\sin^2(90° - \alpha)$ verlangt].

3. Das Quadrat: $0{,}1975^2 = 0{,}039$

4. $0{,}039 : 2 = 0{,}0195$

5. $1{,}0000 - 0{,}0195 \doteq 0{,}9805$

$\mathbf{\sin 78{,}6° = 0{,}9805}$

Weitere Übungsbeispiele:

$$\sin 88°\,50' = 0{,}9998$$
$$\sin 84{,}1° = 0{,}9947$$
$$\sin 75°\,10' = 0{,}9667$$

Soll aus einer gegebenen Sinusfunktion der Winkel bestimmt werden, so gilt die Umkehr dieses Rechenverfahrens. Aus

$$\sin\alpha \approx 1 - \frac{1}{2}\cdot\sin^2(90° - \alpha)$$

wird nach einer Umstellung:

$$\sin(90° - \alpha) = \sqrt{2(1 - \sin\alpha)}$$

Beispiel:

Gegeben sei die Sinusfunktion $\sin\alpha = 0{,}9894$ $\sphericalangle\, \alpha = ?$

1. $1{,}0000 - 0{,}9894 = 0{,}0106$ (Subtraktion in der Klammer)
2. $2 \cdot 0{,}0106 = 0{,}0212$
3. Quadratwurzel aus 0,0212

$$\sqrt{\frac{2{,}12}{100}} = \frac{1{,}456}{10} = 0{,}1456$$

4. 0,1456 ist die Sinusfunktion von $(90° - \alpha)$. Der zur Funktion gehörige Winkel ist $8°\,22'$
5. Damit wird α selbst: $90° - 8°\,22' = \mathbf{81°\,38'}$

Berechnungen nach dem *Sinussatze* sind mit dem Rechenschieber wie Proportionen (vgl. S. 81) zu rechnen. Der Sinussatz lautet:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b}$$

Beispiel:

$\alpha = 48°$, $\beta = 76°$, $a = 15$ cm. Es sind die übrigen zwei Dreieckseiten b und c sowie der Winkel γ zu berechnen.

1. $\gamma = 180 - (\alpha + \beta) = 180 - 124 = 56°$
   (Die Winkelsumme im Dreieck beträgt 180°)
2. $\sin\alpha = 0{,}755$, $\quad \sin\beta = 0{,}970$
3. $$b = a \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{15 \cdot 0{,}97}{0{,}755} = 19{,}25$$
   $$\mathbf{b = 19{,}25\ cm}$$
4. Die Seite c läßt sich ebenfalls nach dem Proportionsprinzip (wie im Rechenabschnitt 3) berechnen.

$$c = a \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{15}{0{,}755} \cdot \sin\gamma$$

$$\sin\gamma = \sin 56° = 0{,}829$$

$$c = \frac{15 \cdot 0{,}829}{0{,}755} = 16{,}45$$

$$\mathbf{c = 16{,}45\ cm}$$

Anwendungsbeispiele (System „Rietz“):

1. $\boxed{b = a \cdot \sin\alpha}$, $\quad \boxed{b = a \cdot \cos\alpha}$

Wirkleistung und Blindleistung des Wechselstromes errechnen sich nach den Gleichungen:

$$N_W = U \cdot J \cdot \cos\varphi \quad [\mathrm{W}]$$
$$N_B = U \cdot J \cdot \sin\varphi \quad [\mathrm{VA}]$$

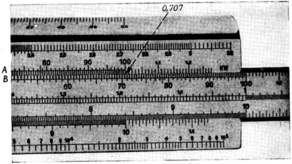


Bild 89

Die Spannung beträgt $U = 220$ V, die Stromstärke $J = 8$ A. Die Phasenverschiebung ist $\varphi = 60°$.

Wir schieben auf der Rückseite des Rechenschiebers die Zunge so, daß die Zahl 60 auf der Sinusteilung unter den Einstellstrich der rechten Ausfräsung zu stehen kommt. Nun drehen wir den Schieber herum und lesen über D 10 auf C die Ziffernfolge 8-6-6 ab. Wir wissen, es muß heißen:

$$\sin 60° = 0{,}866$$

Außerdem können wir aber auch unter C 1 auf D die Ziffernfolge 1-1-5-5 ablesen. Das ist der reziproke Wert von 8-6-6.

Also
$$\frac{1}{0{,}866} = 1{,}155$$
Mithin lautet die Rechnung jetzt:
$$N_B = \frac{220 \cdot 8}{1{,}155}$$
Ohne die Zunge zu verändern und den Läufer zu benötigen, führen wir jetzt die Teildivision $\frac{8}{1{,}115}$ durch. Über der Zahl 8 auf D steht auf C die Ziffernfolge 6–9–2–5 (im Kopf: 6,925). Nun müssen wir noch diesen Wert mit 220 multiplizieren. Wir stellen ihn auf D ein, schieben den Läuferstrich darüber und führen mit der Skala R die Multiplikation aus. Unter C 1 lesen wir auf D das Endergebnis ab:

1–5–2–4

1524 VA

Die Wirkleistung N_W ermitteln wir, indem wir zuerst nach der Gleichung
$$\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$$
den Cosinuswinkel bestimmen.
$$\cos\alpha = \sin(90° - 60°) = \sin 30°$$
$$\sin 30° = 0{,}5$$
Nun rechnen wir so, wie wir es bei der Bestimmung der Blindleistung getan haben.

Das Ergebnis lautet: $\quad N_W = 880$ **W**

2.
$$\boxed{b = \frac{a \cdot \cos\alpha}{c}}$$

Eine Lampe hat eine Lichtstärke $J = 500$ Hefnerkerzen (HK). Unter einem Abstrahlungswinkel $\alpha = 30°$ soll die Beleuchtungsstärke E in der Entfernung $r = 5$ m berechnet werden. Es gilt die Gleichung:
$$\text{Beleuchtungsstärke } E = \frac{J \cdot \cos\alpha}{r^2} \text{ [Lux]}$$

Wir setzen die Zahlen ein:
$$E = \frac{500 \cdot \cos 30°}{5^2} = \frac{500 \cdot \cos 30°}{25}$$
Wir vereinfachen:
$$E = 20 \cdot \cos 30°$$
$$\cos\alpha = \sin(90° - \alpha) = \sin(90° - 30°) = \sin 60°$$
Wir stellen auf der Sinusskala 60° ein und erhalten auf der Vorderseite des Rechenschiebers über D 10 auf C

8–6–6

(Wir wissen, es ist 0,866.)

Nun multiplizieren wir mit der Zahl 20. Ohne die Zunge zu verändern und den Läufer zu benutzen, lesen wir über der Zahl 2 auf D das Endergebnis auf C ab, es lautet:

1–7–3

$E =$ **17,3 Lux**

3.
$$\boxed{b = \frac{a \cdot \sin^2\alpha}{c}}$$

Ein Ball wird mit einer Anfangsgeschwindigkeit von $v_0 = 30$m/s unter einem Winkel von $\alpha = 40°$ in die Höhe geworfen. Wie hoch fliegt der Ball? Die entsprechende Formel lautet:
$$\text{Steighöhe} = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2\alpha}{2 \cdot g}$$
$$g \approx 10 \text{ m/s}^2, \quad 2 \cdot g \approx 20$$
Wir lernen etwas Neues hinzu: den Ausdruck
$$\sin^2\alpha$$
Der Winkel (sin α-Teilung) $= 40°$ wird wie sonst auf der Rückseite eingestellt. Die Funktion $\sin\alpha$ lesen wir über D 10 auf C ab.

Unter A 100 können wir aber sofort auf B

$\sin^2\alpha$ ablesen.

$$\sin 40° = 0{,}6425$$
$$\sin^2 40° = 0{,}4125$$

Damit wird:

$$h = \frac{30^2 \cdot 0{,}4125}{20} = \frac{900}{20} \cdot 0{,}4125$$

Wir vereinfachen:

$$h = 45 \cdot 0{,}4125$$

Die Multiplikation führen wir wie sonst auf den Skalen C und D durch und erhalten als Ergebnis:

$$h = \mathbf{18{,}56\ m}$$

14b. Die Tangensteilung

Die Tangensskala — sie befindet sich meist an der rückwärtigen unteren Kante der Zunge — reicht von 5° 43′ bzw. 44′ bis 45°. Bei manchen Rechenschieberarten sind außerdem die Cotangenswinkel von 45° bis 89° 25′ mit angegeben. Tangenswinkel unter 5° 43′ können nicht eingestellt werden. Die Tangensskala arbeitet mit den Teilungen C und D zusammen. Der betreffende Winkel wird unter den Einstellstrich der rückwärtigen linken Ausfräsung eingestellt.

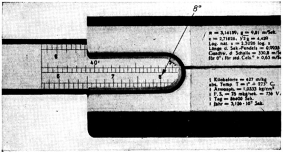


Bild 90

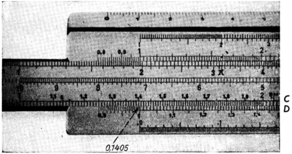


Bild 91

Bild 90 zeigt die Einstellung von tg 8° (System „Rietz“). Über D 1 steht dann auf C der Tangenswert. Bild 91 zeigt

$$\mathrm{tg}\, 8° = 0{,}1405$$

Weil die Tangenswerte aller Winkel bis 45° kleiner als 1 sind, schreiben wir immer

0, ...

Beispiele:

tg 35° 30′ = 0,713	tg 15° 50′ = 0,284
tg 6° 10′ = 0,1080	tg 34° 30′ = 0,687

Den Zusammenhang zwischen der Tangens- und der Cotangens-Funktion können wir aus der nachfolgenden Tabelle ersehen.

	0°	30°	45°	60°	90°
tg	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞
ctg	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

Tangens 30° entspricht dem Cotangens 60°, tg 0° entspricht ctg 90° usw.

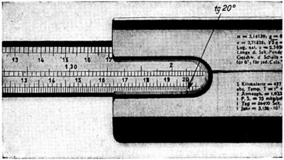


Bild 92

Anwendungsbeispiel (Bilder 92 u. 93) (System „Rietz“):
Ein Turm wird unter einem Winkel von $\alpha = 20°$ gemessen. Die Entfernung bis zu ihm ist unbekannt. Die Turmhöhe ist bekannt;

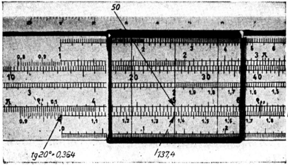


Bild 93

sie beträgt $h = 50$ m.

$$\text{Entfernung} = \frac{50}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg} 20°} \cdot 50$$

Wir stellen auf der Tangensskala 20° unter den Einstellstrich und lesen auf der Vorderseite über D 1 auf C die Ziffernfolge ab.

3–6–4, $\operatorname{tg} 20° = 0{,}364$

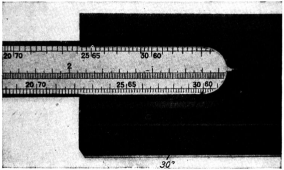


Bild 94

Unter der Zahl 5 auf C* lesen wir auf D das Ergebnis der nachfolgenden Multiplikation mit 50 ab:

1–3–7–4

Entfernung = **137,4 m**

Bild 94 zeigt die Einstellung von tg 30° bei dem Bürorechenschieber „Elektro“. Hier sind auch die Cotangenswinkel mit angegeben. Das Ablesen der Funktionswerte auf der Vorderseite erfolgt auf den Skalen A und B. Unter A 1 steht auf B das Ergebnis 5–7–7 $\operatorname{tg} 30° = 0{,}577$

* Unter C 10 steht auf D das Ergebnis $1 : \operatorname{tg} 20° = 2{,}747$. Dieser Wert wird mit 50 multipliziert.

Über B 100 steht auf A das Ergebnis (Bild 95) von

$$\operatorname{ctg} 30° = 1{,}73$$

Die Tangensskala hat der Sinusskala gegenüber den Nachteil, daß sie nur Winkel bis 45° enthält. Die Tangens- und Cotangens-

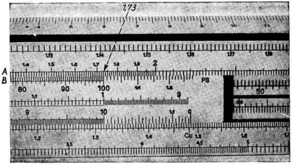


Bild 95

funktionen für Winkel über 45° bestimmen wir mit Hilfe folgender Gleichungen:

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}(90° - \alpha) \quad \text{und}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}(90° - \alpha)$$

Beispiele:

1. $\operatorname{tg} 67° = \operatorname{ctg}(90° - 67°) = \operatorname{ctg} 23°$
2. $\operatorname{tg} 80° = \operatorname{ctg}(90° - 80°) = \operatorname{ctg} 10°$
3. $\operatorname{ctg} 70° = \operatorname{tg}(90° - 70°) = \operatorname{tg} 20°$
4. $\operatorname{ctg} 78° = \operatorname{tg}(90° - 78°) = \operatorname{tg} 12°$

Von den angeführten 4 Beispielen können wir aber vorerst nur das 3. und 4. berechnen, d. h., die Tangenswerte von 20° und 12° können wir auffinden, sie sind gleich den Cotangenswerten der Winkel 70° und 78°. Mit anderen Worten;

Mit der Kenntnis der Tangenswerte von 0° bis 45° verbindet sich die der Cotangenswerte der Winkel von 45° bis 90°.

Wie aber sieht es nun mit den Tangenswerten der Winkel von 45° bis 90° und der Cotangenswerte der Winkel von 0° bis 45° aus? Die Cotangenswerte der Winkel von 0° bis 45° sind reziprok den Tangenswerten dieser Winkel. (Vgl. Beispiel ctg 30° auf S. 128.)

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \quad \text{und}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$$

Wenn wir aber auf unserem Rechenschieber (System „Rietz") für die eingestellten Tangenswinkel über D 1 auf C die zugehörigen Funktionen ablesen können, dann können wir gleichzeitig über D 1 auf der Reziprokskala R die zum Winkel zugehörige Cotangensfunktion finden*.

$$\alpha = 25°$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg} 25° = 0{,}466 \qquad (\text{auf } C)$$

$$\operatorname{ctg} 25° = \frac{1}{0{,}466} = 2{,}144 \qquad (\text{auf } R)$$

Beispiele:

$$\operatorname{ctg} 14° = \frac{1}{\operatorname{tg} 14°} = 4{,}01$$

$$\operatorname{ctg} 39°\,40' = \frac{1}{\operatorname{tg} 39°\,40'} = 1{,}206$$

$$\operatorname{ctg} 4°\,10' = \frac{1}{\operatorname{tg} 4°\,10'} = 13{,}73 \quad \text{(vgl. nächsten Abschnitt)}$$

Jetzt sind wir auch in der Lage, die ersten 2 Beispiele über die Tangensfunktion zu Ende rechnen zu können.

1. $\operatorname{tg} 67° = \operatorname{ctg}(90° - 67°) = \operatorname{ctg} 23°$

$$\operatorname{ctg} 23° = \frac{1}{\operatorname{tg} 23°} = 2{,}356$$

* oder unter C 1 bzw. C 10 auf D.

2. $\operatorname{tg} 80° = \operatorname{ctg}(90° - 80°) = \operatorname{ctg} 10°$

$$\operatorname{ctg} 10° = \frac{1}{\operatorname{tg} 10°} = \mathbf{5{,}67}$$

Tangensfunktionen von Winkeln über 45° werden mithin so bestimmt:

Zuerst verwandelt man den Winkel in einen Cotangenswinkel. Dieser liegt dann zwischen 0° und 45°. Von diesem Winkel suchen wir auf dem Rechenschieber die Tangensfunktion, deren reziproker Wert (auf *R*) die gesuchte Funktion ist.

Beispiele:

1. $\operatorname{tg} 85° = \operatorname{ctg} 5° = \frac{1}{\operatorname{tg} 5°} = \mathbf{11{,}43}$ (vgl. nächsten Abschnitt)

2. $\operatorname{tg} 82°\,30' = \operatorname{ctg} 7°\,30' = \frac{1}{\operatorname{tg} 7°\,30'} = \mathbf{7{,}6}$

3. $\operatorname{tg} 66° = \operatorname{ctg} 24° = \frac{1}{\operatorname{tg} 24°} = \mathbf{2{,}246}$

Hat der Rechenschieber keine Reziprokskala *R*, so lesen wir die Kehrwerte nicht über *D* 1 auf *C*, sondern unter *C* 10 auf *D* ab.

14c. Die Sinus-Tangens-Teilung

Viele Rechenschiebersysteme (z. B. System „Rietz") haben neben der Sinus- und der Tangensskala noch eine weitere, dritte, die Teilung *ST*. Sie umfaßt die Winkel von 34′ bis 5° 43′. Für diese kleinen Winkel sind die Sinus- und Tangenswerte annähernd gleich. Wir stellen die Winkel unter den rechten unteren Einstellstrich auf der rückwärtigen rechten Ausfräsung. Über *D* 10 lesen wir auf *C* die Werte ab, die Sinus- und Tangenswerte zugleich sind.

Beispiel:

$$\operatorname{tg} 1°\,30' = \sin 1°\,30'$$
$$= 2\text{–}6\text{–}2$$
$$= \mathbf{0{,}0262}$$

Aber auch die Cotangenswerte können wir sofort ablesen. Unter *C* 1 lesen wir auf *D* den Kehrwert ab.

$$\operatorname{tg} 4° = \sin 4° = \mathbf{0{,}0699}$$

$$\operatorname{ctg} 4° = \frac{1}{\operatorname{tg} 4°} = \frac{1}{0{,}07} = \mathbf{14{,}3}$$

15. Die dekadischen Logarithmen (gewöhnliche Logarithmen)

Die meisten Rechenschieber haben eine Mantissenteilung *M*, die der Bestimmung der gewöhnlichen, d. h. dekadischen, Logarithmen dient. Wir wissen, daß alle Skalen des Rechenschiebers logarithmisch geteilt sind (ausgenommen der Maßstab an der Anlegekante). Mithin muß die Mantissenskala linear (gleichmäßig) geteilt sein. Sie beginnt mit ,0 und endet mit ,0 und steht mit der Skala *D* im Einklang. Beim Rechenschieber System „Rietz" befindet sie sich auf der Vorderseite des Stabkörpers ganz unten. Der Rechenschieber „Darmstadt" hat sie über dem Maßstab auf der Anlegekante, und beim Rechenschieber „Elektro" befindet sie sich auf der Zungenrückseite zwischen der Sinus- und der Tangensteilung. Wir können auf dieser Teilung 3stellige Mantissen ablesen. (Die einfachen Logarithmentafeln geben 4stellige.) Für überschlägige Rechnungen genügt aber diese Genauigkeit vollauf. Bild 96 zeigt, wie man die Bestimmung der Logarithmen vornimmt (System „Rietz"). Wir benötigen nur den Läufer. (Der besseren Übersicht wegen wurde die Zunge entfernt.)

Der Numerus (auf Bild 96 die Zahl 2) wird auf *D* eingestellt. Dann wird der Läuferstrich darübergestellt und unter diesem auf *M* die Mantisse abgelesen.

$$\lg 2 = 0{,}301^*$$

Selbstverständlich können wir auch umgekehrt für eine bestimmte Mantisse den zugehörigen Numerus aufsuchen.

Bild 97 zeigt die Bestimmung des Logarithmus von der Zahl 9 (System „Rietz").

$$\lg 9 = 0{,}954$$

Die Bilder 98 u. 99 zeigen, wie man beim Bürorechenschieber „Elektro" die Mantissen bestimmt. Entweder schiebt man die Zunge um-

* Da bei der einstelligen Zahl 2 die Kennziffer 0 ist, handelt es sich in diesem Fall bereits schon um den vollständigen Logarithmus.

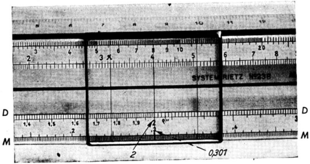


Bild 96

gekehrt in den Stabkörper, stellt Stabkörperteilungen und Zungenteilungen genau übereinander und arbeitet dann wie mit dem System „Rietz“, oder aber man schiebt C 1 über den Numerus

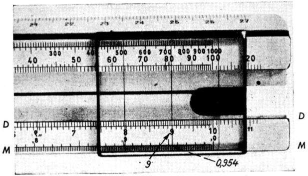


Bild 97

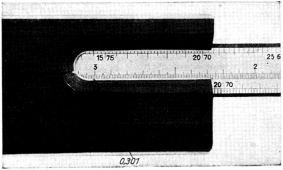


Bild 98

auf D (Bild 99) und liest unter dem unteren Ablesestrich in der rückwärtigen, rechten Ausfräsung die Mantisse ab (Bild 98). Wann benötigen wir diese Mantissen bzw. Logarithmen? Wir

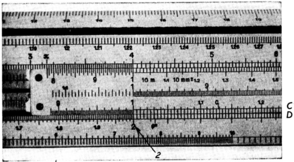


Bild 99

können mit dem Rechenschieber die wichtigsten Rechnungen ausführen. Es kann sein, daß für komplizierte Berechnungen, insbesondere dann, wenn vereinzelt addiert oder subtrahiert werden muß, der Rechenschieber allein nicht genügen kann. Auch versagt der Rechenschieber ganz, wenn er keine lg-lg-Teilung hat und wir Potenzen und Wurzeln mit höheren und gebrochenen Hochzahlen berechnen sollen. Wir wollen uns deshalb einige derartige Berechnungsfälle ansehen.

1. 19^5, $5 \cdot \lg 19 = 5 \cdot 1{,}279 = 6{,}39$*

Ablesung 2–4–5–5 für Mantisse ,39

num: **2455000**

2. $5^{7,2}$, $7{,}2 \cdot \lg 5 = 7{,}2 \cdot 0{,}699 = 5{,}03$

Die Mantisse ,03 ergibt auf Skala D 1–0–7–2

num: **107200**

3. $\sqrt[3,7]{137}$, $\frac{1}{3{,}7} \cdot \lg 137 = \frac{1}{3{,}7} \cdot 2{,}137 = 0{,}5775$

num: **3,78**

4. $\sqrt[13]{7}$, $\frac{1}{13} \cdot \lg 7 = \frac{1}{13} \cdot 0{,}845 = 0{,}065$

num: **1,161**

Übungsaufgaben:

Von der Zahl zum Logarithmus

	Tabellenwert
$\lg 126{,}5 = 2{,}102$	2,1021
$\lg 0{,}254 = 0{,}4048-1$	0,4048 − 1
$\lg 32{,}8 = 1{,}516$	1,5159
$\lg 4{,}625 = 0{,}665$	0,6651
$\lg 5750 = 3{,}76$	3,7597
$\lg 0{,}063 = 0{,}799-2$	0,7993 − 2
$\lg 72500 = 4{,}86$	4,8603

* Der Logarithmus von 19 wird (ohne die Zunge) auf den Skalen M und D bestimmt. (19 wird auf D eingestellt und die Mantisse 2–7–9 auf M abgelesen.) Das Ergebnis der nachfolgenden Multiplikation (mal 5) (mit Hilfe der Zunge) besteht aus der Kennziffer 6 und der Mantisse 3–9. Diese nur wird zur Bestimmung des Numerus auf M eingestellt.

Vom Logarithmus zur Zahl

		Tabellenwert
$\lg x = 0{,}146-1$	$x = 0{,}14$	0,1400
$\lg x = 1{,}351$	$x = 22{,}45$	22,44
$\lg x = 2{,}835$	$x = 684$	683,9
$\lg x = 0{,}988-2$	$x = 0{,}0973$	0,09727
$\lg x = 4{,}507$	$x = 32150$	32140

Anwendungsbeispiele:

1. Wie hoch ist ein Flugzeug über dem Meeresspiegel, wenn ein Luftdruck von $b_1 = 650$ Torr gemessen wird? Barometerstand in Meereshöhe $b = 760$ Torr.

Wir rechnen nach der Gleichung

$$\text{Höhe} = 18400\,(\lg b - \lg b_1) \quad [\text{m}]$$
$$\lg b = \lg 760 = 2{,}881$$
$$\lg b_1 = \lg 650 = 2{,}813$$

Diese Werte ermitteln wir auf den Skalen D und M. Die Subtraktion führen wir im Kopf durch:

$$2{,}881 - 2{,}813 = 0{,}068$$

Nun multiplizieren wir $18400 \cdot 0{,}068$ auf den Skalen D und R. Die Ziffernfolge auf D: 1–2–5–1

Die Stellenzahl:

$$184 \cdot 10^2 \cdot 68 \cdot 10^{-3}$$
$$184 \cdot 6{,}8 = \mathbf{1251\ m}$$

2. Wie groß ist der Enddruck P_2 bei einem Volumenverhältnis

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{2}$$

P_1 Anfangsdruck = 1 at

P_2 Enddruck = ?,

V_1 Anfangsvolumen = 1 m³

V_2 Endvolumen = 0,5 m³

Beim isothermischen Zustand

$$P_2 = 2$$

adiabatische:

$$\frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\varkappa}$$

$$\varkappa = 1{,}41$$

Beide Seiten umgekehrt:

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\varkappa}$$

Die rechte Seite der Gleichung:

$$\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\varkappa} = \left(\frac{1}{0{,}5}\right)^{1{,}41} = 2^{1{,}41}$$

Wir bestimmen auf D und M den Logarithmus von 2:

$$\lg 2 = 0{,}301$$

Diesen Wert multiplizieren wir mit 1,41:

$$1{,}41 \cdot 0{,}301 = 0{,}424$$

Von diesem Logarithmus suchen wir auf D, von M ausgehend, den Numerus:

$$\text{num } 0{,}424 = 2{,}65$$

$$\mathbf{P_2 = 2{,}65\ at}$$

8. Nach wieviel Jahren ist das Kapital $a = 500$ DM durch Zinseszinsen auf $b = 2500$ DM angewachsen? $p = 5\%$.

Wir rechnen nach der Gleichung:

$$b = a \cdot q^n,$$

hierin

$$q = 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{5}{100} = 1{,}05,$$

logarithmieren die Gleichung:

$$\lg b = \lg a + n \cdot \lg q$$

Nach n umgestellt ergibt:

$$n = \frac{\lg b - \lg a}{\lg q}$$

Wir bestimmen nun die Logarithmen:

$$\begin{aligned} \lg b &= \lg 2500 = 3{,}398 \\ -\lg a &= \lg\ \ 500 = 2{,}699 \\ &\qquad\qquad\ \ \overline{0{,}699} \end{aligned}$$

$$\lg q = \lg 1{,}05 = 0{,}021,$$

dividieren auf den Skalen C und D und erhalten:

$$n = \frac{0{,}699}{0{,}021} = \mathbf{33{,}28\ Jahre}$$

16. Der natürliche Logarithmus und die natürliche Exponentialfunktion

In den Naturwissenschaften und ganz besonders in der höheren Mathematik benötigt man einen Logarithmus, der sich von dem dekadischen in der Grundzahl (Basis) unterscheidet. Ist es bei dem gewöhnlichen Logarithmus die Zahl 10, die als Basis gewählt wurde, so ist es jetzt die Zahl 2,71828 . . ., übrigens neben der Zahl $\pi = 3{,}14159$ . . . . . die eigenartigste Zahl der höheren Mathematik. Sie wird mit dem Buchstaben e bezeichnet.

Wenn wir beim dekadischen Logarithmus schreiben können:

$$a = 10^{\lg a}$$

$$\text{und:}\quad \lg 10 = 1$$

$$\text{und außerdem:}\quad \lg 10^a = a,$$

dann schreiben wir analog dazu:

$$a = e^{\ln a}*$$

$$\ln e = 1$$

$$\ln e^a = a$$

Auf einfache Weise kann der dekadische in einen natürlichen Logarithmus umgerechnet werden; denn

$$10^{\lg a} = e^{\ln a}$$

Beide Seiten logarithmieren wir mit dem dekadischen Logarithmus:

$$\lg a \cdot \lg 10 = \ln a \cdot \lg e$$

* ln Logarithmus naturalis.

Daraus wird, da $\lg 10 = 1$ ist:

$$\ln a = \frac{\lg a}{\lg e}$$

Der dekadische Logarithmus von $e = 2{,}71828\ldots$ ist:

$$\lg e = 0{,}4343$$

Damit wird die Gleichung

$$\ln a = \frac{\lg a}{0{,}4343} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{\lg e} = 2{,}3026\ldots$$

$$\ln a = 2{,}303 \cdot \lg a$$

Wir hätten allerdings den Ansatz auch mit dem natürlichen Logarithmus logarithmieren können.

$$\ln(10^{\lg a}) = \ln(e^{\ln a})$$

$$\lg a \cdot \ln 10 = \ln a \cdot \ln e$$

$$\ln e = 1$$

$$\ln 10 = \lg 10 \cdot 2{,}303 = 1 \cdot 2{,}303 = 2{,}303$$

$$\ln a = 2{,}303 \cdot \lg a$$

Der natürliche Logarithmus ergibt sich also aus dem dekadischen durch Multiplikation mit der konstanten Zahl 2,303. Verschiedene Rechenschieberausführungen haben Skalen, die der Bestimmung des natürlichen Logarithmus dienen. Wir haben bereits etliche Beispiele mit dem Rechenschieber „Elektro" durchgerechnet. Dieser Rechenschieber hat zwei derartige Teilungen. Die eine befindet sich auf der Vorderseite ganz unten, dort, wo beim System „Rietz" die Mantissenteilung ist, und die andere ist an Stelle der Kubusskala K ganz oben angebracht.

Die untere Skala reicht von 2,5 bis 10^5, die obere von 1,1 bis 3,2. Der Rechenschieber System „Darmstadt" hat sogar drei solcher Skalen. Sie befinden sich nebeneinander auf der Rückseite der Zunge (dort, wo bei den anderen Systemen die Skalen der Winkelfunktionen angebracht sind). Die obere Skala reicht von 1,01 bis 1,11, die mittlere von 1,1 bis 3 und die untere von 2,5 bis 10^5. Aneinandergereiht ergeben sie, wie die beiden Skalen des Systems „Elektro", eine einzige große Skala, nur daß diese beim „Darmstadt" einen größeren Bereich hat. Die Exponentialskalen sind *Stellenwertskalen*, d. h., der Wert 1,35 z. B. bedeutet *nur* 1,35, nicht auch 13,5 oder 135 usw., wie das für die Skalen C und D zutrifft.

Wie ist nun diese Teilung entstanden und wie wird sie gehandhabt?

Wir nehmen den Rechenschieber „Elektro" zur Hand. Die Bezugsskala ist D. Zum Ablesen benötigen wir nur den Läufer. Die Zahlen auf D nennen wir einmal y und die auf den beiden Skalen x. Diese Skalen werden entweder lg-lg-Skalen oder Potenzskalen oder aber Exponentialskalen genannt. Es gilt die Gleichung

$$y = \ln x$$

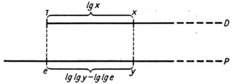


Bild 100

Auf D steht der natürliche Logarithmus der auf den beiden Skalen angegebenen Zahlen.

Zu jeder Zahl x auf der Teilung D findet man also auf den Potenzskalen P_1, P_2 und P_3 evtl. P_4 (beim System „Multilog") die entsprechenden natürlichen Exponentialfunktionen e^x, $e^{0{,}1x}$, $e^{0{,}001x}$ bzw. $e^{-0{,}01x}$, $e^{-0{,}1x}$ und e^{-x}. Die Begründung hierfür kann so erfolgen: Die 1 der Teilung D steht über $e = 2{,}71828$ der Potenzskala (meistens steht an der entsprechenden Stelle auf der P-Skala ein kleines e). Bild 100 zeigt die beiden Strecken auf den Teilungen D und P.

Strecke auf D: $\lg x$

Strecke auf $P = \lg \lg y - \lg \lg e$

Da beide Strecken gleich lang sind, kann geschrieben werden

$$\lg x = \lg \lg y - \lg \lg e$$

oder $\quad \lg x = \lg \dfrac{\lg y}{\lg e} \quad$ bzw. $\quad x = \dfrac{\lg y}{\lg e}$

umgestellt $\quad \lg y = x \cdot \lg e$

und daraus folgt schließlich:

$$y = e^x \quad \text{und} \quad x = \ln y$$

Beim „Darmstadt“ muß die Zunge mit den aufgetragenen P-Skalen in Übereinstimmung gebracht werden (1 auf D mit e auf P). Bei den Systemen „Elektro“ und „Studio“ usw. befinden sich die P-Skalen bereits auf dem Stabkörper selbst, so daß man mit dem Läuferstrich, ganz ohne Zunge, wie in einem Nomogramm, die entsprechenden e-Funktionen bzw. nat. Logarithmen nur abzulesen braucht.

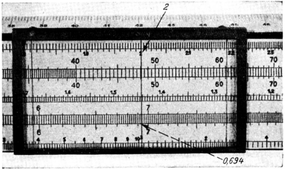


Bild 101

Beispiele (Bild 101):

1. Wir wollen den natürlichen Logarithmus von 2 bestimmen. Die Zahl 2 steht auf der oberen Skala P (P = Potenzskala). Wir schieben den Läuferstrich darüber und erhalten auf D

6–9–4

$$\ln 2 = \mathbf{0{,}694}$$

Probe:

$$\ln 2 = 2{,}303 \cdot \lg 2 = 2{,}303 \cdot 0{,}301 = 0{,}694$$

Die letzte Ziffer 4 ist etwas zu groß abgelesen.

2. Wie heißt der natürliche Logarithmus der Zahl 10? (Bild 102.) Die Zahl 10 steht auf der unteren Skala. Wir stellen den Läuferstrich darüber und lesen auf D das Ergebnis ab:

2–3–0–3

$$\ln 10 = \mathbf{2{,}303}$$

Zur Bestimmung der Kommastellung ist es zweckmäßig, einige natürliche Logarithmen zu kennen.

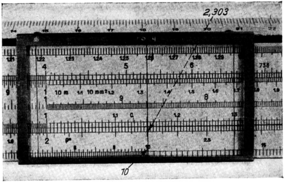


Bild 102

N	$\ln N$	N	$\ln N$
1	0,00000	21	3,0445
3	1,0986	54	3,9890
5	1,6094	55	4,0073
10	2,3026	99	4,5951
20	2,9957		

Nun wollen wir noch ein Beispiel mit dem Rechenschieber System „Darmstadt“ durchrechnen. Wir schieben die Zunge mit der Rückseite nach vorn in den Stabkörper ein. Am linken Ende der Zunge befindet sich oben ein kleiner Markierungsstrich, den wir auf die Zahl 1 von A stellen. Nun sehen wir sofort, daß unter der 10 auf der unteren Zungenskala P die Ziffernfolge 2–3–0–3 steht; es ist der natürliche Logarithmus der Zahl 10:

$$\ln 10 = 2{,}303$$

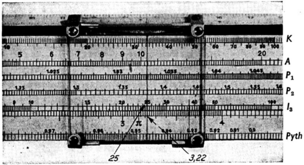


Bild 103*

Der vorhin von uns genannte natürliche Logarithmus der Zahl 2 ist hier mit Hilfe der mittleren Zungenskala P_2 bestimmt worden. Bild 103 zeigt die Bestimmung des natürlichen Logarithmus der Zahl 25:

$$\ln 25 = \mathbf{3{,}22}$$

Anwendungsbeispiele:

1. Ein Lichtbündel mit der Lichtstärke $J_1 = 10$ HK trifft senkrecht auf eine Glasplatte von der Dicke $s = 2$ cm auf. Während das Licht die Glasplatte durchdringt, wird ein Teil des Lichtes verschluckt, so daß hinter der Glasplatte nur noch eine Lichtstärke $J_2 = 5$ HK vorhanden ist. Wie groß ist der Absorptionskoeffizient dieses Glases?

$$c = \frac{1}{s} \cdot \ln\left(\frac{J_1}{J_2}\right)$$

$$c = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{10}{5}\right) = \frac{1}{2} \ln 2$$

$$\ln 2 = 0{,}693$$

$$c = \frac{1}{2} \cdot 0{,}693 = \mathbf{0{,}346}$$

* Die Teilung *Pyth* wird auf Seite 176 erklärt.

2. Die Spannungsdämpfung einer Fernsprechleitung wird bei bekannter Ein- und Ausgangsspannung nach folgender Formel berechnet:

$$\text{Dämpfung } b = \ln\left(\frac{U_1}{U_2}\right)$$

$$U_1 = 5\,\text{V}, \quad U_2 = 0{,}2\,\text{V}$$

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{5}{0{,}2} = 25$$

$$\ln 25 = 3{,}22$$

$$b = \mathbf{3{,}22\ Neper}$$

3. Es soll die Induktivität einer Doppelleitung berechnet werden. Wir benutzen die Formel:

$$L = 4 \cdot l \cdot \ln\left(\frac{a}{r}\right) \quad [\text{cm}]$$

a gegenseitiger Abstand der Drähte [cm]
r Drahtradius [cm]
l Länge der Drähte [cm]
$a = 20$ cm, $r = 0{,}1$ cm, $l = 100$ m

$$L = 4 \cdot 10^4 \cdot \ln\left(\frac{20}{0{,}1}\right)$$

$$\text{Die Klammer: } \ln\left(\frac{20}{0{,}1}\right) = \ln 200 = 5{,}3$$

$$L = 4 \cdot 5{,}3 \cdot 10^4 = \mathbf{21{,}2 \cdot 10^4\ cm}$$

$$1\,\text{H} = 10^9\,\text{cm} = 10^3\,\text{mH}$$

$$1\,\text{mH} = 10^6\,\text{cm}$$

$$L = \mathbf{21{,}2 \cdot 10^{-2}\ mH}$$

Die natürliche Exponentialfunktion $y = e^x$ können wir ebenfalls mit Hilfe dieser Skalen bestimmen. Der Zusammenhang zwischen dem natürlichen Logarithmus und dieser Funktion ist durch folgende Gleichung gegeben:

$$x = \ln y,$$

mithin kann geschrieben werden:

$$e^{\ln y} = y$$

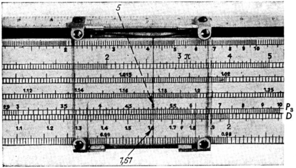


Bild 104

Der Numerus y steht auf der Potenzskala. Den natürlichen Logarithmus davon zeigt die Skala D mit der Zahl x. Dieser Logarithmus als Hochzahl zur Basis e ergibt wieder den Numerus y.

Wir stellen also den Numerus, z. B. die Zahl 5, auf der Potenzskala ein. Bild 104 zeigt dieses Beispiel an dem Rechenschieber System „Darmstadt“. Was vorhin der natürliche Logarithmus war, ist jetzt der Exponent der natürlichen Exponentialfunktion.

$$e^{1,61} = 5$$

$$\ln 5 = 1,61$$

Das ist nicht weiter verwunderlich, denn wir wissen ja, daß der Logarithmus tatsächlich ein Exponent ist.

$$e^x = 5$$

Wir lesen unter der Zahl 5 auf P_3 den natürlichen Logarithmus auf D ab.

$$x = 1,61 = \ln 5$$

Beispiel:

$$e^{1,61} = y$$

Wir wissen, daß der Exponent 1,61 der natürliche Logarithmus von y ist. Der natürliche Logarithmus steht auf D und der Numerus y auf P. Über 1–6–1 auf D finden wir auf P die Zahl 5. Ist der Exponent negativ: $y = e^{-x} = e^{-1,61}$, so heißt das

$$\frac{1}{e^{1,61}} = \frac{1}{5} = 0,2$$

$$e^{-1,61} = 0,2$$

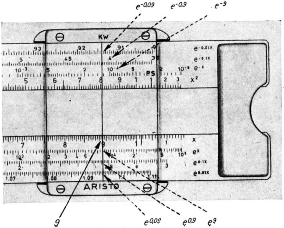


Bild 105

Einige Einstellbeispiele:

(x auf D, auf P die Funktion e^x usw.)

$$e^{2,5} = 12,2, \qquad e^{\pi} = e^{3,14} = 23,1$$

$$e^{0,38} = 1,474, \qquad e^{0,045} = 1,046$$

$$e^{10} = 22000, \qquad e^{6} = 405$$

Bild 105 zeigt einige Einstellbeispiele auf dem Rechenschieber System „Studio“. Auf D wird x, in diesem Fall die Zahl 9 eingestellt. (Die Zunge wurde der Übersichtlichkeit halber aus dem Stab entfernt.) Die drei unteren (schwarzen) Potenzskalen geben dann an: $y = e^x$, $y = e^{0,x}$, und $y = e^{0,0x}$, also $y = e^9$, $y = e^{0,9}$ und $y = e^{0,09}$. Auf der oberen Seite des Stabkörpers (oberhalb der Skala A) befinden sich weitere drei P-Skalen (rot), die x als negative Ex-

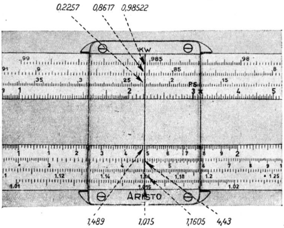


Bild 106

ponenten zeigen. Auf Bild 106 sind die Werte für $e^{1,489} = 4,43$, $e^{0,1489} = 1,1605$, $e^{0,01489} = 1,015$, $e^{-1,489} = 0,2257$, $e^{-0,1489} = 0,8617$ und $e^{-0,01489} = 0,98522$ eingetragen. Bild 107 zeigt eine interessante Möglichkeit, wie man beim Rechenschieber „Studio“ Potenzen und Wurzeln mit den Exponenten 10 und 100 bestimmen kann. Stellt man beispielsweise auf der untersten P-Skala ($e^{0,01x}$) die Zahl 1,015 ein, so ergeben die beiden darüber liegenden Skalen die Potenzen $1,015^{10}$ und $1,015^{100}$ an. Die Potenz-Skala $e^{-0,01x}$ ergibt dagegen den reziproken Wert $\frac{1}{1,015}$, und die beiden darunter liegenden Skalen zeigen die Potenzen $1,015^{-10}$ und $1,015^{-100}$ an. Geht man dagegen von einer anderen Skala aus (nicht von $e^{0,01x}$), etwa e^x, so ergeben sich die entsprechenden Wurzelausdrücke.

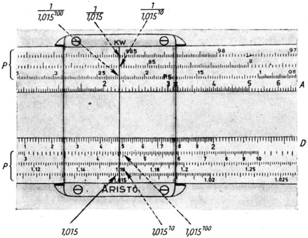


Bild 107

Im Bild 108 sind die Werte angegeben. Eingestellt ist die Zahl 8100 (auf e^x). Damit ergibt sich auf der P-Skala darunter ($e^{0,1x}$): $\sqrt[10]{8100} = 2,46$. Und abermals darunter: $\sqrt[100]{8100} = 1,0942$.

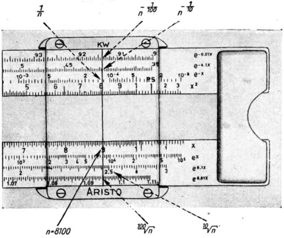


Bild 108

Von den oberen P-Skalen (rot) zeigt die unterste wieder den reziproken Wert an $\frac{1}{n} = \frac{1}{8100}$, die beiden anderen aber geben wieder Wurzelausdrücke:

$$n^{-\frac{1}{10}} = \sqrt[10]{\frac{1}{10}} \quad \text{und} \quad n^{-\frac{1}{100}} = \sqrt[100]{\frac{1}{n}}$$

Mit den Exponentialskalen lassen sich auch Wurzeln mit beliebigen Radikanden und beliebigen Wurzelexponenten ziehen. Zu diesem Zweck verwandelt man am besten die Wurzelausdrücke

vorher in Potenzen um, so etwa:

$$y = \sqrt[x]{n} = n^{\frac{1}{x}}$$

$$\sqrt[0,6]{e} = e^{\frac{1}{0,6}}$$

oder

$$\sqrt[1,8]{2,34} = 2,34^{\frac{1}{1,8}}$$

Man rechnet zweckmäßigerweise mit der Reziprokskala R.

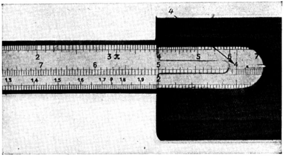


Bild 109

Beispiel: $\sqrt[4]{e} = 1,284 = e^{\frac{1}{4}} = e^{0,25}$

Wir bringen die Zungenteilungen mit den Stabteilungen in Einklang. 0,25 ist der natürliche Logarithmus von 1,284, also finden wir über 2–5 auf D und 4 auf R die Ziffernfolge 1–2–8–4 auf P_2. Die Bilder 109 u. 110 zeigen dieses Beispiel auf dem Rechenschieber „Darmstadt". Die Zunge ist mit der Rückseite nach vorn eingeschoben. Die Zahl 4 stellen wir auf der Reziprokskala R (jetzt auf der Rückseite) wieder unter den Einstellstrich der linken Ausfräsung (Bild 109). Auf der Vorderseite (Bild 110) lesen wir auf der mittleren Zungenskala (mit dem Läuferstrich) über der 1 von D die Ziffernfolge 1–2–8–4 ab.

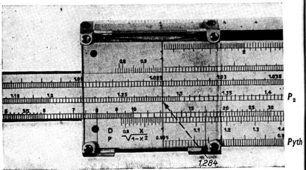


Bild 110

Anwendungsbeispiele:

1. Wie groß ist in einem induktiven Gleichstromkreis der Einschaltstrom nach $t = 0,1$ Sekunde?

$$U = 120\,\text{V}, \quad R = 1200\,\Omega, \quad L = 100\,\text{H}$$

$$\text{Dauerstrom} = \frac{U}{R} = \frac{120}{1200} = \mathbf{0,1\,A}$$

$$\text{Einschaltstrom } J = \frac{U}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

$$J = 0,1\,(1\,e^{-12\cdot 0,1})$$

$$\text{Die Klammer: } 1 - e^{-1,2} = 1 - \frac{1}{e^{1,2}}$$

$$e^{1,2} = 3,32$$

$$e^{-1,2} = 0,301$$

$$1 - 0,301 = 0,699 \approx 0,7$$

$$J = 0,1 \cdot 0,7 = \mathbf{0,07\,A}$$

2. Über einen festen Metallzylinder gleitet ein Seil. Der Reibungskoeffizient ist $\mu = 0,4$, die Last $Q = 50$ kg, Umschlingungswinkel $\alpha = 90°$*. Wie groß ist die Kraft P?

$$P = Q \cdot e^{\mu \cdot \alpha} = 50 \cdot e^{0,4 \cdot \frac{\pi}{2}} = 50 \cdot e^{0,2\cdot\pi}$$

$$P \approx 50 \cdot e^{0,63}, \qquad e^{0,63} \approx 1,88$$

$$P \approx 50 \cdot 1,88 = \mathbf{94\,kg}$$

3. Ein Körper kühlt sich $t = 10$ Sekunden lang ab. Die Anfangstemperatur beträgt $T_0 = 60°$ C, die Zeitkonstante $\tau = 20$ Sekunden. Wir rechnen nach der Gleichung

$$T = T_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = 60 \cdot e^{-\frac{10}{20}}$$

$$T = 60 \cdot e^{-0,5} = \frac{60}{e^{0,5}}$$

$$e^{0,5} = 1,649$$

$$T = \frac{60}{1,649} = \mathbf{36,4°\,C}$$

Die Skala $A(x^2)$ in Verbindung mit den Exponentialskalen ermöglicht die Berechnung folgender Wurzelausdrücke:
(Wurzelausdrücke auf A einstellen, auf P das Ergebnis ablesen)

$e^{\sqrt{9}} = 20,1$ (20,1 steht auf P-Skala e^x)

$e^{0,1\sqrt{36}} = 1,822$ (1,822 steht auf P-Skala $e^{0,1x}$)

$e^{0,01\sqrt{50}} = 1,0734$ (1,0734 steht auf P-Skala $e^{0,01x}$)

* Bei der Ausrechnung muß der Winkel α im Bogenmaß in die Formel eingesetzt werden. Das Bogenmaß eines geschlossenen Kreises beträgt $2\cdot\pi$. Damit kann folgende Proportion angesetzt werden:

$$\frac{\alpha}{2\cdot\pi} = \frac{90°}{360°}$$

$$\alpha = 2\cdot\pi\cdot\frac{90}{360} = 2\cdot\pi\cdot\frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Werden die Wurzelexponenten auf der Reziprokskala R eingestellt (die mit D bündig stehen muß), so sind folgende Aufgaben zu lösen, deren Ergebnisse auf der Exponentialskala abgelesen werden können:

$\sqrt[30]{e} = e^{\frac{1}{30}} = 1,0339$	[30 auf R / 1,0339 auf P]
$\sqrt[5]{e} = e^{\frac{1}{5}} = 1.2215$	[1,2215 auf P]

Die Exponentialskalen mit negativen Exponenten („Studio", „Multilog", „Hyperbolog") gestatten außerdem noch die Lösungen folgender Aufgaben:

$e^{-3} = 0,0499$	[3 auf D / 0,0499 auf P]
$e^{-0,347} = 0,707$	[0,347 auf D / 0,707 auf P]
$e^{-\sqrt{2}} = 0,243$	[2 auf A / 0,243 auf P]
$e^{-0,1\sqrt{30}} = 0,5782$	[30 auf A / 0,5782 auf P]

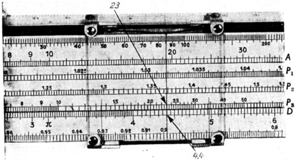


Bild 111

17. Potenzen und Wurzeln mit anderen Exponenten als 2 und 3

Die auf den Rechenschiebern „Darmstadt" und „Elektro" vorhandenen Potenzskalen P lassen die Berechnung von folgenden Aufgaben zu:

$$y = a^x \quad \text{und}$$
$$y = \sqrt[x]{a}$$

Wir haben gesehen, daß die Potenzskala mit der Normalskala D in folgendem Zusammenhang steht:

$$y = \ln x \quad \text{(vgl. S. 140)}$$

wobei y eine Zahl auf D und x eine Zahl auf P bedeutet. Mithin ist die Skala P doppelt logarithmisch, denn die Skala D ist ja auch schon logarithmisch geteilt. Aus diesem Grunde wird die Potenzskala P häufig als log-log-Skala bezeichnet. Daraus ergibt sich der günstige Umstand, Potenzieren und Radizieren auf Addieren und Subtrahieren zurückführen zu können.

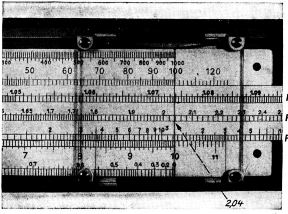


Bild 112

Es gilt:

$$y = a^x$$

als Multiplikation: $\log y = x \cdot \log a$ (einfachlogarithmisch);
als Addition: $\log \log y = \log x + \log \log a$ (doppeltlogarithmisch);

$$y = \sqrt[x]{a}$$

als Division: $\log y = \frac{\log a}{x}$ (einfachlogarithmisch);

als Subtraktion: $\log \log y = \log \log a - \log x$ (doppeltlogarithmisch)

Wir addieren bzw. subtrahieren zu und von der log-log-Strecke die log-Strecke. Das Ergebnis ist eine log-log-Strecke.

Wir verfahren also genauso, als ob es sich um eine einfache Multiplikation $a \cdot b$ bzw. Division $\frac{a}{b}$ handelt. Natürlich läßt sich diese Rechnung nur unter Beihilfe der Zungenteilung durchführen.

Beispiele:

1. $$\sqrt[4,4]{23} = 2,04$$

(Bilder 111 u. 112, System „Darmstadt".)

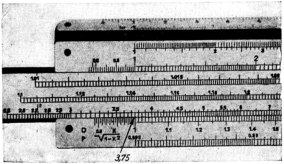


Bild 113

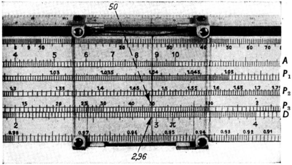


Bild 114

Es handelt sich bei dieser Aufgabe um eine Subtraktion der Strecken.

$$\log \log 2,04 = \log \log 23 - \log 4,4$$

4–4 stellen wir auf D ein (Bild 111). Darüber schieben wir 2–3 auf der unteren Skala P_3. Das Ergebnis 2–0–4 lesen wir über D 10 auf der mittleren Skala P_2 ab (Bild 112).

An diesem Beispiel (Wahl der richtigen Ableseskala) können wir wieder die Bedeutung der überschlägigen Kopfrechnung klar erkennen.

2. $$3,75^{2,96} = 50$$

(Bilder 113 u. 114, System „Darmstadt".)

Jetzt ist es eine Addition der Strecken.

$$\log \log 3,75 + \log 2,96 = \log \log 50$$

Über die 1 von D stellen wir 3–7–5 auf der unteren P_3-Teilung (Bild 113). Über 2–9–6 auf D steht auf der Potenzskala 50.

Die Rechenmöglichkeiten sind bei den modernen Rechenschiebern „Studio", „Multilog" und „Hyperbolog" noch vergrößert. Angenommen, es soll die Aufgabe $3,2^{2,5}$ gerechnet werden. Über die

Basis 3,2 auf der entsprechenden P-Skala (Bild 115) wird die 1 von Skala C geschoben. Und damit ist bereits eine Tabelle $y = 3{,}2\,x$ entstanden, denn auf C sind nun alle Werte für x enthalten, und y kann auf den entsprechenden P-Skalen entnommen werden. (Bild 116) $x = 2{,}5$. Es ergeben sich damit folgende Werte:

$$\left.\begin{array}{l} 3{,}2^{2,5} = 18{,}3 \\ 3{,}2^{0,25} = 1{,}338 \\ 3{,}2^{0,025} = 1{,}02955 \end{array}\right\} \text{untere } P\text{-Skalen}$$

$$\left.\begin{array}{l} 3{,}2^{-2,5} = 0{,}0546 \\ 3{,}2^{-0,25} = 07476 \\ 3{,}2^{-0,025} = 0{,}97134 \end{array}\right\} \text{obere } P\text{-Skalen}$$

Nach dem gleichen Verfahren ist auf Bild 117 C 1 über 1,46 auf P geschoben. Auf Bild 118 ist $x = 2{,}7$, und es ergibt sich damit für y einmal der Wert:

$$1{,}46^{2,7} = 2{,}78 \text{ auf der unteren } P\text{-Skala,}$$
$$\text{und } 1{,}46^{-2,7} = 0{,}36 \text{ auf der oberen } P\text{-Skala.}$$

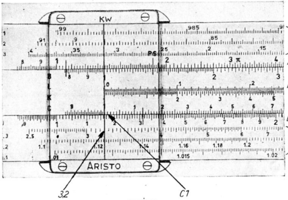


Bild 115

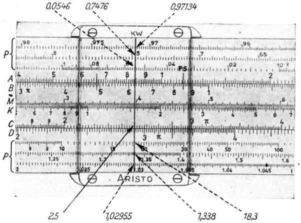


Bild 116

Der gleiche Exponent 2,7 gilt aber auch für die auf Bild 117 oben eingestellte Basis 0,685. Man kann also auch schreiben:

$$0{,}685^{2,7} = 0{,}36 \quad \text{und} \quad 0{,}685^{-2,7} = 2{,}78.$$

Folgende Regeln sind dabei zu beachten:

1. Bei positiven Exponenten findet man das Ergebnis auf den gleichen Skalengruppen (entweder unten oder oben, schwarz oder rot); bei negativen Exponenten muß von einer zur anderen Skalengruppe gerechnet werden (von der oberen zur unteren oder umgekehrt).

2. Sind die Basen kleiner als 1, so müssen sie auf den oberen P-Skalen (rot) eingestellt werden. Sind dabei die Exponenten positiv, so liegen die Ergebnisse ebenfalls auf diesen drei Exponentialskalen. Bei negativen Exponenten dagegen sind sie auf den unteren P-Skalen (schwarz) zu entnehmen.

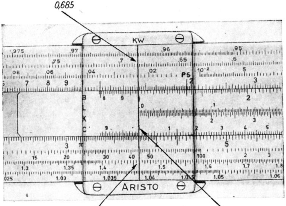


Bild 117

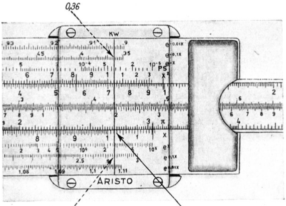


Bild 118

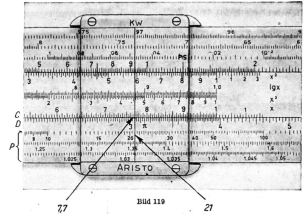


Bild 119

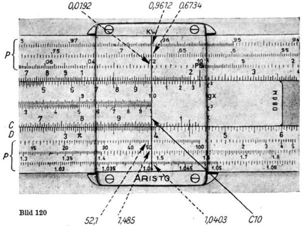


Bild 120

Die Bilder 119 und 120 („Studio") zeigen nun noch ein Beispiel, wie man mit den Exponentialskalen auch Wurzeln mit beliebigen Exponenten und Radikanden nach der Form $a = \sqrt[x]{y}$ lösen kann. Das eingezeichnete Beispiel lautet:

$$a = \sqrt[7,7]{21}$$

Der Wurzelexponent 7,7 auf C wird über den Radikanden 21 auf P geschoben (Bild 119). Nun kann das Ergebnis a unter C 10 (Bild 120) auf P abgelesen werden. Es lautet:

$$\sqrt[7,7]{21} = 1{,}485$$

Die weiteren zwei schwarzen (unteren) Exponentialskalen geben die Resultate für folgende andere Wurzelexponenten: 0,77; 77.

$$\sqrt[0,77]{21} = 52{,}1$$

$$\sqrt[77]{21} = 1{,}0403$$

Die oberen (roten) P-Skalen aber zeigen die Ergebnisse der reziproken Wurzelausdrücke:

$$\frac{1}{\sqrt[0,77]{21}} = 0{,}0192, \quad \frac{1}{\sqrt[7,7]{21}} = 0{,}6734, \quad \frac{1}{\sqrt[77]{21}} = 0{,}96122$$

18. Hyperbolische Winkelfunktionen

In der höheren Mathematik, ganz besonders aber in der Übertragungstechnik, kommt den natürlichen Exponentialfunktionen e^x und e^{-x} eine große Bedeutung zu. Sie treten dann unter anderem als halbe Summe und halbe Differenz auf, wie es die nachfolgenden Gleichungen zeigen:

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Diese Ausdrücke stehen nun zur gleichseitigen Hyperbel in einer ähnlichen Beziehung wie die gewöhnlichen Winkelfunktionen zum Kreis. Sie werden deshalb „hyperbolische Winkelfunktionen" genannt und haben folgende Bezeichnung erhalten:

$$\mathfrak{Sin}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\mathfrak{Cof}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Neuerdings liest man auch statt $\mathfrak{Sin}$ und $\mathfrak{Cof}$: sinh und cosh. Der Hyperbeltangens ergibt sich wie bei den Kreisfunktionen aus dem Quotienten $\dfrac{\mathfrak{Sin}\, x}{\mathfrak{Cof}\, x}$:

$$\mathfrak{Tg}\, x = \frac{\mathfrak{Sin}\, x}{\mathfrak{Cof}\, x} = \frac{\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}}{\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Und der Cotangens wird entsprechend:

$$\mathfrak{Ctg}\, x = \frac{\mathfrak{Cof}\, x}{\mathfrak{Sin}\, x} = \frac{\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}}{\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

(neuere Schreibweise: $\mathfrak{Tg} = \text{tgh}$ und $\mathfrak{Ctg} = \text{ctgh}$).

Der Rechenschieber „Hyperbolog" hat drei Skalen mit hyperbolischen Funktionen: 2 Skalen für Sinusfunktionen, mit Sh_1 und Sh_2 bezeichnet, und einer Skala für Tangensfunktionen Th. Diese Teilungen beziehen sich alle auf die Grundskala D.

Sh_1	gibt	Argumente	von	0,85 . . . 3,0
Sh_2	„	„	„	0,1 . . . 0,9
Th	„	„	„	0,1 . . . 3,0

Für die hyperbolischen Funktionen sind die Argumente nicht im Winkel, sondern im Bogenmaß angegeben. Mit den Skalen Sh und Th kann wie mit gewöhnlichen trigonometrischen Skalen beliebig multipliziert und dividiert werden. Für alle in Skala Sh_2 eingestellten Argumente x von 0,1 . . . 0,881 können der Skala D die Funktionswerte $\mathfrak{Sin}\, x$ von 0,1 . . . 1,0 entnommen werden. Mit Hilfe der Fortsetzungsskala Sh_1 ergeben sich entsprechend für die Argumente von 0,881 . . . 3,0 die Funktionswerte $\mathfrak{Sin}\, x$ von 1 . . . 10. Für $x > 3$ gilt $\mathfrak{Sin}\, x \approx \frac{e^x}{2}$, für $x < 0{,}1$ gilt $\mathfrak{Sin}\, x \approx x$.

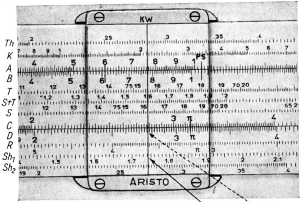


Bild 121

In Bild 121 ist das Beispiel $\mathfrak{Sin}\,1{,}742 = 2{,}767$ eingestellt. (1,742 auf Sh_1, Ablesung 2,767 auf D, die Zunge wird nicht benutzt.) Es wird also wie in einem Nomogramm abgelesen.

Die Skala *Th* ermöglicht die Bestimmung der Tangenswerte $\mathfrak{Tg}$. Sie gilt für Argumente x von 0,1 … 3,0, zu denen auf Skala *D* die entsprechenden Funktionswerte $\mathfrak{Tg}\,x$ von 0,1 … 0,995 abgelesen werden können. Für $x > 3$ gilt $\mathfrak{Tg}\,x \approx 1 - 2 \cdot e^{-2x} \approx 1$. Für $x < 0{,}1$ gilt $\mathfrak{Tg}\,x \approx x$. Bild 122 zeigt das Beispiel $\mathfrak{Tg}\,1{,}614 = 0{,}924$. In den Bildern 123 und 124 ist dargestellt, wie die Berechnung der Cosinusfunktion $\mathfrak{Cof}\,x$ nach der Gleichung $\mathrm{Cos}\,x = \dfrac{\mathfrak{Sin}\,x}{\mathfrak{Tg}\,x}$ erfolgen kann.

Die Aufgabe lautet:

$$\mathfrak{Cof}\,0{,}437 = \frac{\mathfrak{Sin}\,0{,}437}{\mathfrak{Tg}\,0{,}437} = 1{,}097$$

Zuerst wird $C1$ unter 0,437 auf *Th* geschoben (Bild 123). Sodann über 0,437 auf Sh_2 der Läuferstrich gestellt, unter dem dann auf C das Ergebnis 1,097 steht (Bild 124).

Die Cosinusfunktion kann aber auch nach der Gleichung

$$\mathfrak{Cof}\,x = \sqrt{\mathfrak{Sin}^2 x + 1}$$

bestimmt werden.

Beispiele:

1. Der Kennwiderstand Z eines Vierpols in Dreieckschaltung ist nach der Gleichung

$$Z = \sqrt{\frac{R}{G}} \cdot \frac{1}{\mathfrak{Cof}\,\frac{b}{2}}$$

zu bestimmen.

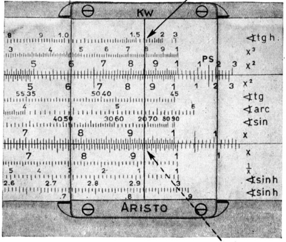


Bild 122

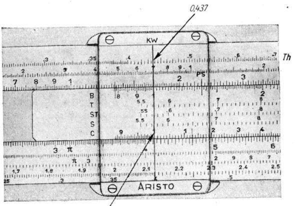


Bild 123

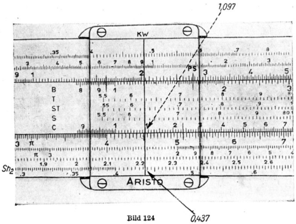


Bild 124

Wie groß ist der Widerstand Z, wenn $R = 10^3\,\Omega$, $G = 10^{-3}$ S und $b = 1,5$ Neper groß sind?

$$Z = \sqrt{10^3 \cdot 10^3}\,\frac{2}{\mathfrak{Cof}\,\frac{1,5}{2}} = 10^3 \cdot \frac{1}{\mathfrak{Cof}\,0,75}$$

$$\mathfrak{Cof}\,0,75 = 1,295$$

$$Z = \frac{1000}{1,295} = 772,\quad Z = 772\,\Omega$$

2. Ein in Dreieck geschalteter Vierpol hat einen Kennwiderstand $Z = 1000\,\Omega$. Die Dämpfung beträgt 2 Neper. Wie groß sind der Längswiderstand R und der Leitwert G (Querwiderstand)?

$$\text{a) } R = Z \cdot \mathfrak{Sin}\,b \quad \text{und} \quad \text{b) } \frac{1}{G} = \frac{Z}{2 \cdot \mathfrak{Tg}\,\frac{b}{2}}$$

$$\text{a) } R = 10^3 \cdot \mathfrak{Sin}\,2 = 10^3 \cdot 3,63 = 3630,\quad R = \mathbf{3,73\,k\Omega}$$

$$\text{b) } \frac{1}{G} = \frac{10^3}{2 \cdot \mathfrak{Tg}\,\frac{2}{2}} = \frac{10^3}{2\,\mathfrak{Tg}\,1} = \frac{10^3}{2 \cdot 0,762} = \frac{10^3}{1,524} = 656$$

$$G = \frac{1}{656} = 0,001677$$

$$G = 0,001677\ \text{S} = \mathbf{0,1677\ mS}$$

19. Die Teilungen $\pi \cdot x$ und $\frac{1}{\pi \cdot x}$

Die Rechenschieber System „Studio“, „Multilog“ und „Hyperbolog“ haben noch Skalen mit um π versetzten Teilungen, die aber sonst wie die Grundskalen C und D geteilt sind. Auf diese Weise sind Multiplikationen und Divisionen mit und durch π, ohne daß die Zunge benutzt werden muß, möglich. Bild 125 zeigt diese Teilungen. Um Verwechslungen mit A und B zu vermeiden, die sich auf der anderen Seite des Schiebers befinden, sind die Skalen $\pi \cdot x$ und C auf der Zunge gelb gefärbt. Bild 126 zeigt ein einfaches Rechenbeispiel, bei dem die Zunge mit dem Skalenkörper

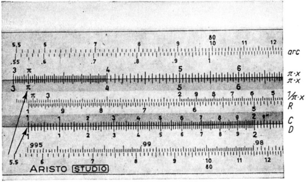


Bild 125

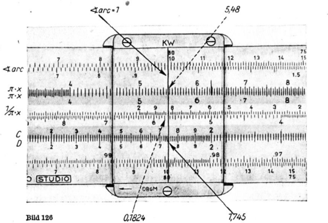


Bild 126

bündig steht ($C1$ auf $D1$). Die Aufgabe lautet: $x = 1{,}745 \cdot \pi$ (Umfang eines Kreises mit dem Durchmesser 1,745). Auf der Teilung $\pi \cdot x$ steht das Ergebnis: $x = 5{,}48$. Gleichzeitig kann man auf der Teilung $\frac{1}{\pi \cdot x}$ den reziproken Wert davon ablesen:

$$\frac{1}{1{,}745 \cdot \pi} = 0{,}1824$$

Der Läuferstrich in Bild 126 steht über der 1 der Skala ∢ arc. Diese Skala ist der Grundskala C bzw. D um $\frac{\pi}{180}$ versetzt. Beim Übergang von dieser Skala zur Grundskala C bzw. D verwandelt man ein Bogenmaß ins Gradmaß. Diese Rechnung gilt nicht nur für die auf der Skala ∢ arc angegebenen Winkel, sondern auf Grund der dezimalen Gradeinteilung gleichfalls für alle Winkel, denn die 1 kann auch als 0,1 aber auch als 10 oder 100 usw. gelesen werden, und dementsprechend verschiebt sich auch die Kommastelle im Bogenmaß. Für 1° (auf ∢ arc) ergibt sich auf C bzw. D (Bild 126) ein Bogenmaß von 0,01745 (vgl. S. 130 u. 167).

20. Das Rechnen mit festen Marken

Auf fast allen Rechenschiebern ist das Zeichen π angegeben. Die Bilder 127 u. 128 zeigen den Rechenschieber System „Rietz". Die Ludolfsche Zahl π ist auf allen 4 Skalen (A, B, C u. D) vorhanden. Es ist beim Rechnen einfacher, auf die feste Marke π einzustellen, als erst die irrationale Zahl 3,1415 ... möglichst genau zu suchen. Außerdem sind auf den Normalskalen C und D die Zeichen ϱ'' und $\varrho_{,,}$ (Bilder 127 u. 129) vorhanden. Die Skala C weist außerdem noch das Zeichen ϱ' auf (Bild 128). Diese Marken dienen der Bestimmung der Funktionswerte sehr kleiner Winkel. Bei diesen Funktionen ist der sin vom tg und vom arc praktisch nicht mehr zu unterscheiden. Die Marken ϱ' und ϱ'' gelten für die Altgrad- (360°) und die Marken $\varrho_{,,}$ für die Neugrad- (400 Neugrad) Teilung. Die Marke ϱ' gilt für Winkel in Minuten, die Marke ϱ'' für Winkel in Sekunden.

Beispiele:

1. Wir wollen sin 20' (20 Minuten) bestimmen. Die Marke ϱ' stellen wir über 2 auf D. Unter C 10 lesen wir auf D die Ziffernfolge 5–8 ab.

$$\sin 20' = \mathbf{0{,}0058}, \qquad \sin 20' = \operatorname{tg} 20' \approx \operatorname{arc} 20' = 0{,}0058$$

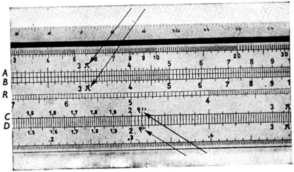


Bild 127

2. $\sin 43''$ (43 Sekunden) = ?

Wir stellen die Marke ϱ'' über 4–3 auf D und lesen unter C 1 auf D ab: 2–0–8–5

$$\sin 43'' = \operatorname{tg} 43'' = \operatorname{arc} 43'' = 0{,}0002085$$

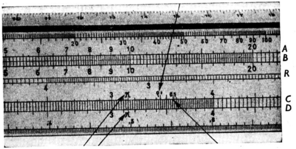


Bild 128

Auf Bild 128 finden wir außerdem noch die feste Marke c_1. Sie ist auf dem Rechenschieber nur einmal vorhanden und steht auf der Skala C. Stellen wir diese Marke über die Zahl auf D, die einen Kreisdurchmesser darstellt (Bild 130), so können wir über B 1 oder B 10 oder B 100 die Kreisfläche, den Querschnitt, ablesen. Auf Bild 130 lesen wir über B 10 die Ziffernfolge

1–9–6–4 ab.

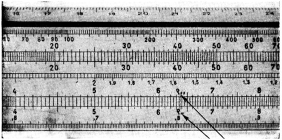


Bild 129

Die Kreisfläche F ist rechnerisch:

$$F = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = 0{,}785 \cdot d^2$$

In unserem Beispiel war $d = 5$ cm.

$$F = 0{,}785 \cdot 5^2 = 0{,}785 \cdot 25 = \mathbf{19{,}64\ cm^2}$$

Diesen Kreisquerschnitt können wir aber auch mit dem Dreistrichläufer berechnen. Bild 130 zeigt, daß, wenn der Mittelstrich über dem Durchmesser d auf D steht, unter dem linken Strich auf A die Kreisfläche abgelesen werden kann.

Bild 131 gibt das gleiche Beispiel an, nur daß es jetzt der rechte Strich ist, der auf dem Durchmesser steht, und unter dem Mittelstrich können wir nun das Ergebnis ablesen.

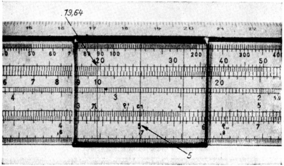


Bild 130

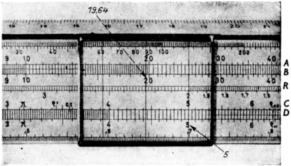


Bild 131

Selbstverständlich läßt sich mit dem Läufer auch aus dem bekannten Kreisquerschnitt der unbekannte Durchmesser ermitteln. Wir stellen dann den linken oder den mittleren Strich auf die

Querschnittszahl auf A und lesen unter dem mittleren oder rechten Strich auf D den zugehörigen Durchmesser ab.

Dieser Dreistrichläufer (hier System „Rietz") ist symmetrisch aufgebaut. Die Taschenrechenschieber haben meist nur einen Einstrichläufer. Die Rechenschieber „Elektro" und „Darmstadt"

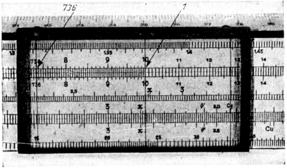


Bild 132

haben einen Dreistrichläufer, bei dem sowohl die Kreisberechnung als auch eine Pferdestärke-Watt-Umrechnung vorgenommen werden kann. Bild 132 zeigt diesen Läufer. Dieser Rechenschieber hat übrigens auf den Skalen A und B die feste Marke 7–3–6. Hierfür gilt:

$$1 \text{ PS} = 736 \text{ W}$$

Steht der linke Strich auf A über der Watt- bzw. Kilowattzahl (auf dem Foto: 736), so können wir unter dem Mittelstrich auf A die PS-Zahl ablesen. In unserem Beispiel 1 (nicht 10). Der rechte Strich und der Mittelstrich dienen der Kreisberechnung. Der rechte Strich deckt sich auf dem Bild mit der Marke c_1 und steht über 3–5–7 auf D. Der Mittelstrich zeigt auf A die Ziffern 1–0 an.

$$d = 3{,}57 \text{ cm}$$

$$F = d^2 \cdot 0{,}785 = 3{,}57^2 \cdot 0{,}785 = 10 \text{ cm}^2$$

21. Die Auswahl des richtigen Rechenschiebers

Hat man sich durch das Gestrüpp der Quadrat- und Kubikwurzeln hindurchgearbeitet und ist auch den Fallgruben der Logarithmen entkommen, so wird die Frage nach dem richtigen Rechenschieber akut. Aber auch hierbei, bei der Suche nach dem richtigen „Schieber", soll man sich nur von streng sachlichen Überlegungen leiten lassen. Die Auswahl ist sehr groß, da gibt es einfache Schulrechenstäbe, erweiterte Stäbe für Beruf und Studium, und dann gibt es auch noch ganz hochgezüchtete Rechenschieber für Ingenieure und Hochschulstudium. Die Erfahrung hat gezeigt, und das soll sogleich verraten werden, nicht der Besitz eines solchen Schiebers allein schafft auch den dazu nötigen Geist. Man hat sich also zu entscheiden, ob man sich ein „akademisches Lineal" zulegen will (und dafür ist System „Darmstadt" gerade gut genug) oder ob man sich einen Rechenschieber kaufen will, der ein *wirklicher Helfer* sein soll.

Die *Schulstäbe* sind am einfachsten gehalten, denn hier würden zuviele Skalen den Stab nur überladen und unübersichtlich machen. Diese Stäbe haben neben den Grundskalen A, B, C und D noch die Kubikskala K und die Mantissenskala M (vgl. S. 131). Auf der Zungenrückseite sind dann noch die Winkelfunktionen untergebracht.

Die Weiterentwicklung brachte auf der Vorderseite der Zunge (in der Mitte) die Reziprokskala R. Derartige Rechenschieber sind universal verwendbar, erlauben fast alle Berechnungen und sind an keinen Beruf gebunden. Sie sind an *allgemeinbildenden Schulen* wie auch an *Fachschulen*, in *Laboratorien* und in *Werkstätten* gleich gut verwendbar. Die auf diesen Rechenschiebern enthaltenen Skalen verlangen nur die mathematischen Grundkenntnisse (bis zu den Logarithmen), und deshalb dürften diese Stäbe (zu denen auch System „Rietz" gehört) noch immer den größten Anklang finden.

Ebenfalls ein Universal-Rechenschieber, aber für höhere Ansprüche, etwa für *natur-ingenieurwissenschaftliche Zwecke*, ist der Schieber nach System „Darmstadt" (S. 138). Als besondere Skalen enthält er die drei Exponentialskalen P_1, P_2 und P_3 sowie eine pythagoreische Teilung Pyth (vgl. S. 176). Bei einigen anderen Ausführungen sind noch weitere Skalen vorhanden, wie etwa bei Aristo-„Darmstadt" eine reziproke Quadrat-Teilung $\frac{1}{x^2}$, die mit der Quadratskala $A(x^2)$ korrespondiert.

Der Rechenschieber System „Darmstadt" wurde weiterentwickelt, und es entstanden damit hochwertige Rechenschieber für *Universität* und *Forschung*, für *Physik* und *Chemie*, für *Mathematik* und *Hochfrequenztechnik*. Diese Stäbe zeichnen sich u. a. dadurch aus, daß die Exponentialskalen erweitert wurden. So enthält der Rechenschieber System „Studio" eine weitere dreiteilige, negative Exponentialskala von 0,99 ... 10^{-5}. Also können mit diesem Schieber auch Potenzen mit der Basis < 1 sowie natürliche Logarithmen < 1 direkt abgelesen werden. Das System „Multilog" hat sogar eine achtteilige Exponentialteilung (4 positiv, 4 negativ), so daß der Bereich 1,001 ... 10^{-5} und 0,999 ... 10^{-5} erfaßt wird (also eine Skalenteilung mehr als beim „Darmstadt" und beim „Studio") damit genügt dieser Rechenschieber auch den *höchsten mathematischen Ansprüchen*. Als weitere Besonderheiten enthalten diese Rechenschieber noch um π versetzte Skalen $\left(\pi \cdot x \text{ und } \frac{1}{\pi \cdot x}\right)$. Über dem Skalenanfang der Skala x (entspricht C bzw. D) steht auf diesen Skalen der Wert π, und die 1 dieser Skalen liegt etwa in der Skalenmitte. Auf diese Weise erhält man mit Hilfe des Läufers eine Multiplikation (bzw. Division) mit π. Diese Möglichkeiten sind besonders bei der Herstellung von Tabellen usw. von Bedeutung. Hinzu kommt noch eine um $\frac{\pi}{180}$ gegen x (entspricht C bzw. D) versetzte Skala (mit $\sphericalangle$ arc bezeichnet). Mit dieser Skala ist eine schnelle Umrechnung vom Gradmaß ins Bogenmaß möglich. Die mathematische Grundlage dafür ist die Proportion:

$$\frac{\text{arc}}{\sphericalangle} = \frac{2 \cdot \pi}{360°} \quad \text{(s. S. 151 und 83)}$$

360°	entspricht	im	Bogenmaß	$2 \cdot \pi$
180°	„	„	„	π
90°	„	„	„	$\frac{\pi}{2}$
45°	„	„	„	$\frac{\pi}{4}$

Die auf dieser Skala angeführten Winkel gelten gleichzeitig für alle anderen entsprechenden Winkel der Dezimalteilung, also 2°, 20°, 200°, bzw. 0,2° und 0,02°.

Beispiel:

0,1°	arc	0,001745
1°	„	0,01745
10°	„	0,1745
100°	„	1,745

Speziell für die *theoretische Hochfrequenztechnik bzw. Fernmeldetechnik* gibt es einen Exponentialrechenschieber mit Skalen der hyperbolischen Winkelfunktionen (vgl. S. 160). Im übrigen ähnelt er dem erweiterten System „Darmstadt". Für Entwicklung und Forschung ist dieser Rechenschieber eine wertvolle Hilfe. Insbesondere gilt das bei Berechnungen nach der Vierpoltheorie.

Mehrmals wurde in diesem Büchlein auf den für die *Elektroberufe* (einschließlich *Radio-* und *Fernmeldetechnik*) speziell entwickelten Rechenschieber „Elektro" hingewiesen. Neben den Skalen des System „Rietz" hat er noch zwei Potenzskalen, die auf S. 138 erklärt werden. Im übrigen unterscheidet er sich nicht wesentlich von den anderen Rechenschiebern, die als verbesserte „Rietz" von den verschiedensten Firmen herausgebracht werden. Es ist also keineswegs ein absolut spezieller Stab, den nur der Elektrofachmann gebrauchen kann.

Das gleiche gilt für die verschiedenen Rechenschieber, die für die *Bau- und Maschinentechnik* herausgebracht wurden. Zum Unterschied von System „Elektro" fehlt bei diesem die Exponentialskala. Dafür sind Skalen für Kreis- und Flächenberechnungen $\left(x \cdot \pi, \frac{1}{x \cdot \pi}\right)$ vorhanden. Eine Bogenmaßteilung und eine pythagoreische Teilung machen diese Stäbe eigentlich mehr zu universalen Rechenschiebern, die nicht nur von Bauleuten und Maschinentechnikern benutzt werden können. Dagegen existieren für das Baugewerbe *ausgesprochene Spezialstäbe*, wie etwa der Rechenschieber „Stahlbeton". Dieser Schieber ist so eingerichtet, daß speziell folgende Berechnungen schnell und sicher erledigt werden können: Bemessung von Platten, Rechteckbalken, T-Querschnitten mit Stegspannungen, Spannungsnachweise von Platten und Rechteckbalken, Bemessung bei doppelter Bewehrung, bei Biegung mit Axialkräften, bei außergewöhnlichen Spannungen. Desgleichen gibt es *Gewichts-Rechenschieber*, mit denen man beispielsweise bei bekannter Länge, Dicke und Breite das Gewicht eines bestimmten Materials schnell bestimmen kann. Ausgesprochene Spezial-Rechenschieber gibt es weiterhin für *Kanalisations-Berechnungen, Materialprüfungen* usw. Für Physik bzw. Fernmeldetechnik gibt es Rechenschieber für *Temperaturstrahlung* mit Einteilung für Wellenlänge und Temperatur, und für *Dämpfungsberechnungen* (in Neper und Dezibel) bei bekannten Spannungsverhältnissen.

Der Rechenschieber „Geodät" ist speziell für die Aufgaben des Vermessungsingenieurs entwickelt worden. Zusätzlich zu den normalen Skalen (etwa wie „Rietz") hat dieser Stab noch Winkelfunktionen in Alt- und Neugraden, eine Bogenmaßteilung in Alt- und Neugraden und eine um π versetzte Skala $\left(\pi \cdot x \text{ und } \frac{1}{\pi \cdot x}\right)$, eine pythagoreische Teilung und als Besonderheit eine zweiteilige Reduktionsskala für Entfernungsmessungen mit waagerechter Meßlatte und Neigungen von 15' ... 28° bzw. $0{,}25^g \ldots 30^g$, bezogen auf die Skala x^2 (entspricht A bzw. B). Weiterhin eine Skala $\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$ (für Pythagorasproben → Spannungskontrolle) und eine Skala für Höhenunterschiede von 34' ... 45° bzw. $0{,}6^g \ldots 50^g$. Hinzu kommt noch eine Reduktionsskala für Entfernungsmessung mit senkrechter Meßlatte und Neigungen von 0 ... 45° bzw. $0^g \ldots 50^g$ ($\cos^2$).

Natürlich gibt es auch Spezialrechenschieber für den *Kaufmann*. Diese haben meistens an Stelle der Grundskalen A und B um den Wert 360 (Zinstage im Jahr) versetzte Grundskalen x (entspricht C und D). Darüber befinden sich entsprechende Prozentbezeichnungen. Im übrigen sind die Skalen R, C und D wie üblich vorhanden. Zu erwähnen ist noch, daß es für die meisten der hier aufgeführten Rechenschieber auch eine Taschenausführung gibt. Man wird sich bei der Auswahl des richtigen Rechenschiebers also jeweils zwischen einem Universalschieber und einem berufsgebundenen Spezialschieber entscheiden müssen. Die Spezial-Rechenschieber gestatten in den meisten Fällen auch die normalen Rechenverfahren wie Multiplizieren, Dividieren, Radizieren und Potenzieren, während die Universalschieber noch schwierigere Berechnungen (in mathematischer Hinsicht) zulassen. Die beste Lösung ist allerdings die, für das Büro einen Universalschieber in Normalausführung und für die technische Praxis einen Spezialschieber in Taschenformat zu besitzen.

22. Anhang

a) Die Teilung $\sqrt{1-x^2}$ *(pythagoreische Teilung P)*

Auf der Vorderseite, unterhalb der Teilung D befindet sich auf dem Rechenschieber System „Darmstadt" eine mit $\sqrt{1-x^2}$ bezeichnete Skala, die von 0,995 bis 0 reicht. Die Bilder 110 (S. 150) und 113 (S. 154) zeigen den Anfang, und Bild 112 (S. 153) enthält das Ende desselben. Diese Teilung gestattet (zusammen mit der Teilung D) die Bestimmung des Sinus-Winkels im rechtwinkligen Dreieck, wenn der Cosinus desselben bekannt ist (und umgekehrt). Zugrunde liegen folgende mathematische Zusammenhänge (vgl. Bild 133).

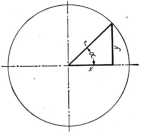


Bild 133

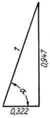


Bild 134

$$\sin^2 a + \cos^2 a = \frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = 1$$

$r^2 = 1$ (mathematischer Einheitskreis)

$$y^2 + x^2 = 1$$

$$y = \sqrt{1-x^2}$$

oder:

$$\sin a = \sqrt{1-\cos^2 a}$$

Wird auf der Skala D der Wert x eingestellt, so findet man auf Pyth. den Wert für y. Die Pyth.-Teilung ist gegenläufig und rot gefärbt. Man benötigt zur Einstellung lediglich den Läufer. Die Werte auf der Teilung D sind von 0,1 bis 1 zu lesen.

Beispiele:

1. Auf Seite 142 zeigt Bild 103 (mittlerer Läuferstrich) auf der Teilung D den Wert 0,322

$$x = 0{,}322$$

Der zugehörige y-Wert auf der Pyth.-Skala lautet: $\approx 0{,}947$. Nach Bild 134 ist x die Cosinus-Seite und y die Sinus-Seite des rechtwinkligen Dreiecks.

Probe: $0{,}322^2 + 0{,}947^2 = 0{,}13684 + 0{,}896809 = 1{,}000493 \approx 1$

0,947 ist dabei der Sinus und 0,322 der Cosinus des Winkels α. Der zugehörige Winkel α ist $\approx 71°\,14'$

2. Auf Seite 144 zeigt Bild 104 auf D den Wert 0,161 und auf der Pyth.-Teilung etwa den Wert 0,98694 an.

$$\cos\alpha = 0{,}161, \quad \sin\alpha = 0{,}98694$$

Probe: $0{,}161^2 + 0{,}98694^2 = 0{,}02592 + 0{,}97406 = 0{,}99998 \approx 1$

b) Kann man mit dem Rechenschieber addieren und subtrahieren?

Grundsätzlich sind diese Rechenoperationen mit einem logarithmischen Rechenschieber nicht durchführbar (vgl. S. 34 oben). Durch eine einfache Umformung läßt sich aber ein Weg finden, wie man dennoch addieren und subtrahieren kann. Allerdings dürfte dieser Weg für die Praxis kaum von Bedeutung sein.

Jede Addition kann wie folgt dargestellt werden:

$$a + b = a\left(1 + \frac{b}{a}\right) \to a + \frac{a\,b}{a} = a + b$$

Die Addition wird damit in eine Division $\frac{a}{b}$, die auf dem Rechenschieber gerechnet werden kann, eine Addition $\left(\frac{b}{a}\right) + 1$, die im Kopf durchgeführt wird, und eine Multiplikation $a\left(1 + \frac{b}{a}\right)$, die ebenfalls auf dem Rechenschieber gerechnet wird, verwandelt. Analog verhält es sich mit der Subtraktion:

$$a - b = a\left(1 - \frac{b}{a}\right) \to a - \frac{a\,b}{a} = a - b$$

Beispiel:

$$1275 + 283 = x$$

Beide Zahlen können auf dem Normalrechenschieber (z. B. System „Rietz") vollständig eingestellt werden. Man nimmt die größere Zahl als b, um einen unechten Bruch zu erhalten.

$$1275 = b \qquad 283 = a$$

Rechenschieber: $\frac{b}{a} = \frac{1275}{283} = 4{,}5$

im Kopf: $4{,}5 + 1 = 5{,}5$

Rechenschieber: $283 \cdot 5{,}5 = 1\text{–}5\text{–}5\text{–}?$

Die letzte Ziffer muß geschätzt werden (es ist die Zahl 8).

$$x = \mathbf{1558}$$

c) Berechnungen nach dem pythagoreischen Lehrsatz

Nach dem gleichen Prinzip, wie auf Seite 177 eine Addition bzw. Subtraktion *mit dem Rechenschieber* durchgeführt wird, kann man auch Berechnungen *mit dem pythagoreischen* Lehrsatz durchführen.

Der Lehrsatz lautet: $c^2 = a^2 + b^2$

bzw. $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

Es wird a ausgeklammert:

$$c = \sqrt{a^2\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)} = a\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = a\sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

1. Rechnung: Über b (auf D eingestellt) wird a auf C geschoben. Über B 1 oder B 10 ist dann auf A das Ergebnis $\left(\frac{b}{a}\right)^2$ abzulesen.

2. Rechnung: Im Kopf addiert man zu diesem Ergebnis die Zahl 1.

3. Rechnung: Die aus der 2. Rechnung erhaltene Zahl $\left[1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2\right]$ wird auf A eingestellt (Läufermittelstrich). Unter den Strich schiebt man nun a (auf B) und erhält unter C 1 bzw. C 10 auf D das Endergebnis.

Beispiel: $a = 3, \quad b = 4, \quad c = ?$

$$c = a\sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

1. $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = 1{,}78$
2. $1{,}78 + 1 = 2{,}78$
3. $3 \cdot \sqrt{2{,}78} = 5, \quad c = 5$

Wird nach einer Kathete gesucht (a oder b), so wird:

$$a^2 = c^2 - b^2$$

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

wird ausgeklammert:

$$a = \sqrt{c^2\left(1 - \frac{b^2}{c^2}\right)} = c\sqrt{1 - \left(\frac{b}{c}\right)^2}$$

Beispiel: $b = 4, \quad c = 5, \quad a = ?$

1. $\left(\frac{b}{c}\right)^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 0{,}64$
2. $1 - 0{,}64 = 0{,}36$ (wird im Kopf gerechnet)
3. $5 \cdot \sqrt{0{,}36} = 3$

$$a = 3$$

Eine andere Berechnungsmethode, bei der nur eine Zungen- und zwei Läufereinstellungen nötig sind, ist folgende:

a als die kleinere der beiden Katheten wird auf D eingestellt. Darüber wird C1 oder C10 gestellt. In dem zweiten Rechengang wird der Läufermittelstrich über b auf D geschoben. Das Zwischenergebnis, nämlich der Bruch $\left(\frac{b}{a}\right)^2$, kann nun unter dem Läuferstrich auf B abgelesen werden. Im Kopf wird zu dieser Zahl die Zahl 1 addiert. Die so erhaltene um 1 erhöhte Zahl wird im letzten Rechengang auf B mit dem Läufermittelstrich eingestellt. Das Endergebnis c steht dann unter dem Läufermittelstrich auf D.

Beispiel: $a = 1{,}414, \quad b = 1{,}73, \quad c = ?$

1. 1,414 auf D einstellen. C1 darüberstellen. Auf A steht dann $a^2 = 1{,}414^2 = 2$

2. Läuferstrich über 1,73. Auf A steht dann $b^2 = 1{,}73^2 = 3$. Unter dem Läuferstrich auf B steht das Zwischenergebnis: $\approx 1{,}495$. Im Kopf wird daraus $1{,}495 + 1 = 2{,}495$
3. Läuferstrich über 2,495 auf B. Unter dem Strich steht auf A $c^2 = 5$ und auf D das gesuchte Endergebnis $c = \sqrt{5} = 2{,}235$

d) Bestimmung der Stellenzahl

Bei umfangreichen Rechnungen, bei denen das Produkt aus vielen mehrstelligen Zahlen besteht, kann man auf mechanische Weise die Stellenzahl des Ergebnisses ermitteln. Man merkt sich dabei die Zahl der Fälle, bei denen das linke Ende der Zunge C 1 mit dem Läuferstrich in Deckung gebracht wird. Die Stellenzahl des Produktes ist dann gleich der Summe der Stellenzahlen der einzelnen Faktoren, vermindert um die Zahl der gemerkten Zungenstellungen.

Die einzelnen Faktoren haben dann folgende Stellenzahlen:

6583746	→	Stellenzahl:	7
658374,6	→	„ :	6
65837,46	→	„ :	5
6583,746	→	„ :	4
658,3746	→	„ :	3
65,83746	→	„ :	2
6,583746	→	„ :	1
0,6583746	→	„ :	0
0,06583746	→	„ :	−1
0,006583746	→	„ :	−2
0,0006583746	→	„ :	−3 usw.

Beispiele:

1. $250 \cdot 8320 \cdot 7{,}9 \cdot 55 = 9\text{–}0\text{–}4$

$$\begin{array}{rl} 250 & = 3 \text{ Stellen} \\ 8320 & = 4 \quad „ \\ 55 & = 2 \quad „ \\ 7{,}9 & = 1 \text{ Stelle} \\ \hline & 10 \text{ Stellen} \end{array}$$

Die C 1 wird einmal mit dem Läuferstrich in Deckung gebracht, also

$$10 - 1 = 9 \text{ Stellen}$$

Das Ergebnis lautet: **904000000**

2. $0{,}05 \cdot 0{,}6 \cdot 12{,}5 = 3\text{–}7\text{–}5$

$$\begin{array}{rlr} 0{,}05 & = \text{Stellenzahl} & -1 \\ 0{,}6 & = \quad „ & 0 \\ 12{,}5 & = \quad „ & 2 \\ \hline & & +1 \end{array}$$

Einmal wurde die C 1 mit dem Läuferstrich in Deckung gebracht.

$$1 - 1 = 0$$

Das Ergebnis lautet also: **0,875**

Bei der Division von Zahlen ist die Stellenzahl dann gleich der Differenz der Stellenzahlen von Dividend und Divisor, wenn das Ergebnis unter dem rechten Ende der Zunge (C 10) auf D abgelesen wird. Nur wenn das Ergebnis unter C 1 auf D steht, ist die Stellenzahl des Ergebnisses um die Zahl 1 größer als die errechnete Differenz.

Beispiele:

1. $246 : 6 = 4\text{–}1$ (Das Ergebnis wird unter C 10 abgelesen.)

$$\begin{array}{rlr} 246 & = \text{Stellenzahl} & 3 \\ 6 & = \quad „ & 1 \\ \hline & & 2 \end{array}$$

Ergebnis: **41**

2. $0{,}0035 : 0{,}00025 = 1\text{–}4$ (Das Ergebnis wird unter C 1 abgelesen.)

$$\begin{array}{rlr} 0{,}0035 & = \text{Stellenzahl} & -2 \\ 0{,}00025 & = \quad „ & -3 \end{array}$$
$$(-2) - (-3) = -2 + 3 = 1$$
$$1 + 1 = 2$$

Ergebnis: **14**

Es sei aber nochmals darauf hingewiesen, daß die Ermittlung der Stellenzahl des Ergebnisses besser als durch eine formale Regel — wie sie eben gegeben wurde — durch überschlägliche Kopfrechnung bzw. durch Anwendung der Zehnerpotenzreihe erfolgt. Hierbei werden sämtliche Zahlen (Faktoren), die in einer zusammengesetzten Aufgabe zu multiplizieren bzw. zu dividieren sind, in „Einer mit Dezimalstellen“ und Zehnerpotenzen zerlegt.

Beispiel:

$$
\begin{array}{rl}
22{,}5 & \to 2{,}25 \cdot 10^1 \\
537 & \to 5{,}37 \cdot 10^2 \\
3965 & \to 3{,}965 \cdot 10^3 \\
9040000 & \to 9{,}04 \cdot 10^6 \\
0{,}25 & \to 2{,}5 \cdot 10^{-1} \\
0{,}078 & \to 7{,}8 \cdot 10^{-2} \\
0{,}00965 & \to 9{,}65 \cdot 10^{-3}
\end{array}
$$

Die Zehnerpotenzen kann man leicht im Kopf ausrechnen, während die Ausrechnung der „Einer mit Dezimalstellen“ auf dem Rechenschieber erfolgt. Eine umfangreiche kombinierte Rechnung wird so durch das Zerlegen übersichtlicher, so daß die Bestimmung der Stellenzahl des Ergebnisses nach der Rechenschieberrechnung im Kopf überschläglich berechnet werden kann.

Beispiel:

$$\frac{945 \cdot 0{,}0084 \cdot 0{,}012}{13606 \cdot 2{,}1 \cdot 0{,}0475} = x$$

Das Zerlegen in „Einer mit Dezimalstellen“ und Zehnerpotenzen wird im Kopf durchgeführt.

$$\frac{9{,}45 \cdot 10^2 \cdot 8{,}4 \cdot 10^{-3} \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-2}}{1{,}36 \cdot 10^4 \cdot 2{,}1 \cdot 10^0 \cdot 4{,}75 \cdot 10^{-2}} = x$$

Die Rechnung getrennt geschrieben lautet:

$$x = \frac{9{,}45 \cdot 8{,}4 \cdot 1{,}2}{1{,}36 \cdot 2{,}1 \cdot 4{,}75} \cdot \frac{10^2 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-2}}{10^4 \cdot 10^0 \cdot 10^{-2}}$$

Die Multiplikationen und Divisionen des I. Teiles können in laufender Rechnung mit dem Rechenschieber erledigt werden. (Ergebnis: 7,02) Die Zehnerpotenzen ergeben: $10^{2-3-2-4+2} = 10^{-5}$.

Also ist $\qquad x = 7{,}02 \cdot 10^{-5}$

$$x = \mathbf{0{,}0000702}$$

Bei der Ausrechnung des linken Bruches der Rechnung

$$\frac{9{,}45 \cdot 8{,}4 \cdot 1{,}2}{1{,}36 \cdot 2{,}1 \cdot 4{,}75}$$

ist natürlich durch Kopfrechnung (oder mit Hilfe der auf Seite 180 angegebenen formalen Methode) die Stellenzahl zu ermitteln. In

dem angeführten Beispiel ist das Ergebnis ein „Einer“. Selbstverständlich kann es auch größer oder kleiner sein.

Beispiele:

1. $x = \frac{950 \cdot 860}{1{,}5 \cdot 32} = \underbrace{\frac{9{,}5 \cdot 8{,}6}{1{,}5 \cdot 3{,}2}}_{\approx 17} \cdot \underbrace{\frac{10^2 \cdot 10^2}{10^1}}_{10^3}$

$$x = 17 \cdot 10^3 = 17000$$

oder: $\quad x = 1{,}7 \cdot 10^1 \cdot 10^3 = 1{,}7 \cdot 10^4 = 17000$

2. $x = \frac{37{,}5 \cdot 2800}{950 \cdot 69} = \underbrace{\frac{3{,}75 \cdot 2{,}8}{9{,}5 \cdot 6{,}9}}_{\approx 0{,}16} \cdot \underbrace{\frac{10^1 \cdot 10^3}{10^2 \cdot 10^1}}_{10^1}$

$$x = 0{,}16 \cdot 10^1 = 1{,}6$$

oder: $\quad x = 1{,}6 \cdot 10^{-1} \cdot 10^1 = 1{,}6$

Volksbuchhandlung
„Der Aktivist"
Berlin-Oberschöneweide
Wilhelminenhofstraße 33
Tel. 63 78 39

Datum:	DM	Pf
Kritik	2,85	
Pol.	-,80	
Nb.	-,20	
	3,85	

21 **00481**

(7) 8 26297/56 5 178